сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P5-85-505

В.С.Герджиков*, А.Б.Яновски

ПОРОЖДАЮЩИЙ ОПЕРАТОР И ЛОКАЛЬНОСТЬ ПЛОТНОСТЕЙ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ. СИСТЕМА ЗАХАРОВА - ШАБАТА

* Институт ядерных исследований
и ядерной энергетики БАН, София

1985

Теория порождающего оператора занимает особое место в методе обратной задачи рассеяния /МОЗР/. Начало этой теории было положено в работе /1/ на примере линейной задачи Захарова - Шабата:

$$L(q,\lambda)\psi = 0,\quad L(q,\lambda) = i\frac{d}{dx} - \lambda\sigma_3 - q,$$

$$q = \begin{pmatrix} 0 & q_+(x) \\ q_-(x) & 0 \end{pmatrix},\quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \qquad /1/$$

q - коэффициентная функция, λ - спектральный параметр. Там же впервые отмечено, что МОЗР для системы /1/ может быть интерпретирован как обобщенное преобразование Фурье. Впоследствии метод был обобщен на более сложные системы, а также был обоснован более строго /2-4/. Следует также отметить красивый геометрический смысл этой теории /5-6/. Наиболее важные объекты, связанные с МОЗР для системы /1/, такие, как набор интегрируемых уравнений, серия законов сохранения для них, иерархия симплектических структур, находят свое естественное описание в рамках теории порождающего оператора /Λ - оператора/.

В связи с попытками дать калибровочно-ковариантную формулировку этого метода /7/ возникает необходимость доказательства локальности плотностей законов сохранения, получаемых при помощи Λ- оператора. /Существование серий локальных плотностей хорошо известно - см., например, /8/ /. Наша заметка посвящена именно этому вопросу для случая задачи /1/.

Перечислим нужные нам факты из теории порождающего оператора, которые подробно обсуждаются в работах, упомянутых выше.

1. Набор точно решаемых эволюционных уравнений, связанных с /1/, имеет вид

$$\frac{1}{4}[\sigma_3, q_t] + \Lambda_+^N q = 0, \qquad /2/$$

где N - натуральное число, а порождающий оператор Λ_+ задается формулой

$$\Lambda_+ = \frac{i}{4}[\sigma_3, \frac{d}{dx}\,\cdot\,] - iq\int_{+\infty}^{x}\langle\sigma_3, [q,\,\cdot\,]\rangle\,dy. \qquad /3/$$

Здесь и ниже через $\langle\ ,\ \rangle$ мы будем обозначать форму Киллинга алгебры $sl(2,\mathbf{C})$: $\langle p,q\rangle = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,pq$, $p,q\in sl(2,\mathbf{C})$.

2. Иерархия плотностей законов сохранения для уравнений /2/ выражается через Λ_+ - оператор следующим образом:

$$\rho_N(x) = \int_{+\infty}^{x} \langle \sigma_3,\ [q, \Lambda_+^N q]\rangle\, dy . \qquad /4/$$

Отсюда видно, что вопрос о локальности уравнений /2/ и плотностей /4/ сводится к доказательству того, что выражения

$$\eta_N = \langle \sigma_3, [q, \Lambda_+^N q]\rangle \qquad /5/$$

являются полными производными по x от локальных функций q.

Замечание. Можно показать /см.[3]/, что те же самые уравнения и плотности можно получить, если использовать вместо Λ_+ другой оператор – Λ_-,

$$\Lambda_- = \frac{i}{4}[\sigma_3, \frac{d}{dx}\cdot\,] - iq\int_{-\infty}^{x} \langle\sigma_3, [q, \cdot\,]\rangle\, dy. \qquad /6/$$

Объяснение этого факта является дополнительной мотивировкой интереса к локальности плотностей ρ_N.

Отметим, что результаты 1-2 получены в предположении, что комплексные функции $q_\pm(x)$ убывают на бесконечности быстрее любой степени x, т.е. являются функциями типа Шварца.

Прежде чем перейти к доказательству, приведем величины η_N к более удобному виду. Для этого заметим, что Λ_+ можно представить как сумму двух операторов $\hat\partial$ и I,

$$\hat\partial = \frac{i}{4}[\sigma_3, \frac{d}{dx}\cdot\,], \quad I = -iq\int_{+\infty}^{x} \langle\sigma_3, [q, \cdot\,]\rangle\, dy . \qquad /7/$$

Очевидно, $I^2 = 0$, $I(q) = 0$, и, кроме того, $\langle\sigma_3, [q, I(p)]\rangle = 0$. Далее воспользуемся тем, что, если a и b суть произвольные операторы, то для любого натурального N имеет место формула

$$(a+b)^N = \sum_{k=0}^{N}\ \sum'_{\alpha_0+\dots+\alpha_k = N-k,\ \alpha_i \ge 0} a^{\alpha_0} b a^{\alpha_1} b \dots b a^{\alpha_k} \qquad /8/$$

Штрих над знаком суммы обозначает, что суммирование ведется по всем выборкам с повторениями из элементов $0,1,\dots N$ с условием $\alpha_0 + \dots + \alpha_k = N-k$. Далее подобные суммы будут также отмечаться штрихом.

