

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P5-85-588

И.Л.Боголюбский

СИММЕТРИЧНЫЕ
ТРЕХМЕРНЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СОЛИТОНЫ
В РЕШЕТОЧНОЙ МОДЕЛИ МАГНЕТИКА

1985

В работе автора^{/1/} была построена трехмерная ($D=3$) решеточная модель магнетика, допускающая существование солитонов. Было найдено локализованное распределение спинов \vec{s} , $\sum_{a=1}^3 s_a^2 = 1$, расположенных в узлах кубической решетки, которое соответствует минимуму (возможно, не абсолютному) функционала энергии E при фиксированной величине топологического заряда $H_Q = 1$ (по вопросам определения и методики вычисления решеточного аналога индекса Хопфа H_Q см. ^{/1/}). В настоящей работе продолжены поиски солитонных решений в этой модели при $H_Q = 1$.

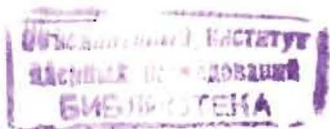
Энергия системы взаимодействующих спинов, рассмотренной в^{/1/}, определяется суммированием по всем точкам решетки $M(\vec{n})$:

$$E = \sum_M \left[(3\alpha + 2\beta) - s_M^z \cdot \left[C_n \sum_{m=1}^3 (s_{n+l_m}^z + s_{n-l_m}^z) + C_{nn} \sum_{m=1}^3 (s_{n+2l_m}^z + s_{n-2l_m}^z) + C_{nd} \sum_{\substack{k, m=1 \\ k < m}}^3 (s_{n+l_k+l_m}^z + s_{n+l_k-l_m}^z + s_{n-l_k+l_m}^z + s_{n-l_k-l_m}^z) \right] \right], \quad (I)$$

$$C_n = 0,5\alpha + 6\beta, \quad C_{nn} = -0,5\beta, \quad C_{nd} = -\beta, \quad \alpha, \beta > 0.$$

Узлы решетки нумеруются целыми числами n_m по осям x_m соответственно, $m=1, 2, 3$, l_m - единичные векторы в положительном направлении осей x_m , $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$, C_n, C_{nn}, C_{nd} - коэффициенты, характеризующие соответственно взаимодействие ближайших соседей (C_n) по одной из осей, следующих за ближайшими по этим осям (C_{nn}), и ближайших соседей по диагоналям (C_{nd}) в плоскостях $Mx_m x_k$.

Как и в^{/1/}, вычислительные эксперименты по поиску солитонов будем выполнять на четверти решетки, расположенной внутри двугранного угла между плоскостями Oxz и Oyz , проходящими через ось симметрии Oz , на которой во всех узлах задавалось $\vec{s} = l_z$ ($x = x_1, y = x_2, z = x_3$), O - центральная точка решетки и получаемых солитонов. Размеры решетки такие же, как в^{/1/}: $L_x = 14, L_y = 15, L_z = 19$.



