

сообщения  
объединенного  
института  
ядерных  
исследований  
дубна

P5-85-561

В.Г.Маханьков, О.К.Пашаев, Х.Т.Холмуродов\*

ПРОЦЕСС ОБРАЗОВАНИЯ СОЛИТОНОВ  
ПРИ РАСПАДЕ МОНОХРОМАТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ  
В РАМКАХ УРАВНЕНИЯ  
КОРТЕВЕГА – ДЕ ФРИЗА.

Численный эксперимент

\*

Таджикский государственный университет, Душанбе

1985

## I. Введение

Исследования нелинейных возмущений и их влияний на динамику и термодинамику физических систем привлекает внимание специалистов из самых разнообразных областей, начиная с чистой математики и кончая сугубо практическими приложениями. При этом вопросом первостепенной важности является, какие фундаментальные моды ответственны за поведение системы в той или иной области изменения параметров и как при этом происходит перестройка динамического режима с образованием новых когерентных структур в духе синергетики <sup>/1/</sup>. Как известно, в недиссипативных системах, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями, устойчивым когерентным образованиям такого типа соответствуют решения в виде солитонов или уединенных волн <sup>/2/</sup>. Наиболее четко разделение фундаментальных мод, соответствующих солитонам и линейным модам, прослеживается в полностью интегрируемых системах, к которым приложим метод обратной задачи рассеяния (МОЗР). Функция Гамильтона таких систем распадается на набор независимых вкладов от дискретного и непрерывного спектров линейной задачи.

Однако остается открытым вопрос о нелинейном спектральном преобразовании произвольного начального пакета; какие моды могут быть возбуждены при его распаде и как они зависят от параметров начального импульса? Ясно, что этот вопрос приобретает особое значение в исследованиях по возбуждению и детектированию солитонов в плазме, в магнитных системах, в нелинейной оптике и т.д. <sup>/2,3/</sup>. В принципе изучение такого вопроса можно проводить в рамках уравнений обратной задачи, однако на этом пути встречаются известные трудности, и задачу удастся решить только для ограниченного класса начальных пакетов. И связано это с тем, что в общем случае  $R \neq 0$  (не чисто солитонный сектор) необходимо решать интегральное уравнение обратной задачи численно. Последнее само по себе не просто в силу некорректности такой задачи (по Тихонову). С другой стороны, информация об интегрируемой системе (высшие интегралы движения, линейная задача и т.д.) может оказаться полезной при разработке приближенной методики описания процесса формирования солитонов с учетом их амплитуды, профиля, времени образования и числа <sup>/4,5/</sup>.

Так, в работе /4/ Карпианом и Соколовым была предложена приближенная методика аналитического исследования динамики образования солитонов из произвольного начального пакета в рамках уравнения Кортевега-де Фриза (КдФ). Для определения амплитуд образовавшихся солитонов авторы использовали высшие интегралы движения уравнения КдФ.

Недостатком их методики является то, что она непосредственно не применима к пакетам  $U(x,t)$  с нулевой площадью:

$$\int_{-\infty}^{\infty} U(x,0) dx = 0. \quad (1.1)$$

Сюда, в частности, входит важнейший с точки зрения приложений класс гармонических волн.

Более того, как было показано в численных расчетах, приведенных в работе /4/, при распаде пакета

$$U(x,0) = Ax e^{-k^2 x^2}, \quad (1.2)$$

также удовлетворяющего условию (1.1), солитоны не рождаются вовсе.

Настоящая работа посвящена численному моделированию процесса распада пакетов нулевой площади в рамках уравнения КдФ

$$U_t + 6UU_x + U_{xxx} = 0 \quad (1.3)$$

двух видов: гармонического и гауссова (1.2).

В разделе II мы покажем, что гармоническая волна на интервале  $[-\frac{\pi}{k}, \frac{\pi}{k}]$  распадается на солитон и волновой шлейф при определенных значениях амплитуды. Приводится сравнение оценки времени формирования солитона с результатами численного эксперимента.

В разделе III показано, что при распаде гармонической волны на интервале  $[-\frac{\pi n}{k}, \frac{\pi n}{k}]$ , где  $n$  — целое число ("n-кратный гармонический импульс"), при определенных значениях амплитуды  $A$  и волнового вектора  $k$  возникает решетка из  $n$  солитонов.

В разделе IV исследуется распад гармонического импульса с фиксированной амплитудой при различных значениях волнового вектора  $k$ . Показано, что при уменьшении  $k$  число рождаемых солитонов увеличивается, причем существует критическое значение  $k_0$ , такое, что при  $k > k_0$  солитоны не рождаются вовсе. Для импульса (1.2) также подходящим изменением амплитуды и волнового вектора сформирован солитон.