Применим формулу /8/ для случая $a = \hat\partial$, $b = I$. Тогда, учитывая свойства оператора I, легко видеть, что

$$\eta_N = \sum_{k=0}^{N}\ \sum'_{\alpha_0+\dots+\alpha_k = N-k,\ \alpha_i \ge 1} \langle\sigma_3, [q, \hat\partial^{\alpha_0} I\hat\partial^{\alpha_1} \dots I\hat\partial^{\alpha_k} q]\rangle . \qquad /9/$$

Опуская нулевые члены, имеем окончательно

$$\eta_{2\ell} = \sum_{k=0}^{\ell-1}\ \sum'_{\alpha_0+\dots+\alpha_k = 2\ell-k,\ \alpha_i \ge 1} \langle\sigma_3, [q, \hat\partial^{\alpha_0} I\hat\partial^{\alpha_1} \dots I\hat\partial^{\alpha_k} q]\rangle . \qquad /10/$$

$(\ell = 1, 2, \dots)$

$$\eta_{2\ell+1} = \sum_{k=0}^{\ell}\ \sum'_{\alpha_0+\dots+\alpha_k = 2\ell+1-k,\ \alpha_i \ge 1} \langle\sigma_3, [q, \hat\partial^{\alpha_0} I\hat\partial^{\alpha_1} \dots I\hat\partial^{\alpha_k} q]\rangle . \qquad /11/$$

$(\ell = 0, 1, \dots)$.

Предложение

Величины $A(N, k) = \sum'_{\alpha_0+\dots+\alpha_k = N,\ \alpha_i \ge 1,\ N > k} \langle\sigma_3, [q, \hat\partial^{\alpha_0} I\hat\partial^{\alpha_1} \dots I\hat\partial^{\alpha_k} q]\rangle$ являются полными производными по x от локальных функций типа Шварца.

С целью упрощения изложения будем говорить, что две скалярные функции $F(q)$ и $G(q)$ эквивалентны $/F \sim G/$, если их разность есть производная по x от локальной функции типа Шварца. В таких обозначениях предложение означает, что $A(N, k) \sim 0$.

Доказательство будем вести методом индукции по номеру k.

1. $k = 0$. Мы должны показать, что для любого натурального α $\langle\sigma_3, [q, \hat\partial^\alpha q]\rangle \sim 0$. Воспользуемся тождеством

$$\langle\sigma_3, [f, \hat\partial g]\rangle = -\frac{i}{4}\langle f, g\rangle_x - \langle\sigma_3, [\hat\partial f, g]\rangle . \qquad /12/$$

/Здесь и ниже мы предполагаем, что f и g принадлежат линейному пространству S_σ – функций Шварца со значениями в векторном пространстве антидиагональных матриц над $\mathbb{C}$/. Если f, g – локальные функции, то из /12/ следует, что $\langle\sigma_3, [f, \hat\partial g]\rangle \sim -\langle\sigma_3, [\hat\partial f, g]\rangle$. Имеем $\langle\sigma_3, [q, \hat\partial^\alpha q]\rangle \sim -\langle\sigma_3, [\hat\partial q, \hat\partial^{\alpha-1} q]\rangle \sim \dots \sim \langle\sigma_3, [\hat\partial^\alpha q, q]\rangle = -\langle\sigma_3, [q, \hat\partial^\alpha q]\rangle$. Следовательно, $\langle\sigma_3, [q, \hat\partial^\alpha q]\rangle \sim 0$.

2. Индуктивный шаг $k \to k+1$.

Нам потребуется еще одно легко проверяемое тождество:

$$\langle\sigma_3, [f, \hat\partial^\alpha I g]\rangle = -\frac{i}{4}\frac{d}{dx}\Big\{\sum_{\mu=0}^{\alpha-1}\langle\hat\partial^\mu f, \hat\partial^{\alpha-1-\mu} g\rangle\Big\} +$$

$$+ i\frac{d}{dx}\Big\{\Big(\int_{-\infty}^{x}\langle\sigma_3, [q, \hat\partial^\alpha f]\rangle dy\Big)\Big(\int_{-\infty}^{x}\langle\sigma_3, [q, g]\rangle dy\Big)\Big\} + \langle\sigma_3, [I\hat\partial^\alpha f, g]\rangle . \qquad /13/$$

Из /13/ следует, что, если $\langle\sigma_3, [q, \hat\partial^\alpha f]\rangle \sim 0$ и $\langle\sigma_3, [q, g]\rangle \sim 0$, то $\langle\sigma_3, [f, \hat\partial^\alpha I g]\rangle \sim \langle\sigma_3, [I\hat\partial^\alpha f, g]\rangle$.

