

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P5-85-562

В.Г.Маханьков, О.К.Пашаев, Х.Т.Холмуродов*

ПРОЦЕСС ОБРАЗОВАНИЯ СОЛИТОНОВ
ПРИ РАСПАДЕ МОНОХРОМАТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ
В РАМКАХ УРАВНЕНИЯ
КОРТЕВЕГА – ДЕ ФРИЗА.

Теория

* Таджикский государственный университет, Душанбе

1985

I. Условие возникновения дискретного уровня в прямоугольном потенциале нулевой площади

Как было отмечено во введении работы^{/4/}, солитонам уравнения КдФ в рамках МОЗР соответствуют безотражательные потенциалы одномерного стационарного уравнения Шредингера

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} + U(x)\psi = E\psi. \quad (I.1)$$

В связи с рассматриваемой проблемой представляет интерес найти условие возникновения дискретного уровня энергии для потенциалов с нулевой площадью. Точное решение этой задачи возможно, по-видимому, лишь для узкого класса потенциалов. Поэтому мы ограничимся простейшим вариантом потенциала, состоящим из прямоугольной ямы и потенциального барьера, изображенного на рис. I, а затем в последующих разделах, ис-

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < -a \\ -U_1, & -a \leq x \leq 0 \\ 0, & 0 \leq x \leq b-a \\ U_2, & b-a \leq x \leq b \\ 0, & x > b \end{cases} \quad (I.2)$$

пользуя полученные результаты, аппроксимируем импульсы нулевой площади более сложной формы.

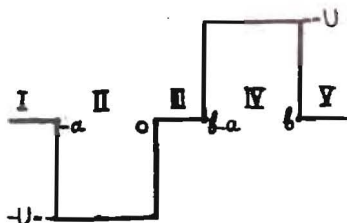


Рис. I

Решения уравнения Шредингера (I.1), соответствующие дискретному уровню энергии $E = -|E|$ в областях I-У, имеют вид

$$\begin{aligned} \Psi_I &= a_1 e^{k_1 x}, & x < -a \\ \Psi_{II} &= a_2 \sin(k_2 x + \delta_2), & -a \leq x \leq 0 \\ \Psi_{III} &= a_3 e^{k_1 x} + a_3' e^{-k_1 x}, & 0 \leq x \leq b-a \\ \Psi_{IV} &= a_4 e^{k_4 x} + a_4' e^{-k_4 x}, & b-a \leq x \leq b \\ \Psi_V &= a_5 e^{-k_1 x}, & x > b \end{aligned} \quad (I.3)$$

где $k_1 = \sqrt{|E|}$, $k_2 = \sqrt{U - |E|}$, $k_4 = \sqrt{U + |E|}$ $U = |U_1| = U_2$.
Из условия непрерывности логарифмических производных волновых функций (I.3) на границах областей I-У получим

$$k_1 = k_2 \operatorname{ctg}(-k_2 a + \delta_2), \quad (I.4)$$

$$k_2 \operatorname{ctg} \delta_2 = k_1 \frac{1 - \delta_3}{1 + \delta_3}, \quad \delta_3 = a_3'/a_3, \quad (I.5)$$

$$k_1 \frac{e^{k_1(b-a)} - \delta_3 e^{-k_1(b-a)}}{e^{k_1(b-a)} + \delta_3 e^{-k_1(b-a)}} = k_4 \frac{e^{k_4(b-a)} - \delta_4 e^{-k_4(b-a)}}{e^{k_4(b-a)} + \delta_4 e^{-k_4(b-a)}}, \quad (I.6)$$

$$-k_1 = k_4 \frac{e^{k_4 b} - \delta_4 e^{-k_4 b}}{e^{k_4 b} + \delta_4 e^{-k_4 b}}, \quad \delta_4 = a_4'/a_4. \quad (I.7)$$

Из уравнений (I.6) и (I.7) для фазы δ_3 имеем

$$\delta_3 = -\frac{e^{2k_1(b-a)}}{(k_4^2 - k_1^2)} \cdot \frac{(k_4 + k_1)^2 e^{2k_4 a} - (k_4 - k_1)^2}{e^{2k_4 a} - 1}. \quad (I.8)$$

