

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P5-85-482

И. Л. Боголюбский

ТРЕХМЕРНЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СОЛИТОНЫ
НА РЕШЕТКЕ

1985

При исследовании физики конденсированных сред и элементарных частиц часто возникают нелинейные математические модели, в которых независимым переменным является N -компонентный единичный вектор \vec{s} , $\sum_{a=1}^N s_a^2 = 1$, определенный в D -мерном пространстве. Принципиальным является вопрос о существовании в рамках этих моделей локализованных решений-солитонов, а также их устойчивости. В трехмерном ($D=3$) пространстве изучались, например, солитоны в сверхтекучих фазах He^3 ($N=3,4$) ^{/1/} и ферромагнетиках ($N=3$) ^{/2/}, причем как имеющие нулевой топологический заряд (динамические, или нетопологические, солитоны), так и отличный от нуля (топологические солитоны). Наличие ненулевого топологического заряда дает дополнительный механизм возможного существования устойчивых многомерных солитонов (см. обзорную лекцию ^{/3/}). Однако в важном для приложений случае $D=3$, $N=3$ топологические солитоны до настоящего времени не получены (вопрос об их существовании поднят в работах ^{/1,4/}, что, по-видимому, объясняется отсутствием в этом случае удобной постановки, позволяющей понизить размерность решаемой задачи.

2. Наличие топологического заряда еще не обеспечивает существования солитона, а в случае существования - его устойчивости. Например, система, описываемая гамильтонианом с плотностью \mathcal{H} :

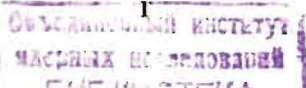
$$E = \int \mathcal{H} d^3x, \quad \mathcal{H} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \vec{s}}{\partial x_m} \right)^2, \quad m = 1, 2, 3, \quad (1)$$

$$\vec{s} = (s_1, s_2, s_3), \quad \vec{s}^2 = 1,$$

не имеет локализованных минимумов энергии при любой величине топологического заряда ^{/5/}. Далее, отметим, что в изотропном ферромагнетике, определяемом тем же гамильтонианом (1), наличие интеграла движения ^{/2/}

$$S_z = \int (1 - s_z) d^3x \quad (2)$$

само по себе не может гарантировать существования и устойчивости солитонов, аналогично тому, как наличие заряда у нелинейного комплексного скалярного поля не является достаточным для существования устойчивых солитонов ^{/6,7,8,2/}. В качестве конкретного примера отметим, что в изотропном ферромагнетике Гейзенберга ($D=3$) не существует сферически-симметричных нетопологических солитонов без особенностей, ни стационарных, ни прецессирующих с какой-либо частотой (см. ^{/2/}).



Таким образом, существует потребность в разработке вычислительных методов получения топологических солитонов в моделях типа (I).

3. Рассмотрим систему с плотностью гамильтониана

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left[\alpha \left(\frac{\partial \vec{s}}{\partial x_m} \right)^2 + \beta (\Delta \vec{s})^2 \right], \quad \alpha, \beta > 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_m^2} \quad (3)$$

при $D=3$. Выполняя масштабное преобразование $\vec{s}(x) \rightarrow \vec{s}(ax)$, легко понять, что система (3) может иметь устойчивые трехмерные солитоны.

Перейдем от непрерывной модели (3) к модели спинов в узлах кубической решетки. Эти узлы будем нумеровать целыми числами i, j, k по осям x_1, x_2, x_3 (x, y, z) соответственно; будем считать, что расстояние между ближайшими узлами $a=1$. Заменяем производные в (3) конечными разностями, например,

$$\frac{\partial \vec{s}}{\partial x} \cong \vec{s}_{i+1, j, k} - \vec{s}_c, \quad (s_c = s_{i, j, k}) \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{s}}{\partial x^2} \cong \vec{s}_{i+1, j, k} - 2\vec{s}_c + \vec{s}_{i-1, j, k}.$$

