сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5-85-605

Т.Б.Боев, Е.П.Жидков

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА - ГОРДОНА В МНОГОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

1985

Введение

Следующее уравнение (I) часто называется (нелинейным) уравнением Клейна – Гордона:

$$\text{(I)} \qquad u_{tt} - \Delta u = f(u),$$

где $\Delta = \partial^2_{x^1} + \dots + \partial^2_{x^n}$ – оператор Лапласа относительно пространственных переменных $x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$; f – достаточно гладкая функция, определенная в $\mathbb{R}^1$. В настоящей статье рассматривается трехмерный случай: $n = 3$. Значение уравнения (I) в математической физике хорошо известно (см. напр. /1/, /2/, /3/ – в случае $n=1$). Важные для приложений качественные исследования в случае $n>1$ обсуждаются в докладе Лакса /4/ (гл. XI). Среди полученных в последнее время в этом направлении отметим, например, результат Клейнермана и Понса /5/ о некоторых нелинейных возмущениях (относительно производных) линейного уравнения Клейна – Гордона. Ранее, глобальные по t решения задачи Коши для уравнения (I) при $n \geq 1$, изучал Мизохата /6/ на основе одного результата Йоргенса (см. /6/); этот результат сыграл существенную роль в рассматриваемой тематике. В /6/ при $n=3$ допускается квадратичный рост для $f' = df/du$, если выполнено условие $\int f\,du \leq const$ для $-\infty < u < +\infty$. В теореме I (ниже) рассмотрен случай $f' \in L^\infty(\mathbb{R}^1)$ без условия на $\int f\,du$. Глобальное классическое решение получено при меньших ограничениях на гладкость f. В теоремах 2, 3 (п.2) получена "частичная" глобальность (для большого конечного времени) без ограничений вида $f' \in L^\infty$. (Результаты работы /5/ хотя и также касающиеся "частичной" глобальности, являются другого типа.) Для доказательства применяется классическая формула Кирхгофа в оценках последовательных приближений. Без изменений аналогичный подход применим и к системам из произвольного числа уравнений типа (I). Рассмотрим, например, систему

$$\text{(2)} \qquad \begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= f(u,v) \\ v_{tt} - \Delta v &= g(u,v). \end{aligned}$$

Отметим, что системы из k таких уравнений использованы (в случае $n=1$) для изучения т.н. k – взаимодействующего поля $U=(u_1,\dots,u_k)$ – см. напр. /7/ (также /3/ – гл. Ш). Для систем из двух уравнений, при $n=2$, волны, подобные солитонам, обнаружены в /8/. Некоторый обобщенный вариант формулы Кирхгофа можно иллюстрировать на системах вида

$$
(3) \qquad \begin{aligned} u_{tt} - \tilde{\Delta} u &= f(u,v) \\ v_{tt} - \hat{\Delta} v &= g(v), \end{aligned}
$$

где $\tilde{\Delta}, \hat{\Delta}$ – однородные эллиптические операторы по x второго порядка с переменными коэффициентами (зависящими только от x). Эти коэффициенты предполагаются (достаточно гладкими) реальными функциями, заданными в $\mathbb{R}^3$. Поскольку эти функции могут быть близкими к коэффициентам (и даже где-то совпадать с ними) "чистого" оператора Лапласа, $\tilde{\Delta}$ и $\hat{\Delta}$ можно назвать "деформациями" этого оператора. Системы (с "деформациями") вида (3) можно рассматривать как модели волновых взаимодействий в средах с некоторыми неоднородностями. Ниже будет указан класс глобальных "деформаций", для которого задача Коши имеет глобальные классические решения.

I. Задача Коши для уравнения (I)

Теорема I.

Пусть $\varphi(x)\in C^3(\mathbb{R}^3)$, $\psi(x)\in C^2(\mathbb{R}^3)$ – произвольные функции, $f(u)\in C^2(\mathbb{R}^1)$, $f''=d^2f/du^2$ удовлетворяет локальному условию Липшица и $f'(u)\in L^\infty(\mathbb{R}^1)$. Тогда существует единственное глобальное $(\forall t\geqslant 0)$ классическое решение $u(x,t)$ уравнения (I), удовлетворяющее начальным условиям

$$
(4) \qquad u|_{t=0}=\varphi(x), \qquad u_t|_{t=0}=\psi(x).
$$

Решение зависит непрерывно от φ и ψ в равномерной норме на компактах в $\mathbb{R}^3\times[0,+\infty)$. Кроме того, если $\varphi\in H^1(\mathbb{R}^3)$, $\psi\in L_2(\mathbb{R}^3)$, и $f(0)=0$, то $u(x,t_0)\in L_2(\mathbb{R}^3)$ $\forall t_0\geqslant 0$ и отображение $u(.,t):[0,T]\to L_2(\mathbb{R}^3)$ – непрерывное $\forall T>0$.