Подставляя это выражение в уравнение (I.5), получим

$$\operatorname{ctg} \delta_2 = f(E), \quad (I.9)$$

где через $f(E)$ обозначено следующее:

$$f = \frac{k_1 (k_4^2 - k_1^2) (e^{2k_4 a} - 1) + e^{2k_1(b-a)} [(k_4 + k_1)^2 e^{2k_4 a} - (k_4 - k_1)^2]}{k_2 (k_4^2 - k_1^2) (e^{2k_4 a} - 1) - e^{2k_1(b-a)} [(k_4 + k_1)^2 e^{2k_4 a} - (k_4 - k_1)^2]} \quad (I.10)$$

а из (I.4):

$$\operatorname{ctg}(-k_2 a + \delta_2) = \frac{k_1}{k_2}. \quad (I.11)$$

Легко показать, что $f(E)$ является монотонной отрицательной функцией, так что

$$\operatorname{ctg} \delta_2 < 0,$$

причем $\lim_{|E| \rightarrow 0} f(E) = -\frac{1}{\sqrt{U(b-a)}}$.

Из уравнений (I.4) и (I.9) получаем трансцендентное уравнение для определения дискретных уровней энергии:

$$k_2 a = \pi n - \arcsin \frac{k_2}{\sqrt{U}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{1+f^2}}, \quad (I.12)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$; а значения \arcsin берутся между 0 и $\pi/2$. Так как аргумент у \arcsin не превышает 1, то значения k_2 могут лежать только в интервале $0 \leq k_2 \leq \sqrt{U}$. При этом левая часть уравнения (I.12) — монотонно возрастающая, а правая — монотонно убывающая функция k_2 . Поэтому для существования корня уравнения (I.12) необходимо, чтобы при $k_2 = \sqrt{U}$ правая сторона была меньше левой, т.е. при $E = 0$, что соответствует переходу от дискретного спектра к непрерывному, правая сторона должна быть меньше левой, что приводит к неравенству

$$a\sqrt{U} \geq \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\sqrt{U}(b-a)}{\sqrt{1+U(b-a)^2}}. \quad (I.13)$$

Последнее отвечает рождению по крайней мере одного уровня. Вводя переменную $x = a\sqrt{U}$, неравенство (I.13) перепишем в виде

$$\frac{x(b-a)}{\sqrt{a^2 + x^2}(b-a)^2} \geq \cos x. \quad (I.14)$$

II. Условия рождения солитонов для гармонического пакета

В этом разделе мы применим условие рождения одного дискретного уровня (I.14) в качестве критерия рождения солитона при распаде импульса нулевой площади, аппроксимируемого потенциалом, изученным выше.

Рассмотрим гармонический пакет

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < -\pi/k \\ A \sin kx, & -\frac{\pi}{k} \leq x \leq \frac{\pi}{k} \\ 0, & x > \pi/k \end{cases} \quad (2.1)$$

В качестве аппроксимации выберем условие равенства площадей ям или горбов для соответствующих импульсов (рис.2):

$$S = Ua = 2A \int_0^{3/2k} \sin kx dx = \frac{2A}{k}.$$

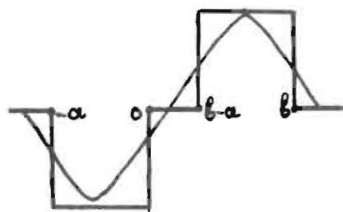


Рис.2

Отсюда, принимая во внимание, что $b = \frac{\pi}{k}$, получим для ширины ямы выражение

$$a = x^2 \frac{k}{2A}, \quad (2.2)$$

где $x = a\sqrt{U}$. Подставляя соответствующие значения a и b в неравенство (I.14), получим

$$\frac{\alpha^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + (\alpha^2 - x^2)^2}} \geq \cos x, \quad (2.3)$$

где $\alpha^2 = 2\pi \frac{A}{k^2}$. Легко видеть, что при $\alpha \geq \frac{\pi}{2}$ неравенство (2.3) выполняется для любых x , а при $\alpha < 1$ не выполняется ни при каких x . Отсюда получаем, что при $A \geq 0,3925 k^2$ всегда возможно рождение хотя бы одного солитона, а при $A < 0,159 k^2$ рождение солитонов невозможно.