Используя линейное представление для уравнения КдФ, исследование задачи о формировании солитона можно свести к задаче о существовании дискретного уровня в одномерном уравнении Шредингера с потенциалом, выбранным подходящим образом. Во второй части работы приводятся результаты таких расчетов, позволяющие с хорошей степенью

точности объяснить численные эксперименты. В разделе I исследована задача о существовании дискретного уровня в потенциальном поле нулевой площади.

В разделе II, используя эти результаты, мы покажем, что плоскость  $(A,k)$  распадается на 3 области, разделенные, в случае гармонического импульса, параболой. В области I — левее критической области II — солитоны всегда могут быть сформированы, а в области III — правее критической — они образоваться не могут. Аналогичное утверждение получено для импульса (1.2) в разделе III, но граничные кривые описываются кубическим законом. Приводится сравнение с данными численного моделирования и основные параметры численного интегрирования уравнения КдФ.

В заключении кратко перечислены основные результаты.

Данная работа была инициирована задачей о генерации солитонов при распаде гармонической волны, возбуждаемой электронным пучком в замагниченном плазменном волноводе /6/.

## II. Распад гармонической волны на конечном интервале

В этом разделе путем численного моделирования исследуется процесс распада гармонического импульса для уравнения КдФ (1.3) с граничными условиями

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} U(x,t) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} U_x(x,t) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} U_{xx}(x,t) = 0.$$

Исходное возмущение, "гармонический импульс", имеет вид

$$U(x,0) = \begin{cases} 0, & x < -\pi/k \\ A \sin kx, & -\pi/k \leq x \leq \pi/k \\ 0, & x > \pi/k \end{cases} \quad (2.1)$$

изображенный на рис. I (а). В процессе вычислений в качестве контроля точности расчетов проверяется выполнение первых трех законов сохранения:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} U dx, \\ I_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} U^2 dx, \\ I_3 &= \int_{-\infty}^{\infty} (2U^3 - U_x^2) dx. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Вычисления проводились при фиксированном значении  $k=1$ , так что при этом для импульса (2.1)  $I_1 = 0$ ,

$$I_2 = -I_3 = \pi A^2.$$

Результаты, полученные при значениях амплитуды  $A=1,2,4$ , приведены в таблицах I-III соответственно.

Таблица I

$A=1$						
$T$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_1^c$	$I_2^c$	$I_3^c$
0	0	4,533	-3,74	-	-	-
3,3	0,0009	4,533	-3,67	-	-	-
4,4	0,0002	4,533	-3,59	3,27	2,02	2,01
5,5	0,003	4,533	-3,43	3,25	2,02	2,00
6,6	0,005	4,533	-3,27	3,23	2,07	1,93

Таблица II

$A=2$						
$T$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_1^c$	$I_2^c$	$I_3^c$
0	0	12,40	-12,56	-	-	-
0,4	0,0039	12,39	-12,19	-	-	-
0,8	0,001	12,38	-12,38	-	-	-
1,0	0,001	12,41	-12,74	4,03	5,95	15,0
1,2	0,01	12,39	-13,18	4,02	5,93	15,1

Таблица III

$A=4$						
$T$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_1^c$	$I_2^c$	$I_3^c$
0	0	49,60	-50,20	-	-	-
0,25	0,00002	49,60	-46,67	7,31	23,37	146,84
0,45	0,0003	49,60	-46,32	7,42	23,36	146,62
0,75	0,001	49,63	-46,39	7,58	23,37	147,07
0,95	0,001	49,59	-46,7	7,52	23,34	147,9

Три этапа процесса формирования солитона из начального импульса (2.1) для амплитуды  $A=4$  приведены на рис. I (а-в). Если условно разбить начальное возмущение рис. I (а) на отрицательную и положительную части (яма и горб), то, как видно из рис. I (а-в), влияние дисперсии и нелинейного укручения приводит к развалу ямы на непрерывно-осциллирующий шлейф и к формированию солитона из горба. Ввиду того,