Здесь $H^\ell(\mathbb{R}^3)$ – хорошо известные пространства Соболева.

Доказательство.

Рассмотрим следующие последовательные приближения:

$$
(5) \qquad u_0(x,t)=\partial_t\Big(\frac{t}{4\pi}\int_{S_1}\varphi(x+t\cdot\omega)\,ds_\omega\Big)+\frac{t}{4\pi}\int_{S_1}\psi(x+t\cdot\omega)\,ds_\omega ,
$$

где $S_1=\{\omega\in\mathbb{R}^3:|\omega|=1\}$, ds_ω – элемент площади S_1 ;

$$
u_{k+1}(x,t)=u_0(x,t)+\frac{1}{4\pi}\int_0^t\tau\int_{S_1}f(u_k(x+\tau\omega,t-\tau))\,ds_\omega\,d\tau , \quad k=0,1,\dots .
$$

Пусть $Q_R\subset R^3$ – произвольный шар радиуса R и $K_R\subset\mathbb{R}^3\times[0,+\infty)$ – замкнутый конус с основанием Q_R и высотой R . Обозначим через Wu интегральный оператор $\frac{1}{4\pi}\int_0^t\tau\int_{S_1}f(u(x+\tau\omega,t-\tau))\,ds_\omega\,d\tau$. Докажем, что для каждого $T\in(0,R)$ существует решение $u\in C(K_{R,T})$ уравнения

$$
(6) \qquad u=u_0+Wu ,
$$

где $K_{R,T}=\{(x,t)\in K_R\,,\ t\leqslant T\}$. Очевидно, что $(x+\tau\omega,t-\tau)\in K_{R,T}$, когда $(x,t)\in K_{R,T}$, $0\leqslant\tau\leqslant t$ и $|\omega|=1$. Оцениваем разность $|u_{k+1}-u_k|$ в $K_{R,T}$: $|u_1-u_0|\leqslant T/4\pi\int_0^t\int_{S_1}|f(u_0)|\,ds_\omega\,d\tau\leqslant Tt\cdot M_f$, где $M_f=\max\limits_{|u|\leqslant M_0}|f(u)|$ и $M_0=\max\limits_{K_R}|u_0(x,t)|$; $|u_2-u_1|\leqslant T\cdot L_f\int_0^t T(t-\tau)M_f\,d\tau=\frac{(Tt)^2}{2!}\cdot L_f M_f$.
где L_f – константа Липшица для f , – глобальная, ибо f' – ограничена в $\mathbb{R}^1$. Предполагая, что $|u_k-u_{k-1}|\leqslant\frac{(Tt)^k}{k!}\cdot L_f^{k-1}\cdot M_f$, получаем: $|u_{k+1}-u_k|\leqslant T.L_f\int_0^t T_k(t-\tau)^k/k!\cdot L_f^{k-1}.M_f\,d\tau=(Tt)^{k+1}/(k+1)!\cdot L_f^k.M_f$, т.е.

$$
|u_k-u_{k-1}|\leqslant\frac{(T^2L_f)^k}{k!}\cdot\frac{M_f}{L_f}, \quad \forall k=1,2,\dots .
$$

Это означает, что функция $u=\lim\limits_{k\to\infty}u_k$ непрерывна в $K_{R,T}$, а таким образом, – и в $\mathbb{R}^3\times[0,+\infty)$, – и удовлетворяет (6).

Гладкость решения. Докажем, например, что $u'=u_{x^j}\in C(K_{R,T})$, $j=1,2,3$, для произвольного $T<R$. Дифференцируя (5), получаем для u' уравнение

$$
(7) \qquad u'=u'_0+W'(u,u');\quad W'(u,u')=\frac{1}{4\pi}\int_0^t\tau\int_{S_1}f'(u(x+\tau\omega,t-\tau)).u'(x+\tau\omega,t-\tau)\,ds_\omega\,d\tau.
$$