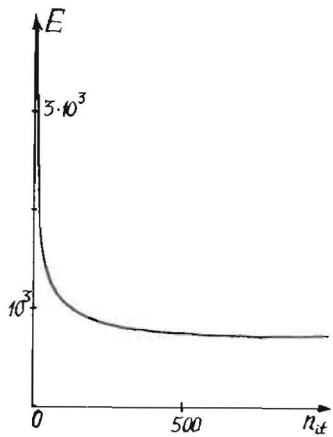


Рис.1

Рис.2

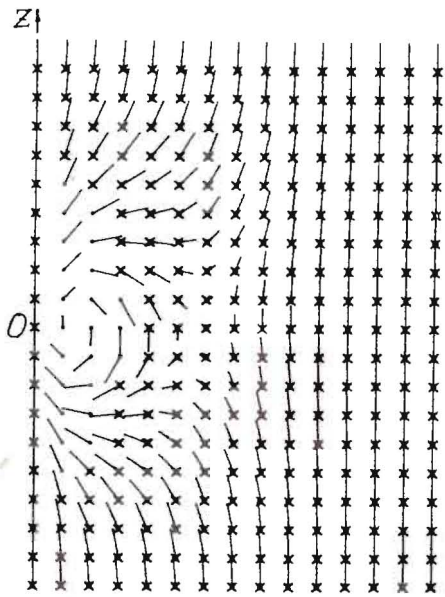
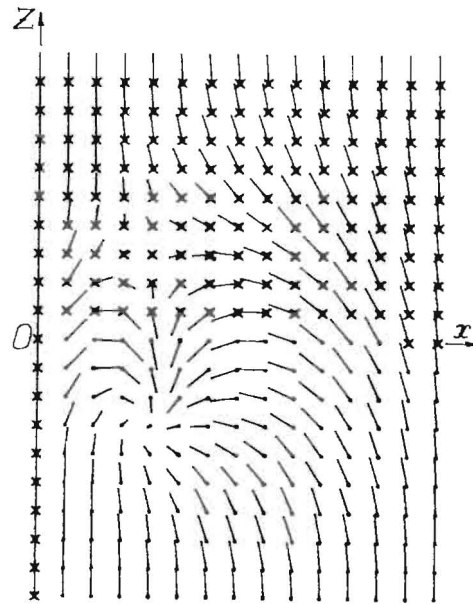


Рис.3

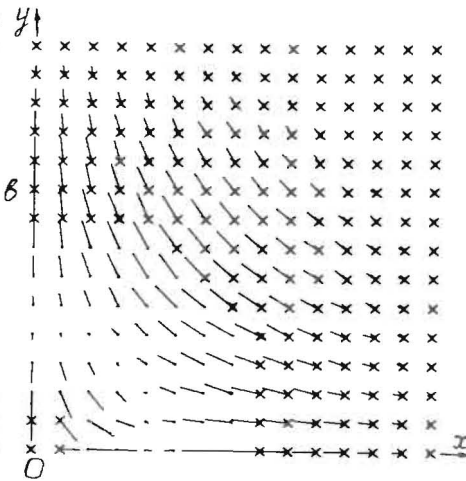


Рис.4

В качестве "внешнего" граничного условия, аппроксимирующего условие на пространственной бесконечности $\vec{s}(\infty) = \ell_z$, принималось, что в узлах, окружающих расчетную конечную решетку, $\vec{s} = \ell_z$.

Возможны следующие варианты симметрии конфигураций спинов относительно поворотов на 90° вокруг оси Oz :

$$A) s_x \rightarrow s_y, \quad s_y \rightarrow -s_x, \quad s_z \rightarrow s_z, \quad (2)$$

$$B) s_x \rightarrow -s_y, \quad s_y \rightarrow s_x, \quad s_z \rightarrow s_z.$$

Солитонное распределение, найденное в [1], имеет симметрию А.

Рассмотрим начальную конфигурацию спинов, определяемую в узлах четверти решетки соотношениями ($k=0, 24$)

$$s_x = 2(N_1 N_4 + N_2 N_3), \quad s_y = 2(N_1 N_3 - N_2 N_4), \quad (3)$$

$$s_z = N_3^2 + N_4^2 - N_1^2 - N_2^2,$$

$$N_i = \frac{2x_i}{1+x^2}, \quad i=1,2,3, \quad N_4 = \frac{1-x^2}{1+x^2}, \quad x^2 = \sum_{l=1}^3 \alpha_l^2, \quad \alpha_l = kn_l,$$

и потребуем выполнения симметрии В (задание симметрии А или В определяет "внутренние" граничные условия на плоскостях Oxz и Oyz). Далее будем, как и в [1], поочередно выбирать новые значения \vec{s} в узлах решетки так, чтобы энергия взаимодействия обновляемого спина с заданными спинами в соседних узлах (см. (1)) была минимальной. Полный обход всех узлов решетки называем итерацией. Процедура локальной минимизации обновляет значение каждого \vec{s}_i N_{it} раз (N_{it} - число итераций в вычислительном эксперименте).