Пусть $A(M, s) \sim 0$ для любого M и для $s = 0, 1, \dots, k$. Рассмотрим

$$A(M, k+1) = \sum_{\alpha_0+\dots+\alpha_{k+1} = M,\ \alpha_i \ge 1} \langle\sigma_3, [q\hat\partial^{\alpha_0} I \dots I\hat\partial^{\alpha_{k+1}} q]\rangle =$$

$$= \sum_{\alpha_0=1}^{M-k-1}\langle\sigma_3, [q, \hat\partial^{\alpha_0} I(\sum'_{\alpha_1+\dots+\alpha_{k+1} = M-\alpha_0} \hat\partial^{\alpha_1} I \dots I\hat\partial^{\alpha_{k+1}} q)]\rangle . \qquad /14/$$

Согласно индуктивному предположению, $\langle \sigma_3, [q, \hat\partial^{\alpha_1} q]\rangle \sim 0$ и

$$\sum'_{\alpha_1+\dots+\alpha_{k+1}=M-\alpha_0} \langle \sigma_3, [q, \hat\partial^{\alpha_1} I \dots I \hat\partial^{\alpha_{k+1}} q]\rangle \sim 0.$$

Используя /13/, находим, что

$$A(M,k+1) \sim \sum_{\alpha_0=1}^{M-(k+1)} \sum'_{\alpha_1+\dots+\alpha_{k+1}=M-\alpha_0,\, \alpha_i\ge1} \langle\sigma_3, [I\hat\partial^{\alpha_0} q, \hat\partial^{\alpha_1} I\dots I\hat\partial^{\alpha_{k+1}} q]\rangle$$

$$= \sum'_{\alpha_0+\dots+\alpha_{k+1}=M,\, \alpha_i\ge1} \langle\sigma_3, [I\hat\partial^{\alpha_0} q, \hat\partial^{\alpha_1} I\dots I\hat\partial^{\alpha_{k+1}} q]\rangle. \qquad /15/$$

Снова используя индуктивное предположение и тождество /13/, мы передвинем налево еще одну пару $\hat\partial I$, т.е. получим, что

$$A(M,k+1) \sim \sum'_{\alpha_0+\dots+\alpha_{k+1}=M,\, \alpha_i\ge1} \langle\sigma_3, [I\hat\partial^{\alpha_1} I\hat\partial^{\alpha_0} q, \hat\partial^{\alpha_2} I\dots I\hat\partial^{\alpha_{k+1}} q]\rangle.$$

Через k + 1 шагов приходим к следующему результату:

$$A(M,k+1) \sim \sum'_{\alpha_0+\dots+\alpha_{k+1}=M,\, \alpha_i\ge1} \langle\sigma_3, [I\hat\partial^{\alpha_k} I\dots I\hat\partial^{\alpha_0} q, \hat\partial^{\alpha_{k+1}} q]\rangle =$$

$$= -\sum_{\alpha_{k+1}=1}^{M-(k+1)} \langle\sigma_3, [\hat\partial^{\alpha_{k+1}} q, I(\sum'_{\alpha_0+\dots+\alpha_k=M-\alpha_{k+1},\, \alpha_i>1} \hat\partial^{\alpha_k} I\dots I\hat\partial^{\alpha_0} q)]\rangle. \qquad /16/$$

Однако по предположению второй член в коммутаторе локален. Поэтому, используя многократно тождество /12/, имеем

$$A(M,k+1) \sim -\sum_{\alpha_{k+1}=1}^{M-(k+1)} \langle\sigma_3, [q, \hat\partial^{\alpha_{k+1}} I(\sum'_{\alpha_0+\dots+\alpha_k=M-\alpha_{k+1}} \hat\partial^{\alpha_k} I\dots I\hat\partial^{\alpha_0} q)]\rangle$$

$$= -\sum'_{\alpha_0+\dots+\alpha_{k+1}=M} \langle\sigma_3, [q, \hat\partial^{\alpha_{k+1}} I\dots I\hat\partial^{\alpha_0} q]\rangle = -A(M,k+1). \qquad /17/$$

Следствие 1. Плотности законов сохранения ρ_N /см.[4] / являются локальными функциями q.

Действительно, $\rho_N = \int_{+\infty}^{x} \eta_N\, dy$, а, согласно /10-11/, η_N есть сумма членов, для каждого из которых выполняется условие предложения.

Следствие 2. Иерархия нелинейных эволюционных уравнений /2/ локальна.

В заключение скажем несколько слов о калибровочных преобразованиях задачи /1/ и о том, как эти преобразования влияют на иерархию уравнений /2/ и на законы сохранения $\int_{-\infty}^{+\infty}\rho_N(x)\,dx$.