Очевидно, существует константа M_0^T , такая, что $|u_k|\leqslant M_0^T$ в $K_{R,T}$ $\forall k=0,1,\dots$. Кроме того, нетрудно получить оценку вида $|u'_k|\leqslant M'_0(T)$ в $K_{R,T}$, где $M'_0(T)$ – константа и $u'_{k+1}=u'_0+W'(u_k,u'_k)$ (см. (7)). Функция $f'(u).u'$ удовлетворяет условию Липшица по u и u' для $|u|\leqslant M_0^T$, $|u'|\leqslant M'_0(T)$, – с некоторой фиксированной константой. Теперь ясно, что система (6), (7) имеет решение $(u,u')\in C(K_{R,T})$, т.е. $u_{x^j}\in C(K_{R,T})$, где u – решение (6). Аналогичным образом устанавливается, что u_t и производные u второго порядка – непрерывные в $K_{R,T}$, т.е. $u\in C^2(R^3\times[0,+\infty))$. (Отметим, что для системы (6), (7) достаточно доказать существование решения только для малых T .)
По классической теории волнового уравнения формула Кирхгофа $u_{k+1}=u_0+Wu_k$ дает $\partial_t^2u_{k+1}-\Delta u_{k+1}=f(u_k)$; при $k\to+\infty$ получаем: $u_{tt}-\Delta u=f(u)$. Проверка выполнения начальных условий аналогична.

<u>Единственность</u>. Для пары решений $u, \tilde{u}$ (по формуле Кирхгофа) имеем $u - \tilde{u} = \frac{1}{4\pi}\int_0^t \tau \int_{S_1} \{f(u(x+\tau\omega, t-\tau)) - f(\tilde{u}(x+\tau\omega, t-\tau))\} ds_\omega\, d\tau$.

Фиксируем (x,t) в $K_{R,T}$ и положим $y(s) = \max\limits_{|x-\xi|=t-s} |u(\xi,s) - \tilde{u}(\xi,s)|$, $0 \leqq s \leqq t$. Ясно, что $|u(x,t) - \tilde{u}(x,t)| = y(t)$, выполнено неравенство Гронуола

$$(8) \qquad y(t) \leqq T L_f \int_0^t y(\tau)\, d\tau,$$

и поэтому нетрудно обнаружить, что

$$\int_0^t y(\tau)\, d\tau \leqq e^{TL_f(t-\varepsilon)} \int_0^\varepsilon y(\tau)\, d\tau \text{ для всех } \quad \varepsilon \in (0,t).$$

Тогда при $\varepsilon \to 0$ получаем $u(x,t) = \tilde{u}(x,t)$.

<u>Непрерывная зависимость от начальных условий</u>

Для пары начальных условий φ, ψ и $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$ обозначим соответствующие решения через u и $\tilde{u}$. Теперь, как и раньше, имеем:

$y(t) \leqq \delta + T \cdot L_f \int_0^t y(\tau)\, d\tau$, где $\max\limits_{K_{R,T}} |u_0(x,t) - \tilde{u}_0(x,t)| \leqq \delta$.

Отсюда нетрудно получить:

$$y(t) \leqq \delta\,(e^{T^2 L_f} + 1), \text{ т.е.}$$

$$\max_{K_{R,T}} |u(x,t) - \tilde{u}(x,t)| \leqq (e^{T^2 L_f} + 1) \cdot \max_{K_{R,T}} |u_0(x,t) - \tilde{u}_0(x,t)|,$$

а эта оценка дает непрерывную зависимость.

<u>Непрерывность отображения $u(\cdot,t) : [0,T] \to L_2(R^3)$</u>

Пусть $\mathcal{O} \subset R^3$ – произвольная область и $\mathcal{O}_t$ – ее подобласть, расстояние которой до границы $\mathcal{O}$ равно t. Обозначим: $\|u(t)\|^2_{\mathcal{O}_t} = \int_{\mathcal{O}_t} |u(x,t)|^2 dx$. Из формулы (5) (ибо $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^3)$, $\psi \in L_2(\mathbb{R}^3)$) видно, что $N_0^{\mathcal{O}}(T) \overset{df}{=} \sup\limits_{0 \leqq t \leqq T} \|u_0(t)\|_{\mathcal{O}_t} < +\infty$. Для удобства в оценках ниже будем писать $\|u(t)\|$ и $N_0(T)$ вместо $\|u(t)\|_{\mathcal{O}_t}$ и $N_0^{\mathcal{O}}(T)$ соответственно. Получим оценку для $\|u(t)\|$ через $\|u_0(t)\|$. Условие $f(0)=0$ позволяет записать формулу для u_{k+1} следующим образом:

$$u_{k+1} = u_0 + \frac{1}{4\pi}\int_0^t \tau \int_{S_1} u_k(x+\tau\omega, t-\tau) \int_0^1 f'(\lambda u_k(x+\tau\omega, t-\tau))\, d\lambda\, ds_\omega\, d\tau.$$