На рис.1 представлена зависимость энергии E от номера итерации n_{it} при $\alpha=2$, $\beta=10$, т.е. при тех же значениях α и β , при которых в [1] была получена первая солитонная конфигурация. Топологический заряд N_ℓ сохраняется в течение всего времени счета (970 итераций). Локализованное распределение, которое сформировалось за 970 итераций, наглядно представлено на рисунках 2-5. На рис.2 изображены s_x и s_z компоненты спинов, расположенных в узлах плоскости Oxz (крестики указывают, что $s_y \geq 0$, точки - $s_y < 0$), на рис.3 представлены спины в узлах диагональной плоскости Ozb , делящей пополам угол между плоскостями Oxz и Oyz , изображена тангенциальная составляющая $\vec{s}_t = (s_x \vec{e}_x + s_y \vec{e}_y) / \sqrt{2}$ (крестики означают, что $s_t = (s_y - s_x) / \sqrt{2} > 0$, точки показывают, что $s_t < 0$), все расстояния между узлами по направлению Ob уменьшены в $\sqrt{2}$ раз). Конфигурация спинов в узлах срединной плоскости Oxy , соответствующей $n_z=10$, представлена на рис.4, а спины в узлах плоскости $n_z=13$ - на рис.5 (на рисунках 4 и 5 крестики соответствуют $s_z \geq 0$, точки - $s_z < 0$).