В возникающей при этом вместо интеграла $E = \int \mathcal{H} d^3x$ бесконечной сумме перегруппируем члены, заменяя

$$\begin{aligned} \vec{s}_{i+1, j, k} \cdot \vec{s}_{i-1, j, k} &\rightarrow \frac{1}{2} \vec{s}_c \cdot (\vec{s}_{i+2, j, k} + \vec{s}_{i-2, j, k}), \\ \vec{s}_{i, j+1, k} \cdot \vec{s}_{i, j-1, k} &\rightarrow \frac{1}{2} \vec{s}_c \cdot (\vec{s}_{i, j+2, k} + \vec{s}_{i, j-2, k}), \\ \vec{s}_{i, j, k+1} \cdot \vec{s}_{i, j, k-1} &\rightarrow \frac{1}{2} \vec{s}_c \cdot (\vec{s}_{i, j, k+2} + \vec{s}_{i, j, k-2}), \\ \vec{s}_{i, j-1, k} \cdot \vec{s}_{i-1, j, k} &\rightarrow \vec{s}_c \cdot \vec{s}_{i-1, j+1, k}, \\ \vec{s}_{i+1, j, k} \cdot \vec{s}_{i, j+1, k} &\rightarrow \vec{s}_c \cdot \vec{s}_{i+1, j-1, k}, \\ \vec{s}_{i-1, j, k} \cdot \vec{s}_{i, j+1, k} &\rightarrow \vec{s}_c \cdot \vec{s}_{i+1, j+1, k}, \\ \vec{s}_{i, j-1, k} \cdot \vec{s}_{i+1, j, k} &\rightarrow \vec{s}_c \cdot \vec{s}_{i-1, j-1, k}, \\ \vec{s}_{i, j, k-1} \cdot \vec{s}_{i, j-1, k} &\rightarrow \vec{s}_c \cdot \vec{s}_{i, j-1, k+1}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \vec{s}_{i, j+1, k} \cdot \vec{s}_{i, j, k+1} &\rightarrow \vec{s}_c \cdot \vec{s}_{i, j+1, k-1}, \\ \vec{s}_{i, j-1, k} \cdot \vec{s}_{i, j, k+1} &\rightarrow \vec{s}_c \cdot \vec{s}_{i, j+1, k+1}, \\ \vec{s}_{i, j, k-1} \cdot \vec{s}_{i, j+1, k} &\rightarrow \vec{s}_c \cdot \vec{s}_{i, j-1, k-1}, \\ \vec{s}_{i-1, j, k} \cdot \vec{s}_{i, j, k-1} &\rightarrow \vec{s}_c \cdot \vec{s}_{i+1, j, k-1}, \\ \vec{s}_{i, j, k+1} \cdot \vec{s}_{i+1, j, k} &\rightarrow \vec{s}_c \cdot \vec{s}_{i-1, j, k+1}, \\ \vec{s}_{i, j, k-1} \cdot \vec{s}_{i+1, j, k} &\rightarrow \vec{s}_c \cdot \vec{s}_{i+1, j, k+1}, \\ \vec{s}_{i-1, j, k} \cdot \vec{s}_{i, j, k+1} &\rightarrow \vec{s}_c \cdot \vec{s}_{i-1, j, k-1}. \end{aligned} \quad (5)$$

В итоге энергия системы взаимодействующих спинов принимает вид суммы по всем точкам решетки $M(i, j, k)$

$$\begin{aligned} E = \sum_M \{ & (3\alpha + 21\beta) - \vec{s}_M \cdot [C_n (\vec{s}_{i+1, j, k} + \vec{s}_{i-1, j, k} + \vec{s}_{i, j+1, k} + \vec{s}_{i, j-1, k} + \\ & + \vec{s}_{i, j, k+1} + \vec{s}_{i, j, k-1}) + C_{nn} (\vec{s}_{i+2, j, k} + \vec{s}_{i-2, j, k} + \vec{s}_{i, j+2, k} + \vec{s}_{i, j-2, k} + \\ & + \vec{s}_{i, j, k+2} + \vec{s}_{i, j, k-2}) + C_{nd} (\vec{s}_{i-1, j-1, k} + \vec{s}_{i-1, j+1, k} + \vec{s}_{i+1, j-1, k} + \vec{s}_{i+1, j+1, k} + \\ & + \vec{s}_{i, j-1, k-1} + \vec{s}_{i, j-1, k+1} + \vec{s}_{i, j+1, k-1} + \vec{s}_{i, j+1, k+1} + \\ & + \vec{s}_{i-1, j, k-1} + \vec{s}_{i-1, j, k+1} + \vec{s}_{i+1, j, k-1} + \vec{s}_{i+1, j, k+1})] \}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь

$$C_n = 0,5\alpha + 6\beta, \quad C_{nn} = -0,5\beta, \quad C_{nd} = -\beta,$$

C_n, C_{nn}, C_{nd} - коэффициенты, характеризующие соответственно взаимодействие ближайших соседей (C_n) по одной из осей x, y, z , следующих за ближайшими (C_{nn}) по этим осям и ближайших соседей по диагоналям (C_{nd}) в плоскостях M_{xy}, M_{yz} и M_{xz} . Отметим, что соотношение этих коэффициентов отражает быстрое спадание интенсивности взаимодействия с расстоянием между спинами, причем взаимодействие между ближайшими соседями характерно для ферромагнетиков, а взаимодействия nn и nd - для антиферромагнетиков. Таким образом, можно рассматривать (6) как модель магнетика

с конкурирующими ферромагнитным и антиферромагнитным взаимодействиями.

Нетрудно проверить, что в том случае, когда все спины \vec{s}_m параллельны, энергия E , вычисляемая по формулам (6),(7), равна 0. Это — основное состояние, соответствующее минимуму энергии для распределений спинов в секторе с нулевым топологическим зарядом (см. ниже). В этом же секторе в модели (6),(7) возможно существование солитонов, соответствующих локальным минимумам энергии с $E > 0$.

4. В случае непрерывных отображений трехмерного пространства R^3 с точками на бесконечности, отождествленными в силу граничного условия $\vec{s}(\infty) = \vec{s}_\infty$, $|\vec{s}_\infty| = 1$, на сферу S^2 , топологический заряд удобно определять следующим образом [9].

Рассмотрим стереографическую проекцию R^3 на сферу S^3 с координатами N_a , $a = 1, 2, 3, 4$, $\sum_{a=1}^4 N_a^2 = 1$, которая задается формулами

$$N_i = \frac{2x_i}{1+R^2}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (8)$$

$$N_4 = \frac{1-R^2}{1+R^2}, \quad \sum_{i=1}^3 x_i^2 = R^2.$$

Таким образом, каждому отображению компактифицированного $R^3 \rightarrow S^2$ взаимно однозначно соответствует отображение $S^3 \rightarrow S^2$. Известно, что отображения $S^3 \rightarrow S^2$ разбиваются на классы с различными значениями целочисленного инварианта (индекса) Хопфа H . Каков его геометрический смысл? Рассмотрим две точки A и B на сфере S^2 . При заданном отображении $f: S^3 \rightarrow S^2$ на сфере S^3 им могут соответствовать прообразы $f^{-1}(A)$ и $f^{-1}(B)$, представляющие собой замкнутые кривые, являющиеся кривыми постоянного значения параметра \vec{s} ($\vec{s}_1 = \vec{OA}$, $\vec{s}_2 = \vec{OB}$, здесь O — центр сферы S^2). Определяя "коэффициент зацепления" этих кривых, находим значение H индекса Хопфа.

Для его вычисления построим ориентированную поверхность P , для которой $f^{-1}(A)$ является границей, и подсчитаем алгебраическую сумму числа пересечений этой поверхности кривой $f^{-1}(B)$ (учитывая направление пересечения). Для этого, в свою очередь, достаточно подсчитать, сколько раз данный (а значит и каждый) бесконечно малый элемент площади на S^2 , содержащий точку B , "проходится" (с учетом знака, отражающего ориентацию) при изменении аргумента на поверхности P . Другими словами, сколько раз "заматается" единичная сфера S^2 при пробегании аргументом всей поверхности P . Имея в виду упомянутую взаимную однозначность отображения компактифицированного

$R^3 \rightarrow S^3$, в качестве поверхности P можно выбрать также любую достаточно гладкую поверхность в R^3 , натянутую на замкнутую кривую уровня параметра \vec{s} . Тогда

$$H = \int_P \vec{h} \cdot d\vec{s} \quad (9)$$

$$h_i = \frac{1}{4\pi} \epsilon_{ijk} \epsilon_{abc} s_a (\partial_j s_b) (\partial_k s_c)$$

Возьмем в качестве P плоскую поверхность, лежащую в плоскости Oxz пространства R^3 , ограниченную некоторой замкнутой кривой C . Тогда $d\vec{s} = (0, dx dz, 0)$, $\vec{h} = (0, h_y, 0)$ и

$$H = \frac{1}{4\pi} \int_P \epsilon^{abc} s_a (\partial_x s_b) (\partial_z s_c) dx dz. \quad (10)$$

Полученное выражение совпадает (см., например, [10]) с формулой вычисления так называемого "winding number" непрерывных распределений трехкомпонентного единичного вектора \vec{s} на плоскости R^2 .