Пользуясь этой формулой, получаем (для $t \leqq T$):

$$|u_1 - u_0|^2 \leqq \frac{T^2 M_f'^2}{16\pi^2} \Big(\int_0^t \int_{S_1} |u_0(x+\tau\omega, t-\tau)|\, d s_\omega\, d\tau\Big)^2 \leqq \frac{T^3 M_f'^2}{4\pi} \int_0^t \int_{S_1} |u_0|^2 ds_\omega\, d\tau, \text{ т.е.}$$

$$\|u_1 - u_0\|^2 \leqq T^3 M_f'^2\, t\, (N_0(T))^2, \text{ где } \qquad M_f' = \sup|f'|;$$

$$\|u_2 - u_1\|^2 \leqq \frac{T^3 M_f'^2}{4\pi} \int_0^t \int_{S_1} \|(u_1 - u_0)(t-\tau)\|^2 ds_\omega\, d\tau \leqq T^6 M_f'^4 (N_0(T))^2 \int_0^t (t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{(T_3 M_f'^2 t)^2}{2!} (N_0(T))^2.$$

Далее, индукцией нетрудно установить, что

$\|u_k - u_{k-1}\|^2 \leqq \frac{(T^3 M_f'^2 t)^k}{k!} (N_0(T))^2, \quad \forall k = 1, 2, \ldots$. Это означает, что можно найти константу $C(T) > 0$, такую, что выполнена оценка

$$\|u_k(t)\|_{\mathcal{O}_t} \leqq C(T)\, N_0^{\mathcal{O}}(T), \quad \forall k = 1,2,\ldots, \quad \forall t \leqq T, \quad \forall \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3.$$

Пусть $\mathcal{O}$ – произвольный шар; при $k \to +\infty$ получаем

$$\|u(t)\|_{\mathcal{O}_t} \leqq C(T)\, N_0^{\mathcal{O}}(T) \leqq C(T)\, N_0^{\mathbb{R}^3}(T).$$

Из произвольности $\mathcal{O}$ следует, что $u(t) \in L_2(\mathbb{R}^3)$. Чтобы доказать непрерывность, для произвольного $\varepsilon > 0$ выбираем $\mathcal{O} = \{|x| > R\}$ с таким R, что $N_0^{\mathcal{O}}(T) < \varepsilon/4$; последнее, очевидно, возможно (как следует из (5)). Однако функция $J_{R+T} = \Big(\int_{|x| \leqq R+T} |u(x,t)|^2 dx\Big)^{1/2}$ – непрерывная в $[0,T]$, т.е. $|J_{R+T}(t_2) - J_{R+T}(t_1)| < \varepsilon/2$ для достаточно близких t_1, t_2. Таким образом, ясно, что $\|u(t_2) - u(t_1)\|_{\mathbb{R}^3} < \varepsilon$.

<u>Теорема 2</u>

Пусть $\varphi(x) \in C^3(\mathbb{R}^3)$, $\psi(x) \in C^2(\mathbb{R}^3)$ – произвольные; $f(u) \in C^2(\mathbb{R}^1)$, f'' удовлетворяет локальному условию Липшица и $f(s_0) = 0$ для некоторого $s_0 \in \mathbb{R}^1$. Тогда для произвольных $R, T :\ 0 < T < R \leqq +\infty$, если $\max\limits_{K_{R,T}} |u_0(x,t) - s_0| = \delta$ – достаточно мало, существует единственное классическое решение $u(x,t)$ в $K_{R,T}$ задачи (I), (4). Решение зависит непрерывно от φ и ψ. Кроме того, если $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^3)$, $\psi \in L_2(\mathbb{R}^3)$, $s_0 = 0$ и $R = +\infty$, то $u(x,t_0) \in L_2(\mathbb{R}^3)\ \forall t_0 \in [0,T]$, и отображение $u(\cdot,t) : [0,T] \to L_2(\mathbb{R}^3)$ – непрерывно. (Напомним, что $u_0(x,t)$ определяется начальными условиями по формуле (5).)

Доказательство

Обозначим через $L_f \max\limits_{|u-s_0| \leqq a_0} |f'(u)|$, для некоторого $a_0 > 0$. Докажем, что для $\delta \leqq a_0 \exp(-L_f T^2)$ имеем $\max\limits_{K_{R,T}} |u_k - s_0| \leqq a_0$, где $0 < T < R \leqq +\infty$.

Используем формулу $(t \leqq T)$:

$u_{k+1} - s_0 = u_0 - s_0 + \frac{1}{4\pi}\int_0^t \tau \int_{S_1} (u_k - s_0) \int_0^1 f'(s_0 + \lambda(u_k - s_0))\, d\lambda\, ds_\omega\, d\tau$. Имеем:

$$|u_1 - s_0| \leqq |u_0 - s_0| + \frac{L_f T}{4\pi}\int_0^t \int_{S_1} |u_0 - s_0| \, ds_\omega \, d\tau \leqq \delta + L_f T t \, \delta \leqq a_0 \,;$$

$$|u_2 - s_0| \leqq |u_0 - s_0| + L_f T \delta \cdot \int_0^t (1 + L_f T (t - \tau)) \, d\tau \leqq \delta + L_f T t \, \delta + \frac{L_f^2 T^2 t^2}{2!} \delta \leqq a_0 \,.$$