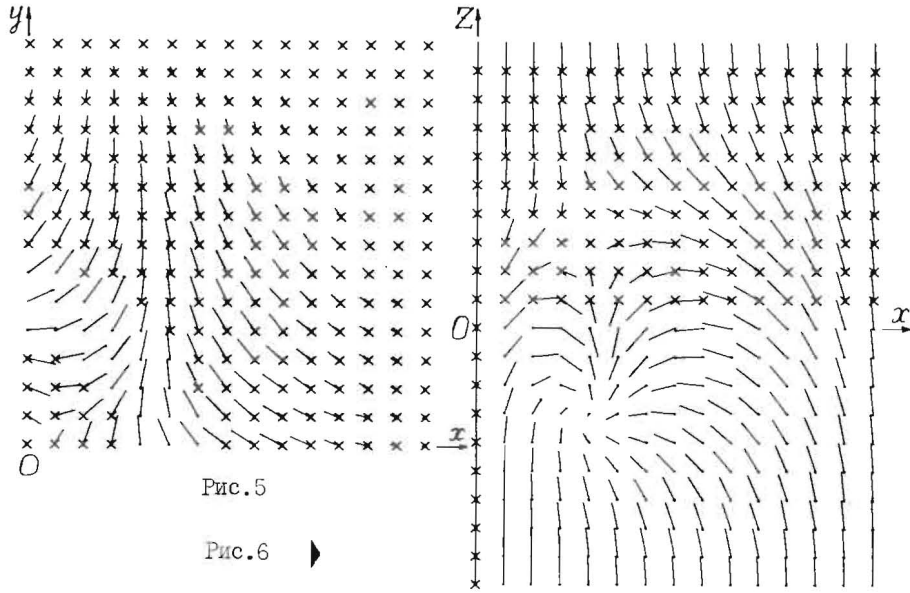


Рис. 5

Рис. 6

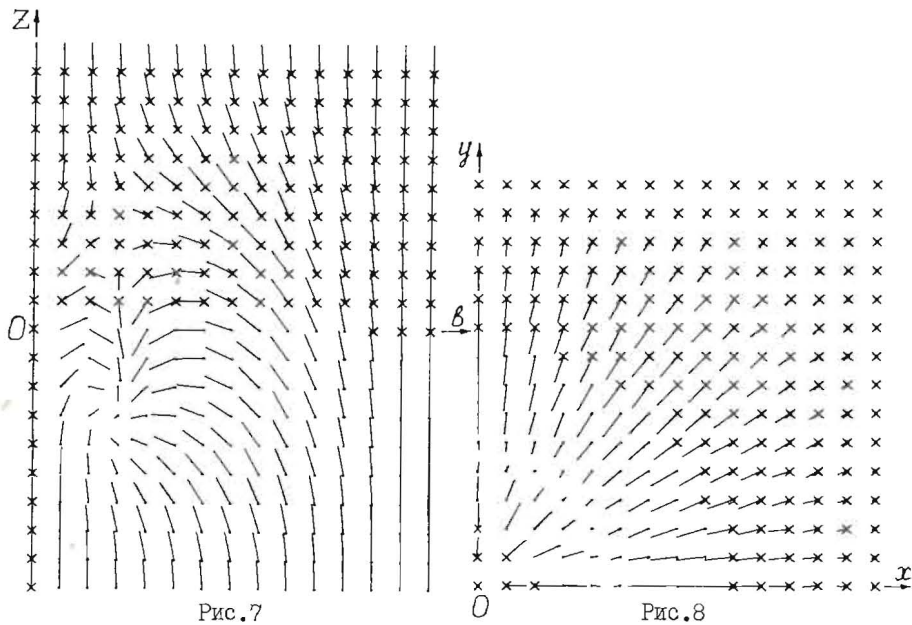


Рис. 7

Рис. 8

После выполнения 970 итераций относительное изменение $\Delta E/E$ за одну итерацию составляет $6,8 \cdot 10^{-5}$ (в дальнейшем $\Delta E/E$ уменьшается), экстраполяция результатов вычислительного эксперимента позволяет определить энергию второго солитона: $E_2 \approx 686$; для среднего значения S_z по всем спином решетки получаем: $\langle S_z \rangle_2 \approx 0,8$, что несколько меньше, чем $\langle S_z \rangle$ для первого солитона I : $\langle S_z \rangle_1 \approx 0,83$. Рис. 2 показывает, что в плоскости Oxz второй солитон имеет следующую симметрию относительно преобразования $z \rightarrow -z$: $S_x \rightarrow S_x$, $S_y \rightarrow -S_y$, $S_z \rightarrow S_z$, в то время как в плоскости Oxz относительно такого же преобразования симметрия другая (см. рис. 3): $S_{x'} \rightarrow -S_{x'}$, $S_{y'} \rightarrow S_{y'}$, $S_z \rightarrow S_z$, здесь $x' = x \cdot \cos \varphi + y \cdot \sin \varphi$, $y' = -x \cdot \sin \varphi + y \cdot \cos \varphi$, $\varphi = 45^\circ$. Наличие такой симметрии относительно плоскости Oxy отличает второе солитонное решение от первого I , не имеющего никакой симметрии относительно этой плоскости. Из дальнейшего изложения будет понятна приближенная симметрия конфигурации спинов второго солитона в плоскости Oxy (рис. 4). Ось Oz является осью симметрии второго порядка этого солитона.

В поисках других возможных локализованных решений рассмотрим начальную конфигурацию, задаваемую в узлах первой четверти решетки соотношениями:

$$S_x = S_{x'} \cdot \cos \varphi - S_{y'} \cdot \sin \varphi, \quad (3)$$

$$S_y = S_{x'} \cdot \sin \varphi + S_{y'} \cdot \cos \varphi,$$

$$S_z = N_3^2 + N_4^2 - N_1^2,$$

$$S_{x'} = 2 N_1 N_4, \quad S_{y'} = 2 N_1 N_3,$$

$$N_1 = \frac{2x'}{1+z^2}, \quad N_3 = \frac{2z}{1+z^2}, \quad N_4 = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \quad z^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}, \quad x_i = \kappa n_i, \quad \kappa = 0,24,$$