Соответствующие области I и II изображены на рис.3 (крестики соответствуют рождению солитона, точки - нет). Приведенные результаты численного эксперимента, полностью укладывающиеся в рамки настоящего предсказания, свидетельствуют о хорошем выборе аппроксимации гармонического импульса по площади.

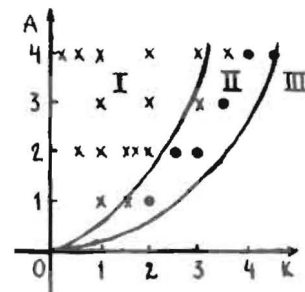


Рис.3

III. Условия рождения солитона для гауссова пакета

Теперь мы рассмотрим начальный импульс, задаваемый уравнением

$$u(x) = \begin{cases} A x e^{-k^2 x^2}, & -b \leq x \leq b \\ 0, & |x| \rightarrow \pm \infty. \end{cases} \quad (3.1)$$

Аппроксимируем его, как и в предыдущем разделе, прямоугольным потенциалом (I.2) (см.рис.4).

Условие равенства площадей дает

$$S = aU = 2A \int_0^{\infty} x e^{-k^2 x^2} dx = \frac{2A}{k^2}, \quad (3.2)$$

из которого, при использовании определения $x = \sqrt{U} \cdot a$, следует

$$a = x^2 \frac{2k^2}{A}. \quad (3.3)$$

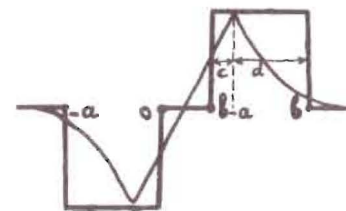


Рис.4

Площадь (3.2) разобьем на две части так, что

$$c = a \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\right), \quad d = \frac{a}{\sqrt{\epsilon}} \quad \text{и} \quad a = c + d. \quad (3.4)$$

Для величины $b - a$, следовательно, имеем

$$b - a = \frac{2}{\kappa\sqrt{2}} - 2x^2 \frac{2\kappa^2}{A} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\right). \quad (3.5)$$

Подставляя (3.5) в неравенство (I.14), получим

$$\frac{\alpha^2 - x^2}{\sqrt{\gamma^2 x^2 + (\alpha^2 - x^2)^2}} \geq \cos x, \quad (3.6)$$

где $\gamma = 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\right)$,

$$\alpha^2 = \frac{A}{2\sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\right) \kappa^3}. \quad (3.7)$$

Переходя к новой переменной $x = \gamma y$ и $\tilde{\alpha} = \alpha/\gamma$, неравенство (3.6) можно привести к виду

$$\frac{\tilde{\alpha}^2 - y^2}{\sqrt{y^2 + (\tilde{\alpha}^2 - y^2)^2}} \geq \cos \gamma y, \quad (3.7)$$

аналогичному изложенному в разделе II. Из неравенства (3.7) следует, что солитоны могут рождаться лишь при $A \geq 2,8 \kappa^3$ и не могут при $A < 0,9 \kappa^3$.

На рис. 5 приводятся разрешенная и запрещенная области рождения солитонов - I и II соответственно.

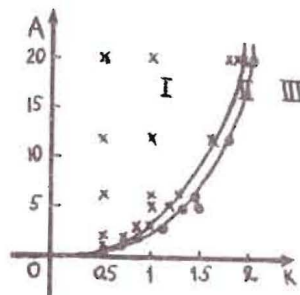


Рис. 5

Приведенные экспериментальные значения: \times - рождение солитона, \bullet - отсутствие солитона хорошо укладываются в соответствующие области и указывают на хорошее приближение при аппроксимации по площади.