5. При переходе от непрерывных распределений вектора $\vec{s}(x)$, задаваемого на R^3 или R^2 , к распределениям $\vec{s}(x)$ на решетке требуется дать новые определения и разработать алгоритмы расчета топологических зарядов с учетом дискретности решетки. Они должны быть работоспособными и в тех случаях, когда $\vec{s}(x)$ резко изменяется на расстояниях порядка постоянной решетки a . В работах [10, II] это было сделано для распределений на двумерной решетке (вычисление "winding number"). Для вычисления инварианта Хопфа на трехмерной решетке выберем плоский контур C , соединяющий узлы решетки с постоянным значением $\vec{s} = \vec{s}_0$ в них; например, $\vec{s}_0 = \vec{s}_\infty = (0, 0, 1)$, если граничные условия задачи есть $\vec{s} \rightarrow \vec{s}_\infty = (0, 0, 1)$ при $R \rightarrow \infty$ ($R^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$).

Рассмотрим плоскую поверхность P , натянутую на этот контур C . Не умаляя общности, предположим, что на поверхности P внутри контура C не содержится замкнутых линий уровня меньшей длины, соединяющих узлы решетки с тем же значением $\vec{s} = \vec{s}_0$. Поверхность P составлена из элементарных квадратных граней, в углах которых, являющихся узлами решетки, заданы по 4 спина ($\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3, \vec{s}_4$). Каждый элементарный квадрат разбивается на два треугольника. Если поместить начала всех векторов \vec{s} в центр единичной сферы S^2 , на ней возникает сеть примыкающих друг к другу сферических треугольников, алгебраическая сумма площадей которых S определяет величину H_e для решеточного распределения по формуле $H_e = S/4\pi$ (более подробное обсуждение этого алгоритма см. в [10, II]). Для вычисления

площади сферического треугольника на S^2 , порожденного векторами $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3$ по формулам

$$\begin{aligned} A &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi, \\ \alpha_1 &= \arccos(\vec{a}_2 \cdot \vec{a}_3 / |\vec{a}_2| \cdot |\vec{a}_3|), \\ \alpha_2 &= \arccos(\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_3 / |\vec{b}_1| \cdot |\vec{b}_3|), \\ \alpha_3 &= \arccos(\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_2 / |\vec{c}_1| \cdot |\vec{c}_2|), \end{aligned} \quad (II)$$

($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ - углы сферического треугольника, соответствующие концам векторов $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3$), мы используем следующие векторы:

$$\begin{aligned} \vec{a}_2 &= \vec{s}_2 - \vec{s}_1(\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2), \\ \vec{a}_3 &= \vec{s}_3 - \vec{s}_1(\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_3), \\ \vec{b}_1 &= \vec{s}_1 - \vec{s}_2(\vec{s}_2 \cdot \vec{s}_1), \\ \vec{b}_3 &= \vec{s}_3 - \vec{s}_2(\vec{s}_2 \cdot \vec{s}_3), \\ \vec{c}_1 &= \vec{s}_1 - \vec{s}_3(\vec{s}_3 \cdot \vec{s}_1), \\ \vec{c}_2 &= \vec{s}_2 - \vec{s}_3(\vec{s}_3 \cdot \vec{s}_2). \end{aligned} \quad (I2)$$

Формулы (I2) позволяют, в отличие от аналогичных формул работы II/, выполнять расчеты и в случаях, когда, например, $(\vec{s}_1, \vec{s}_2) = 0$.

6. Для получения на решетке трехмерного топологического солитона зададим на ней начальное распределение спинов, имеющее нужный топологический заряд H_e . В данной работе мы ограничимся случаем $H_e = 1$. Затем будем поочередно изменять спины в узлах рассматриваемой решетки так, чтобы минимизировать энергию взаимодействия изменяемого спина с заданными спинами в соседних узлах (см. формулы (6), (7)). При этом индекс H_e решеточной конфигурации может, вообще говоря, изменяться, но может и сохраняться вплоть до образования на решетке солитона - локализованного в пространстве распределения спинов, соответствующего минимуму E (см. (6), (7)) при данном значении H_e .