и достраиваемую до полной конфигурации в соответствии с симметрией А. Процедура последовательной локальной минимизации в предположении симметрии А (по-прежнему $\alpha = 2$, $\beta = 10$) дает зависимости $E(n_{it})$ и $\langle S_z \rangle(n_{it})$, совпадающие с такими же зависимостями, найденными в первом эксперименте этой работы. Расчет был прекращен после 730 итераций. Полученный в нем солитон будем называть третьим. На рис. 6-9 изображены распределения спинов в тех же плоскостях, что и на рис. 2-5 соответственно для предыдущего эксперимента. Распределения, изображенные на рис. 2, 6, практически не отличаются друг от друга (незначительные различия объясняются тем, что в этих двух расчетах выпол-

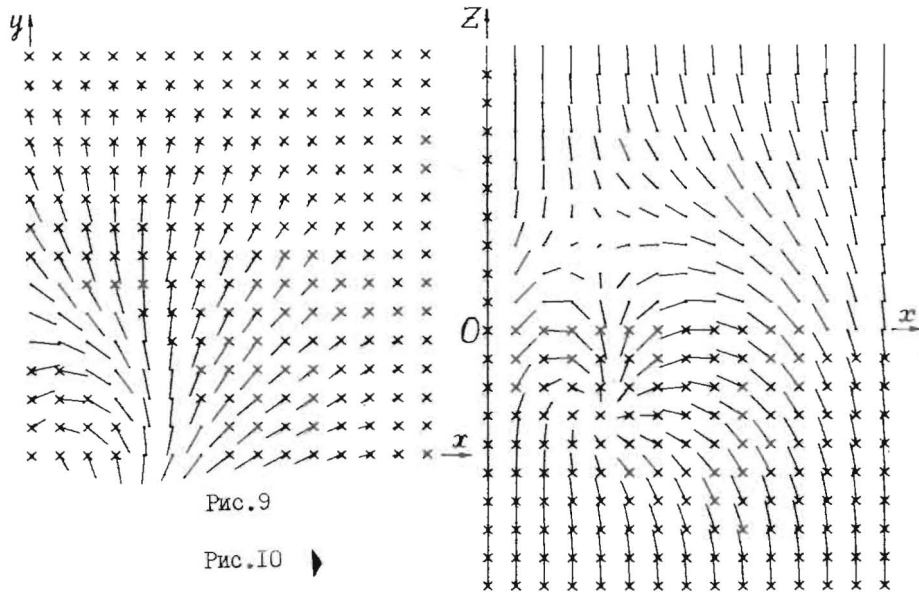


Рис.9

Рис.10

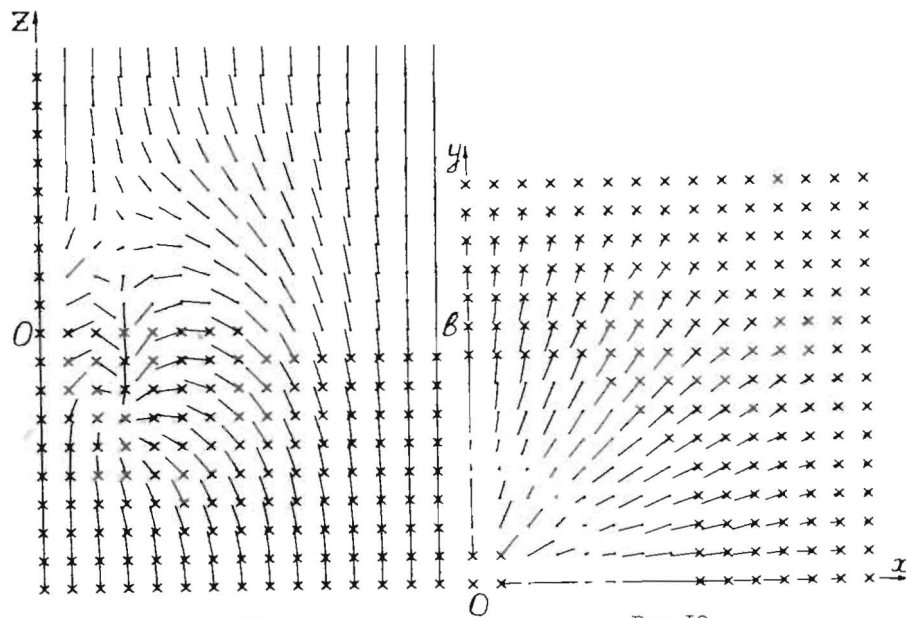


Рис.11

Рис.12

нено разное количество итераций). Симметрия распределения спинов третьего солитона в плоскости $Oz\bar{v}$, представленного на рис.7, относительно преобразования $z \rightarrow -z$ следующая: $s_{x1} \rightarrow s_{x1}$, $s_{y1} \rightarrow -s_{y1}$, $s_{z1} \rightarrow s_{z1}$ (здесь $x' = x \cdot \cos \gamma + y \cdot \sin \gamma$, $y' = -x \cdot \sin \gamma + y \cdot \cos \gamma$). Ось Oz - ось симметрии четвертого порядка для этого солитона, являющегося "наиболее симметричным" из всех найденных: кроме отмеченных симметрий налицо приближенная симметрия относительно поворота на произвольный угол Ψ вокруг оси Oz , превращающаяся в точную при $z \rightarrow \infty$.

Энергия третьего, "симметричного" солитона E_3 совпадает с E_2 , $\langle s_z \rangle_3$ совпадает с $\langle s_z \rangle_2$. Интересно отметить, что "наиболее симметричный" солитон имеет энергию $E_3 > E_1$ - энергии первого солитона, не симметричного относительно плоскости Oxy .