Далее по индукции ясно, что выполнено неравенство:

$$|u_k - s_0| \leqq \delta \left(1 + L_f T t + \frac{(L_f T t)^2}{2!} + \ldots + \frac{(L_f T t)^k}{k!}\right) < \delta e^{L_f T^2} \leqq a_0 \,.$$

Эта оценка означает, что в исследовании сходимости последовательных приближений можем использовать фиксированную константу Липшица L_f. Теперь, чтобы доказать остальную часть утверждения, надо только повторить соответствующие процедуры из доказательства теоремы I.

Теорема 3

Для φ, ψ и f предположим выполненными условия регулярности из теоремы 2 и $f(s_0) = 0$. Выберем произвольные положительные константы a_0 и R, T, где $T < R \leqq +\infty$, и предположим, что $\max\limits_{K_{R,T}} |u_0(x,t) - s_0| \leqq q a_0$, $0 < q < 1$. Тогда, если $\max\limits_{|u - s_0| \leqq a_0} |f'(u)| = \delta'$ – достаточно мало, задача (I), (4) имеет единственное классическое решение $u(x,t)$ в $K_{R,T}$, которое зависит непрерывно от начальных условий. Кроме того, если $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^3)$, $\psi \in L_2(\mathbb{R}^3)$ и $s_0 = 0$, $R = +\infty$, то $u(x,t_0) \in L_2(\mathbb{R}^3)$ $\forall t_0 \in [0,T]$ и отображение $u(\cdot,t) : [0,T] \to L_2(\mathbb{R}^3)$ – непрерывно.

Доказательство

Снова рассматривая разность $u_k - s_0$, устанавливаем, что если $\delta' \leqq \frac{1}{T^2} \cdot \ln\left(\frac{1}{q}\right)$, то $|u_k - s_0| \leqq q a_0 \left(1 + \delta' T t + \frac{(\delta' T t)^2}{2!} + \ldots + \frac{(\delta' T t)^k}{k!}\right) < q a_0 e^{\delta' T^2} \leqq a_0$ для $(x,t) \in K_{R,T}$, где $0 < T < R \leqq +\infty$. Полученная оценка для $|u_k - s_0|$ дает возможность использовать некоторую фиксированную мажоранту для $|f'|$ и, таким образом, применить снова знакомую процедуру.

Замечания

1). Теоремы I, 2, 3 можно обобщить очевидным образом на случай $f = f(x,t,u)$.

2). Вторую часть утверждений в теоремах I, 2, 3 нетрудно доказать в более общем варианте для непрерывности отображения $u(\cdot,t) : [0,T] \to H^m(\mathbb{R}^3)$, $m \geqslant 0$ – целое.

Примеры

Рассмотрим уравнение $u_{tt} - \Delta u = \frac{2u}{1+u^2}$, для которого $f' \in L^\infty$ и по теореме I все классические решения – глобальные; это, однако, не следует из результатов, полученных в /6/, поскольку $\int f \, du = \ln(1+u^2)$ – неограниченная функция. В следующем примере: $u_{tt} - \Delta u = 2(u + u^3)$ снова $\int f \, du$ – неограниченная функция. Решение с начальными условиями $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 1$ – это $u = \operatorname{tg} t$, которое не является глобальным. Заменяя $f = 2(u + u^3)$ на $f = 2\varepsilon(u + u^3)$, ε – мало, можно расширить временной интервал, где определено решение с заданными начальными условиями, как это следует из теоремы 3. Сформулируем общее утверждение такого типа, которое вытекает из теоремы 3:

Следствие

Пусть $0 < T < R \leqq +\infty$ – произвольные числа и $f(u)$ удовлетворяет требованиям гладкости из теоремы 3. Если в уравнении (I) заменим $f(u)$ на $f(s_0 + \varepsilon(u - s_0))$, где $f(s_0) = 0$, то решение задачи Коши с фиксированными данными φ, ψ определено в $K_{R,T}$ при достаточно малом ε.

2. Задача Коши для систем

Решение задачи Коши (с начальными условиями (I0) – ниже) для системы (2) получается тем же способом, как для уравнения (I), и дается системой интегральных уравнений типа (6):

$$u = u_0 + \frac{1}{4\pi}\int_0^t \tau \int_{S_1} f(u(x+\tau\omega, t-\tau), v(x+\tau\omega, t-\tau)) \, ds_\omega \, d\tau \,,$$

$$v = v_0 + \frac{1}{4\pi}\int_0^t \tau \int_{S_1} g(u(x+\tau\omega, t-\tau), v(x+\tau\omega, t-\tau)) \, ds_\omega \, d\tau \,,$$

где u_0, v_0 определяются соответственно функциями φ_0, φ_1 и ψ_0, ψ_1 (из (I0)) по формуле (5).