В конце этого раздела приведем основные параметры численного моделирования. Для численного интегрирования уравнения КдФ мы использовали следующие дифференциально-разностные схемы:

- а) неявная схема, предложенная Т.Таха и М.Абловитшем^{/1/},
- б) явная схема Н.Забуски и М.Крускала^{/2/}.

В зависимости от амплитуды начальной волны при реализации этих схем мы выбирали следующие параметры: 1) Δx - шаг сетки по координате в интервале от 0,01 до 0,17; 2) Δt - шаг сетки по времени в интервале от 0,00005 до 0,12.

Вычисление интегралов движения уравнения КдФ для начального возмущения и сравнение их с результатами численных расчетов показывает хорошее согласие. Погрешность полученных результатов составляет 3-8%, в зависимости от амплитуды начального пакета.

Эксперименты проводились на ЭВМ БЭСМ-6 и СРС-6500.

Заключение

Сформулируем кратко основные результаты, полученные в данной работе.

1. Распад монохроматической (и квазимонохроматической) волны в рамках уравнения КдФ носит пороговый характер, что следует как из вычислительного эксперимента, так и из рассмотрения решаемых аппроксимаций с помощью МОЗР.

2. Монохроматическая волна распадается на решетку солитонов. В простейшем (околопороговом) случае на каждом периоде волны образуется один солитон. В сильно надпороговом режиме образуется несколько (2,3 и более) солитонов на одном периоде волны. Последняя картина дает наглядное представление поведения некоторых многозонных решений КдФ, не сводящихся к однозонным. Перечисленные эффекты имеют место и для "квазимонохроматического" пакета конечной длины.

3. Время распада начального пакета (и скорость образования из него солитонов) зависит от его амплитуды, причем с хорошей точностью выполняется асимптотический закон $1/\sqrt{\epsilon}$.

Полученные результаты проливают новый свет на возможность генерации солитонов электронным пучком в замагниченном плазменном волноводе^{/3/}.

Литература

1. Zabusky N.J., Kruskal M.D. Phys. Rev. Lett., 1965, 15, 6, p. 240-243
2. Taha T.R., Ablowitz M.J. Clarkson College of Technology. I.F.N.S. preprint No. 16, 1982, Potsdam, New York.
3. Маханьков В.Г., Иванов С.Т. В сб.: Краткие сообщения ОИЯИ, № 8-85, Дубна, 1985, с. 47.
4. Маханьков В.Г., Пашаев О.К., Холмуродов Х.Т. ОИЯИ, P5-85-561, Дубна, 1985.

Рукопись поступила в издательский отдел
19 июля 1985 года.

Маханьков В.Г., Пашаев О.К., Холмуродов Х.Т. P5-85-562
Процесс образования солитонов при распаде монохроматической волны
в рамках уравнения Кортевега - де Фриза.
Теория

Исследована задача о существовании дискретного уровня в потенциальном поле нулевой площади. Показано, что плоскость (A, K) распадается на три области, разделенные в случае гармонического импульса параболой. В области I, левее критической области II, солитоны всегда могут быть сформированы, а в области III, правее критической, они образоваться не могут. Аналогичное утверждение получено для гауссова импульса, но граничные кривые описываются кубическим законом. Приводится сравнение с данными численного моделирования и основные параметры численного интегрирования уравнения Кортевега - де Фриза.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1985

Перевод О.С. Виноградовой

Makhankov V.G., Pashaev O.K., Kholmurodov Kh.T. P5-85-562
Soliton Formation Process in the Decay of Zero-Area Pulses
in the Framework of the KDV Equation.
Theory

The problem of existence of the discrete energy level in a zero-area potential is investigated. It is shown that the (A, K) plane is divided into three regions separated by parabolas in the case of sinusoidal pulses. In the region I, left from the critical region II, the soliton formation is always possible. In the region III the soliton formation is forbidden. The same result has been obtained for the Gaussian pulses but with cubic curves separation. A comparison with numerical experiment data has been made. The basic parameters of computation technique are presented.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1985