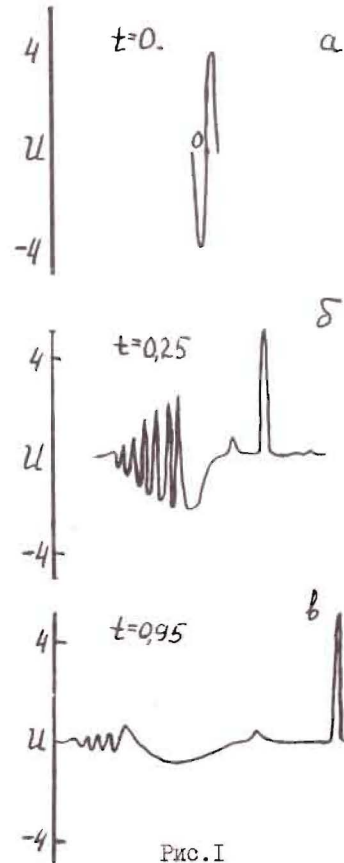


Рис. I

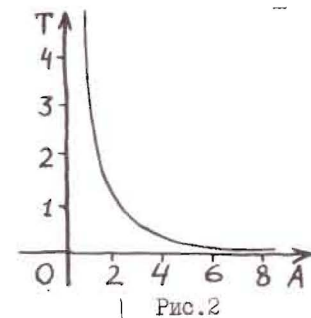


Рис. 2

что скорость солитона всегда больше 1, а скорость шлейфа меньше 1, происходит их разделение, в результате которого в рассматриваемой системе отсчета, движущейся с единичной скоростью, непрерывный фон движется в левую сторону, а солитон в правую.

Из таблиц I-III видно, что время формирования солитона существенно зависит от амплитуды  $A$  начального импульса. При увеличении амплитуды от 1 до 4 время формирования уменьшается с 4,5 до 0,3. График зависимости времени формирования солитона от амплитуды начального импульса приведен на рис. 2. Этот результат находится в хорошем соответствии с аналитической оценкой асимптотического поведения произвольного начального пакета уравнения КдФ в рамках МОЗР. Действительно, асимптотическая формула для распада начального возмущения в бессолитонном секторе фазового пространства имеет вид [7]:

$$u(x,t) = \frac{\text{const}}{\sqrt{t}} (\varphi(\xi) e^{-i\omega t} + \text{к.с.}), \quad (3.2)$$

где  $\xi^2 = -x/12t$ , а функция  $\varphi(\xi)$  выражается через начальные данные.

Отсюда видно, что произвольное начальное возмущение асимптотически стремится к чисто непрерывному спектру по закону  $1/\sqrt{t}$ . По этому же закону, оказывается, происходит отделение солитона от непрерывно-осциллирующего хвоста, движущегося в отрицательном направлении оси  $x$ . Однако большая относительная скорость солитона и хвоста приводит к более быстрому освобождению его от последнего. В таблицах I-III значения интегралов  $I_1^c$  вычислялись на формирующемся солитоне.

### III. Формирование решетки солитонов из $n$ -кратного гармонического импульса

Теперь мы рассмотрим изменение числа рождаемых солитонов в зависимости от числа периодических продолжений гармонического импульса (2.1). Начальный импульс вида

$$u(x,0) = \begin{cases} 0, & x < -n\frac{\pi}{k} \\ A \sin kx, & -n\frac{\pi}{k} \leq x \leq n\frac{\pi}{k}, \\ 0, & x > n\frac{\pi}{k} \end{cases} \quad (3.1)$$

$n$  - целое число

мы будем называть " $n$ -кратным гармоническим пакетом". Расчеты проводились для гармонических импульсов кратности  $n=2,3,5$  с амплитудой  $A=4$  и волновым вектором  $k=1$ .

В результате неустойчивости, как и в случае кратности  $n=1$ , рассматриваемый пакет распадается на солитоны и непрерывный фон. Причем число образовавшихся солитонов равно кратности гармонического импульса (см. рис. 3 (а-в)), а амплитуды солитонов равны друг другу. Ясно, что в общем случае распад гармонического импульса кратности  $n$  при тех же значениях  $A$  и  $k$  приводит к образованию решетки из  $n$  солитонов с ярко выраженными амплитудами. Отметим, что амплитуда образовавшихся солитонов с ростом кратности распадающейся волны изменяется (слабо увеличивается). Этот эффект имеет простое (квантово-механическое) объяснение и связан с тем, что солитон уравнения (1.1) описывается безотражательным потенциалом уравнения Шредингера. Поэтому решетка солитонов описывается совокупностью  $n$ -потенциальных ям. При этом эффект квантово-механического туннелирования между ямами приводит к понижению уровня энергии каждой ямы.