Теоремы I, 2, 3 переносятся на случай систем вида (2) очевидным образом.

Пусть в $\mathbb{R}^3$ имеем три глобальных достаточно гладких линейно независимых векторных поля $X_1(x)$, $X_2(x)$, $X_3(x)$. Будем предполагать, что каждые два X_i, X_j – всюду инволютивные, т.е. для коммутатора $[X_i, X_j]$ имеем $[X_i, X_j] = \alpha_{ij} X_i + \beta_{ij} X_j$ (в $\mathbb{R}^3$), где $\alpha_{ij} = \alpha_{ij}(x)$, $\beta_{ij} = \beta_{ij}(x)$ – достаточно гладкие функции. Для каждого векторного поля X (из X_j, $j = 1,2,3$) предполагаем, кроме того, что его однопараметрическая группа диффеоморфизмов Φ^ξ определена для всех вещественных значений фазового параметра ξ и что $|\Phi^\xi(x)| \to +\infty$ при $\xi \to \pm\infty$ $\forall x \in \mathbb{R}^3$. Через $\tilde{\partial}_j$, $\hat{\partial}_j$ обозначим операторы дифференцирования по направлениям векторных полей $\tilde{X}_j$, $\hat{X}_j$ соответственно. Будем использовать "деформации" оператора Лапласа следующего типа

$$(9) \qquad \tilde{\Delta} = \tilde{\partial}_1^2 + \tilde{\partial}_2^2 + \tilde{\partial}_3^2 \,, \qquad \hat{\Delta} = \hat{\partial}_1^2 + \hat{\partial}_2^2 + \hat{\partial}_3^2 \,,$$

где $\tilde{X}_j$, $\hat{X}_j$ $(j=1,2,3)$ удовлетворяют уже сформулированным условиям. Для систем вида (3) будем рассматривать задачу Коши с начальными условиями

$$(10)\quad u|_{t=0}=\varphi_0,\quad u_t|_{t=0}=\varphi_1;\quad v|_{t=0}=\psi_0,\quad v_t|_{t=0}=\psi_1 .$$

Теорема 4

Предположим, что в системе (3) $\tilde{\Delta}$ и $\hat{\Delta}$ – две "деформации" оператора Лапласа вида (9), правые части $f(u,v)$, $g(v)$ принадлежат классу C^2 и их производные второго порядка удовлетворяют локальному условию Липшица. Пусть начальные данные (10) удовлетворяют требованиям $\varphi_0, \psi_0 \in C^3(\mathbb{R}^3)$ и $\varphi_1, \psi_1 \in C^2(\mathbb{R}^3)$.

(A). Если $\partial_u f$, $\partial_v f$ и g' – ограничены (соотв. в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^1$), то существует единственное глобальное ($\forall t \geqslant 0$) классическое решение $u(x,t)$, $v(x,t)$ задачи (3), (10), которое зависит непрерывно от начальных условий. Отображения $u(\cdot,t), v(\cdot,t):[0,T]\to H^m(\mathbb{R}^3)$ – непрерывные $\forall T>0$ и $m\geqslant 0$ – целое, когда $\varphi_0, \psi_0 \in H^{m+1}(\mathbb{R}^3)$, $\varphi_1, \psi_1 \in H^m(\mathbb{R}^3)$ и функции f, g – достаточно гладкие, удовлетворяющие $f(0,0)=g(0)=0$.

(Б). Для системы (3) верны утверждения, аналогичные теоремам 2, 3.