Покажем, что третий солитон преобразованием распределения спинов, сохраняющим энергию E (см.(I)), может быть получен из второго. Очевидно, замена $s_y \rightarrow -s_y$ во всех узлах не изменяет величины E . Подействуем таким преобразованием на спины второго солитона, расположенные в узлах первой четверти решетки. Достроим полученное распределение до полного, используя симметрию А. Такой солитон (см. рис.10, 11, 12, сравнивая их с соответствующими рис.6,7,8 и рис.2,3,4) имеет $E = E_2 = E_3$, $\langle s_z \rangle = \langle s_z \rangle_2 = \langle s_z \rangle_3$, но его топологический заряд $H_e = -1$. Для получения "симметричного" солитона с $H_e = 1$ теперь достаточно попарно поменять местами спины во всех узлах, зеркально симметричных относительно срединной плоскости Oxy , т.е. $\vec{s}(x, y, z) \rightarrow \vec{s}(x, y, -z)$, при этом $H_e = -1$ заменится на $H_e = 1$.

Приближенная осевая симметрия третьего солитона и указанная связь второго и третьего решения характеризуют приближенную симметрию второго солитона в плоскости Oxy (см. рис.4).

Наличие дискретных преобразований типа отражения $s_y \rightarrow -s_y$, $s_x \rightarrow -s_x$ и $\vec{s}(x, y, z) \rightarrow \vec{s}(x, y, -z)$, сохраняющих энергию E , вместе с существованием симметричной и несимметричной относительно плоскости Oxy мод солитонов (можно ожидать существования и других солитонных решений даже при $H_e = 1$) показывают сложность картины минимумов энергии в рассмотренной модели трехмерного магнетика. Результаты данных работ, по меньшей мере, в методическом плане, могут оказаться полезными при исследовании структуры вакуума в квантовой хромодинамике и теории электрослабых взаимодействий.

Литература

1. Боголюбовский И.Л. ОИЯИ, Р5-85-482, Дубна, 1985.

Рукопись поступила в издательский отдел
I августа 1985 года.