В качестве начальной конфигурации спинов было выбрано распределение, определяемое в узлах решетки формулами:

$$S_x = 2(N_1 N_4 + N_2 N_3), \quad (I3)$$

$$S_y = 2(N_1 N_3 - N_2 N_4),$$

$$S_z = N_3^2 + N_4^2 - N_1^2 - N_2^2$$

($X = x_1, Y = x_2, Z = x_3$), N_1, N_2, N_3 заданы соотношениями (8), в которых $X_i = \kappa n_i$, где $n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ - целочисленные координаты узлов решетки с расстоянием между узлами $a \approx 1$, параметр

κ регулирует размер локализованного начального распределения. На оси Ox_3 ($x_1 = x_2 = 0$) $S_z = N_3^2 + N_4^2 = 1$ (т.к. $N_1^2 + N_2^2 = 0$, а $\sum_{a=1}^4 N_a^2 = 1$). При $R \rightarrow \infty$ $\vec{s} \rightarrow \vec{s}_\infty = (0, 0, 1)$. Поэтому на внешней границе используемой при численном исследовании конечной области задается граничное условие $\vec{s} = \vec{s}_\infty = (0, 0, 1)$. В качестве контура C (см. пункт 5) естественно выбрать прямоугольный контур в плоскости Ox_3 (или Oy_3), проходящий по оси O_3 и внешней границе расчетной области. Индекс Хопфа распределения (I3) $H_e = 1$.

Получим формулу, определяющую значение спина \vec{s}_M в произвольном узле $M(n_1, n_2, n_3)$ кубической решетки $N_x \times N_y \times N_z$, при котором его энергия взаимодействия с заданным полем окружающих спинов минимальна. Очевидно, минимум достигается, когда \vec{s}_M параллелен вектору \vec{s}_{env} в квадратных скобках в формуле (6). Поэтому, учитывая, что $|\vec{s}_M| = 1$, находим:

$$\vec{s}_M = \frac{\vec{s}_{env}}{|\vec{s}_{env}|} = \frac{[C_n(\cdot) + C_{nn}(\cdot) + C_{nd}(\cdot)]}{|[C_n(\cdot) + C_{nn}(\cdot) + C_{nd}(\cdot)]|}. \quad (I4)$$

Последовательное прохождение всех узлов решетки с заменой спина \vec{s}_M по формуле (I4) будем называть итерацией. Подчеркнем, что последовательность спиновых конфигураций, каждая из которых получается из предыдущей заменой значения только одного спина \vec{s}_M , порождает монотонно убывающую последовательность значений энергии E (см. (6), (7), (I4)).

Численное исследование трехмерных задач требует значительных вычислительных ресурсов - памяти и времени счета ЭВМ. С целью их экономии мы будем проводить расчеты, предполагая следующую симметрию решеточного солитона относительно поворотов на 90° вокруг оси Oz : $s_x \rightarrow s_y, s_y \rightarrow -s_x, s_z \rightarrow s_z$ (такая симметрия является решеточным аналогом осевой симметрии относительно поворота на произвольный угол, возможной для непрерывных распределений). Это позволяет в 4 раза уменьшить требуемый объем памяти ЭВМ (см. рис. I, на котором изображено сечение решетки плоскостью Oxy , перпендикулярной оси Oz ,

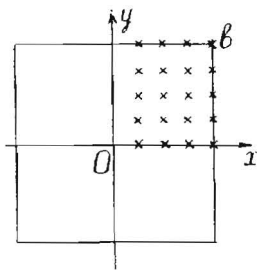


Рис. 1.

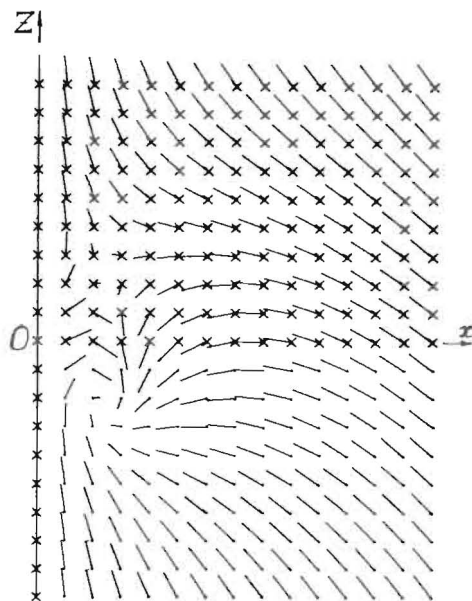


Рис. 2.