Доказательство

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^3$ – фиксированная точка. Положим для удобства $x_0=0$. Можем считать без ограничения общности, что $\tilde{\Phi}^{\tilde{\xi}^j}(x_0)=x_0$ при $\tilde{\xi}^j=0$ $\forall j=1,2,3$, где $\tilde{\Phi}^{\tilde{\xi}^j}$ – однопараметрическая группа диффеоморфизмов поля $\tilde{X}_j$. Глобальная инволютивность и условия $|\tilde{\Phi}^{\tilde{\xi}^j}(x)|\to+\infty$ при $\tilde{\xi}^j\to\pm\infty$ означают, что через произвольную точку $x\in\mathbb{R}^3$ можно провести глобальные гладкие интегральные многообразия $\tilde{\Gamma}_x^1$, $\tilde{\Gamma}_x^2$, $\tilde{\Gamma}_x^3$ систем $\{\tilde{X}_2,\tilde{X}_3\}$, $\{\tilde{X}_3,\tilde{X}_1\}$, $\{\tilde{X}_1,\tilde{X}_2\}$ соответственно, такие, что фазовые кривые $\tilde{\gamma}_y^k$, $\tilde{\gamma}_y^\ell$, $k,\ell\neq j$, лежат на $\tilde{\Gamma}_x^j$ $\forall y\in\tilde{\Gamma}_x^j$; где $\gamma_x=\{\Phi^{\xi}(x), -\infty<\xi<+\infty\}\subset\mathbb{R}^3$ – фазовая кривая (через точку x) поля X . Ясно, что $\tilde{\Gamma}_x^j$ являются двумерными поверхностями. Возьмем, например, кривую $\tilde{\gamma}_x^3$ (проходящую через точку x) и обозначим: $x_2=\tilde{\gamma}_x^3\cap\tilde{\Gamma}_{x_0}^3$; через точку x_2 проводим кривую $\tilde{\gamma}_{x_2}^2$, которая пересекает $\tilde{\gamma}_{x_0}^1$ в точке x_1 . (Все пересечения возможны как следствие условий для полей $\tilde{X}_j$.) Существуют значения фазовых параметров $\tilde{\xi}^j$, такие, что, точку x можем представить как суперпозицию вида $x=\tilde{\Phi}^{\tilde{\xi}^3}(\cdot)\cdot\tilde{\Phi}^{\tilde{\xi}^2}(\cdot)\cdot\tilde{\Phi}^{\tilde{\xi}^1}(x_0)$ – в следующем смысле: $x=\tilde{\Phi}^{\tilde{\xi}^3}(x_2)$, $x_2=\tilde{\Phi}^{\tilde{\xi}^2}(x_1)$ и $x_1=\tilde{\Phi}^{\tilde{\xi}^1}(x_0)$. Эти значения единственные (для данного

x) и не зависят от порядка следования отображений $\tilde{\Phi}^{\tilde{\xi}^j}$, т.е. выполнено равенство: $x=\tilde{\Phi}^{\tilde{\xi}^{j_1}}(\cdot)\cdot\tilde{\Phi}^{\tilde{\xi}^{j_2}}(\cdot)\cdot\tilde{\Phi}^{\tilde{\xi}^{j_3}}(x_0)$ – в смысле: $x=\tilde{\Phi}^{\tilde{\xi}^{j_1}}(x_{j_2})$, $x_{j_2}=\tilde{\Phi}^{\tilde{\xi}^{j_2}}(x_{j_3})$ и $x_{j_3}=\tilde{\Phi}^{\tilde{\xi}^{j_3}}(x_0)$, где $\{j_1,j_2,j_3\}$ – произвольная перестановка чисел $\{1,2,3\}$. Эти утверждения следуют из предположения об инволютивности. Ясно, что можем писать (для произвольной точки $x\in\mathbb{R}^3$): $x=(\tilde{\xi}^1,\tilde{\xi}^2,\tilde{\xi}^3)$, где $\tilde{\xi}^j=\tilde{\xi}^j(x)$ – фазовый параметр поля $\tilde{X}_j$, однозначно определяется по x . Таким образом, фазовые потоки $\{\mathbb{R}^3,\tilde{\Phi}^{\tilde{\xi}^j}\}$ полей $\tilde{X}_j$, $j=1,2,3$, определяют диффеоморфизм из $\mathbb{R}^3$ на пространство фазовых параметров $\tilde{\mathbb{R}}^3_*=\{\tilde{\xi}=(\tilde{\xi}^1,\tilde{\xi}^2,\tilde{\xi}^3)\}$. Обозначим его через $\tilde{\mathcal{F}}:\mathbb{R}^3\to\tilde{\mathbb{R}}^3_*$. По следующей формуле

$$(11)\quad h^*(\tilde{\xi})=h(\tilde{\mathcal{F}}^{-1}(\tilde{\xi})),\ \text{где}\quad h(x)\in C^k(\mathbb{R}^3),$$