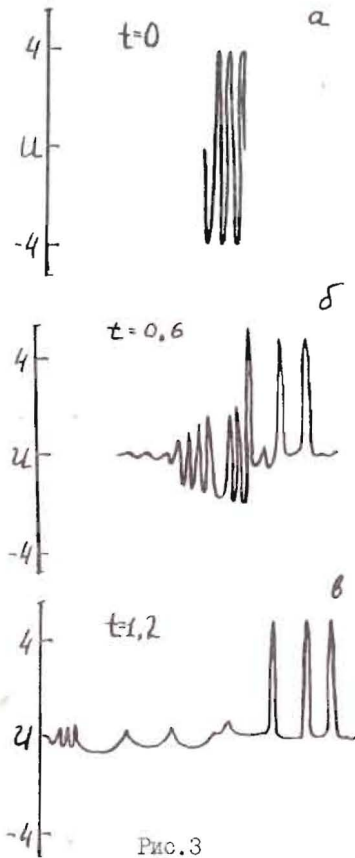


Рис. 3

### IV. Солитонная решетка из однократного гармонического импульса

Рождение солитонов числом  $n > 1$  возможно также и из однократного гармонического импульса (2.1) при уменьшении волнового вектора  $k$ . Из рис. 4 (а-б) видно, что при распаде импульса (2.1) (см. рис. 1 (а)) с амплитудой  $A=4$  и волновым вектором  $k=0,2$  возникает целый набор солитонов с различными амплитудами (в отличие от решетки солитонов для  $n$ -кратного импульса из предыдущего раздела). Отметим, что изменение волнового вектора приводит лишь к незначительному изменению коэффициента в асимптотической формуле (3.2), но закон  $1/\sqrt{t}$  остается в силе. На рис. 5 показана зависимость от времени максимальных значений амплитуд в солитонном и бессолитонном секторах ( $A_{\max}^{(c)}$ ,  $A_{\max}^{(s)}$ ) при значениях  $k_1=0,5$  и  $k_2=2$  и  $A=4$ . При увеличении волнового вектора  $k$  и фиксированной амплитуде наступает момент, начиная с которого солитоны не рождаются вовсе. Пример такого режима приведен на рис. 6 (а-б) при  $A=4$ ,  $k=5$ .

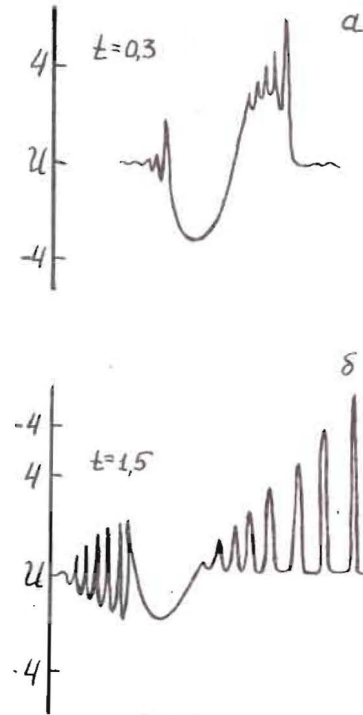


Рис. 4

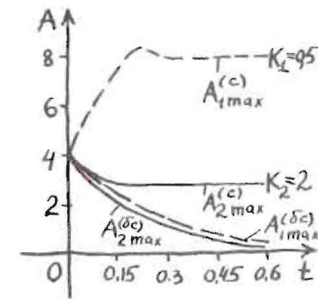


Рис. 5

Наличие бессолитонного и солитонного режимов характерно и для других импульсов с нулевой площадью (1.1). Действительно, приведенные в книге Лэма [5] результаты эволюции начального импульса (1.2) указывают на существование бессолитонного режима для значений параметров  $k=1$  и  $A=1$ .

В то же время результаты численных расчетов с импульсом (1.2) при значениях  $A=\{0,6,0,8,1,2\}$  и  $k=\{0,5,1\}$  указывают на наличие солитонного режима. На рис. 7 (а-в) приведен пример образования солитонов из начального импульса (1.2) при  $k_1=0,5$  и  $k_2=1$ . Как и в случае гармонического импульса, число солито-

нов растет с уменьшением  $k$ . Характер асимптотического режима для импульса (1.2) также аналогичен гармоническому случаю (рис. 8).