Пусть $\psi_0(x)$ -неособая матрица 2×2, дифференцируемая по x. Калибровочное преобразование задачи /1/ определяется как $L \to \tilde L = \psi_0^{-1} L\, \psi_0$, и, очевидно,

$$\tilde L = i\frac{d}{dx} - \lambda(\psi_0^{-1}\sigma_3\psi_0) - \psi_0^{-1} q\psi_0 + i\psi_0^{-1}\psi_{0x} \qquad /18/$$

Как показано в [7], порождающий оператор Λ_+ для задачи $\tilde L\tilde\psi=0$ можно определить из требования

$$\tilde\Lambda_+(\psi_0^{-1} p\,\psi_0) = \psi_0^{-1}\Lambda_+(p)\,\psi_0, \quad p\in \mathcal{S}_\sigma. \qquad /19/$$

Ввиду этого иерархия уравнений /2/ переходит в

$$\frac14\psi_0^{-1}[\sigma_3, q_t]\,\psi_0 + \tilde\Lambda_+^N(\psi_0^{-1}q\psi_0)=0. \qquad /20/$$

Вопрос о явном вычислении этих уравнений связан с возможностью вычислить величины $\psi_0^{-1}[\sigma_3,q_t]\psi_0$ и $\psi_0^{-1}q\,\psi_0$ через новые коэффициентные функции, которые вводятся в /18/. Что касается формул для плотностей законов сохранения, то ввиду инвариантности формы Киллинга при преобразованиях подобия имеем

$$\tilde\eta_N = \eta_N = \langle\psi_0^{-1}\sigma_3\psi_0, [\psi_0^{-1}q\,\psi_0, \psi_0^{-1}\Lambda_+^N(q)\,\psi_0]\rangle =$$

$$= \langle\psi_0^{-1}\sigma_3\psi_0, [\psi_0^{-1}q\,\psi_0, \tilde\Lambda_+^N(\psi_0^{-1}q\,\psi_0)]\rangle. \qquad /21/$$

Нетрудно видеть, что имеет место

Следствие 3. Если величины $\psi_0^{-1}\sigma_3\psi_0$, $\psi_0^{-1}q\,\psi_0$ выражаются локально через новые коэффициентные функции, то плотности $\int_{+\infty}^{x}\tilde\eta_N\, dy$ локальны.

В частности, хорошо известно, что иерархия уравнений /2/ калибровочно-эквивалентна иерархии высших уравнений Гейзенберга /см.[7] /. Так как в этом случае условия следствия выполнены, то,таким образом,доказана локальность калибровочно-преобразованной серии плотностей законов сохранения.

Авторы благодарят профессора В.Г.Маханькова за поддержку и интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ablowitz M.J. et al. Stud.Appl.Math., 1974, 53, p.249.
2. Герджиков В.С., Христов Е.Х. Мат.заметки, 1980, 28, № 4, с.501.
3. Герджиков В.С., Христов Е.Х. ОИЯИ Е2-12-742, Дубна, 1979.
4. Gerdjokov V.S., Kulish P.P. Physica D,1981,D3, p.549.
5. Margi F. Lecture Notes in Physics, 1980, 120, p.239.
6. Florko B., Yanovski A. JINR, E5-83-813, Dubna, 1983.
7. Gerdjikov V.S., Yanovski A.B. Phys.Lett.,1984, 103A, p.232.
8. Дринфельд В.Г., Соколов В.В. Итоги науки и техники. Совр.пробл.мат. Новейшие достижения, ВИНИТИ, М., 1984, 24, с.81.

Рукопись поступила в издательский отдел
2 июля 1985 года

В Объединенном институте ядерных исследований начал выходить сборник *"Краткие сообщения ОИЯИ"*. В нем будут помещаться статьи, содержащие оригинальные научные, научно-технические, методические и прикладные результаты, требующие срочной публикации. Будучи частью "Сообщений ОИЯИ", статьи, вошедшие в сборник, имеют, как и другие издания ОИЯИ, статус официальных публикаций.

Сборник "Краткие сообщения ОИЯИ" будет выходить регулярно.

The Joint Institute for Nuclear Research begins publishing a collection of papers entitled *JINR Rapid Communications* which is a section of the JINR Communications and is intended for the accelerated publication of important results on the following subjects:

Physics of elementary particles and atomic nuclei.
Theoretical physics.
Experimental techniques and methods.
Accelerators.
Cryogenics.
Computing mathematics and methods.
Solid state physics. Liquids.
Theory of condensed matter.
Applied researches.

Being a part of the JINR Communications, the articles of new collection like all other publications of the Joint Institute for Nuclear Research have the status of official publications.

JINR Rapid Communications will be issued regularly.