получаем изоморфизм классов $C^k(\mathbb{R}^3)$ и $C^k(\tilde{\mathbb{R}}^3_*)$. Проверим, что $\tilde{\partial}_j h(x)=\partial_{\tilde{\xi}^j}h^*(\tilde{\xi})$. Пусть, например, $j=3$; тогда $x=\tilde{\Phi}^{\tilde{\xi}^3}(x_2)$ и для произвольной точки $z\in\tilde{\gamma}_x^3$ из некоторой окрестности x выполнено: $z=\tilde{\Phi}^{\hat{\xi}^3}(x_2)$, где $\hat{\xi}^3\in\mathbb{R}^1$ – из некоторой окрестности числа $\tilde{\xi}^3$. Теперь, так как $\tilde{\Phi}^{\hat{\xi}^3}(x_2)$ является решением автономной системы $\dot{z}=\tilde{X}_3(z)$ проходящее через точку x_2 (а также и через x), требуемое равенство $\tilde{\partial}_3 h(x)=\partial_{\tilde{\xi}^3}h^*(\tilde{\xi})$ следует из определения дифференциального оператора $\tilde{\partial}_3$. Отсюда уже ясно, что если $(u(x,t), v(x,t))$ – решение (3), (10), то для функции $u^*(\tilde{\xi},t)=u(\tilde{\mathcal{F}}^{-1}(\tilde{\xi}),t)$ (см. (11)) получаем: $u^*_{tt}-\Delta_{\tilde{\xi}}u^*=f(u^*,v^*)$ с условиями $u^*(\tilde{\xi},0)=\varphi_0^*(\tilde{\xi})$, $u^*_t(\tilde{\xi},0)=\varphi_1^*(\tilde{\xi})$, где $v^*=v(\tilde{\mathcal{F}}^{-1}(\tilde{\xi}),t)$. Из формулы Кирхгофа вытекает следующее интегральное уравнение типа (6):

$$(12)\quad u^*=u^*_0+\frac{1}{4\pi}\int_0^t\tau\int_{S_1^*}f(u^*(\dots),v^*(\dots))\,dS^*\,d\tau,$$

где S_1^* – единичная сфера в $\tilde{\mathbb{R}}^3_*$. Образ $\tilde{S}_1=\tilde{\mathcal{F}}^{-1}(S_1^*)$ этой сферы является замкнутой гладкой поверхностью в $\mathbb{R}^3$, окружающей точку $x_0=0$. Теперь трансформация $\tilde{\xi}=\tilde{\mathcal{F}}(x)$ и (12) дают:

$$(13)\quad u=\tilde{u}_0+\frac{1}{4\pi}\int_0^t\tau\int_{\tilde{S}_1}f(u(x+\tau\cdot\tilde{\sigma},t-\tau),v(x+\tau\cdot\tilde{\sigma},t-\tau))\cdot\tilde{\mu}(x+\tau\cdot\tilde{\sigma})\,ds_{\tilde{\sigma}}\,d\tau,$$

где $\tilde{\sigma}$ – "текущая" точка на "единичной псевдосфере" $\tilde{S}_1$ и $\tilde{\mu}$ – "плотность", которая зависит от $\tilde{X}_j$, $j=1,2,3$. Аналогичным образом можно обнаружить формулу

$$(14)\quad v=\hat{v}_0+\frac{1}{4\pi}\int_0^t\tau\int_{\hat{S}_1}g(v(x+\tau\cdot\hat{\sigma},t-\tau))\cdot\hat{\mu}(x+\tau\cdot\hat{\sigma})\,ds_{\hat{\sigma}}\,d\tau,$$

где $\hat{S}_1 = \hat{\mathcal{F}}^{-1}(\hat{S}_1^*)$ и $\hat{\mathcal{F}}: R^3 \to \hat{R}^3_*$ – диффеоморфизм, определен фазовыми потоками $\{R^3, \hat{\Phi}^{\hat{s}'}\}$ полей $\hat{X}_j$, $j=1,2,3$. Функции $\tilde{u}_0$, $\hat{V}_0$ получены по формулам типа (5) с участием "сфер" $\tilde{S}_1$, $\hat{S}_1$ соответственно. Исследование системы (I3), (I4) проводится аналогично исследованию уравнения (6). Уравнения (I3), (I4) дают решение задачи (3), (I0), удовлетворяющее утверждениям теоремы 4.

Замечание

Доказывая гладкость второго порядка для решения (напр. задачи (I), (4)), мы рассматриваем некоторую систему из трех уравнений типа (6). Так как на этом шаге нам нужна только теорема о существовании, ясно, что, строя приближения по методу Эйлера, можно отказаться от условия Липшица на f''. Аналогичное замечание относится и к теоремам 2, 3, 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. "Мир", М., I977.
2. Лэм Дж. Л. Введение в теорию солитонов. "Мир", М., I983.
3. Солитоны (Редакторы Р.Буллаф, Ф.Кодри). "Мир", М., I983.
4. Нелинейные волны. "Мир", М., I977.
5. Klainerman S., Ponce G. Comm. Pure Appl. Math., 1983, 36.
6. Мизохата С.. Теория уравнений с частными производными. "Мир", М., I977.
7. Fordy A.P., Gibbons J. Dublin Inst. Adv. preprint DIAS-STP-80-03.
8. Gibbon J.D., Freeman N.C., Davey A.J. Physics A: Math. Gen., 11, L 93, 1978.

Рукопись поступила в издательский отдел
7 августа I985 года.