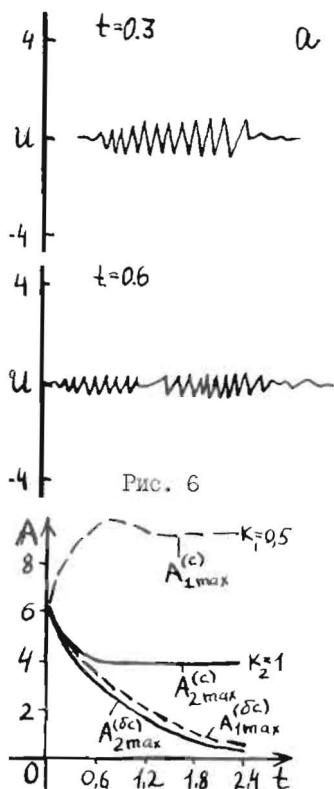


Рис. 6

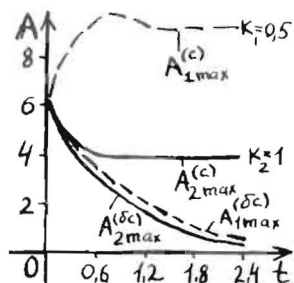


Рис. 8

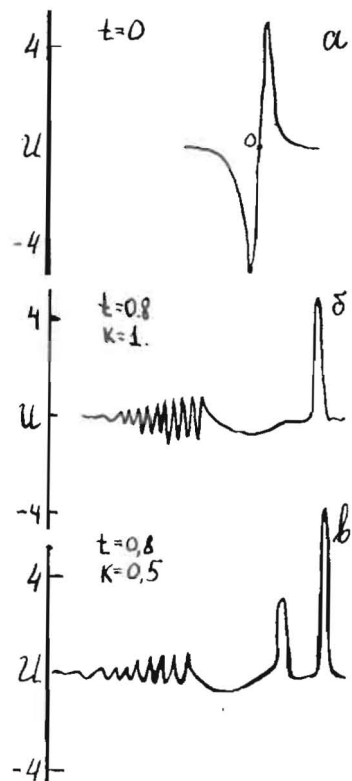


Рис. 7

ЛИТЕРАТУРА

1. Хакен Г. Синергетика. "Мир", М., 1980.
2. а) Буллаф Р., Кодри Ф. Солитоны. "Мир", М., 1983.  
б) Лонгрен К., Скотт Э. Солитоны в действии. "Мир", М., 1981.
3. а) Косевич А.М. и др. Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны. "Наукова думка", Киев, 1983.  
б) Makhankov V.G. Phys. Rep. 1978, 35, p. 1-128.  
в) Давыдов А.С. Солитоны в молекулярных системах. "Наукова думка", Киев, 1984.
4. а) Березин Ю.А., Карпман В.И. ЖЭТФ, 1966, 51, 5, с. 1557.  
б) Карпман В.И., Соколов В.П. ЖЭТФ, 1968, 54, 5, с. 1568.
5. Лэм Дж.. Введение в теорию солитонов. "Мир", М., 1983.
6. Маханьков В.Г., Иванов С.Т. В сб.: Краткие сообщения ОИЯИ, № 8-85, Дубна, 1985, с.47.
7. Захаров В.Е. и др. Теория солитонов. Метод обратной задачи рассеяния. "Наука", М., 1980.

Рукопись поступила в издательский отдел  
19 июля 1985 года.

Маханьков В.Г., Пашаев О.К., Холмуродов Х.Т. P5-85-561  
Процесс образования солитонов при распаде монохроматической волны  
в рамках уравнения Кортевега - де Фриза.  
Численный эксперимент

Приводятся результаты численного моделирования процесса распада двух видов пакетов нулевой площади в рамках уравнения Кортевега - де Фриза - гармонического и гауссова. Показано, что гармоническая волна на конечном интервале распадается на солитон и волновой шлейф при определенных значениях амплитуды. Приводится сравнение оценки времени формирования солитона с результатами численного эксперимента. При распаде гармонической волны на интервале  $[-n \frac{\pi}{k}, n \frac{\pi}{k}]$  возникает решетка солитонов. Показано, что при уменьшении вектора  $k$  число рождаемых солитонов увеличивается.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1985

Перевод О.С.Виноградовой

Makhankov V.G., Pashaev O.K., Kholmurodov Kh.T. P5-85-561  
Soliton Formation Process in the Decay of Zero-Area Pulses  
in the Framework of the KdV Equation.  
Numerical Experiment

The results of numerical studies of the decay processes of zero-area pulses in the framework of the KdV model are presented. It is shown that harmonical and Gaussian wave packets with definite amplitudes decay into solitons and an oscillating tail. The evaluation of soliton formation time based on the results of computer simulations has been made. The harmonical wave breaks into a soliton lattice in the interval  $[-n \frac{\pi}{k}, n \frac{\pi}{k}]$ . It is shown that the number of produced solitons decreases with wave number  $k$  increasing.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.