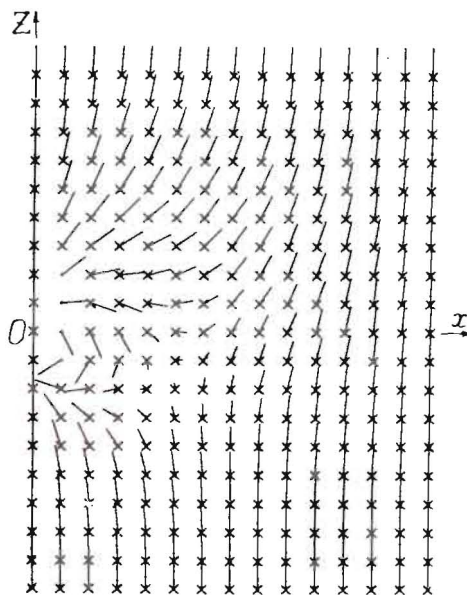
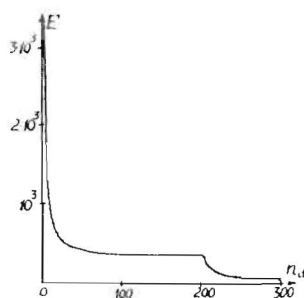


Рис. 3.

Рис. 4.



крестиками отмечены узлы решетки, спины в которых рассчитываются в численном эксперименте). В данной работе используется решетка:

$$N_x = 14, N_y = 15, N_z = 19.$$

Размер солитона следующим образом зависит от параметров α и β : $L \sim \sqrt{\beta/\alpha}$. Расчеты проводились при постоянном значении $\alpha = 2$ и двух значениях β : $\beta = 1,5$ и $\beta = 10$. Параметр начального распределения K был выбран равным $0,3$. Распределение S_x и S_z проекций спинов на решетке в плоскости Oxz перед первой итерацией представлено на рис.2 (крестики означают, что $S_y > 0$, точки - $S_y < 0$). Эволюция распределений спинов при двух указанных β качественно отличается.

При $\beta = 1,5$ значение $He = 1$ сохраняется в течение 199 итераций. Распределение спинов на решетке в плоскости Oxz после 198 итераций изображено на рис.3, отражены компоненты S_x и S_z , крестиком помечены спины, имеющие $S_y > 0$, точкой - $S_y < 0$. На 200-й итерации происходит изменение He , в дальнейшем $He = 0$. Зависимость энергии E от номера итерации приведена на рис.4. После перехода в сектор с нулевым He система спинов быстро эволюционирует к однородному распределению, имеющему $E = 0$. Такой результат расчетов качественно объясняется следующим образом. Ожидаемый по оценке $L \sim \sqrt{\beta/\alpha}$ характерный размер солитона $L \sim 1$, т.е. L порядка расстояния между ближайшими узлами решетки, так что значения спинов в соседних узлах могут сильно отличаться, что и наблюдается при расчетах на ЭВМ (см. рис.3). Поэтому при $\beta = 1,5$ на решеточные распределения нельзя переносить выводы п.2 о существовании солитонов, основанные на рассмотрении непрерывных распределений, что и подтвердилось в расчетах.

При $\beta = 10$ ожидаемый размер солитона в $\sqrt{20/3} \approx 2,6$ раз больше, поэтому эволюция решеточных распределений может иметь больше сходства с эволюцией непрерывных распределений. Действительно, расчеты на ЭВМ показали, что в процессе минимизации энергии E топологический заряд He сохраняется в течение всего времени счета (2650 итераций). Зависимость энергии от номера итерации n_{it} качественно изображена на рис.5. За 2600 итераций устанавливается постоянное значение $E = 679$ (относительное изменение E за одну итерацию меньше, чем $2,5 \cdot 10^{-5}$), соответствующее минимуму энергии E при $He = 1$ и принятых граничных условиях, определяемых выбранной симметрией распределений и условиями при $R \rightarrow \infty$. Устанавливается среднее значение компоненты S_z по рассматриваемой системе спинов: $\langle S_z \rangle_{s_{0e}} = 0,827$; среднее значение энергии в расчете на один спин $\epsilon = E/N_{sp} = 0,170$.

На рис.6 представлены S_x и S_z компоненты спинов солитонного распределения, находящихся в узлах плоскости Oxz (крестики

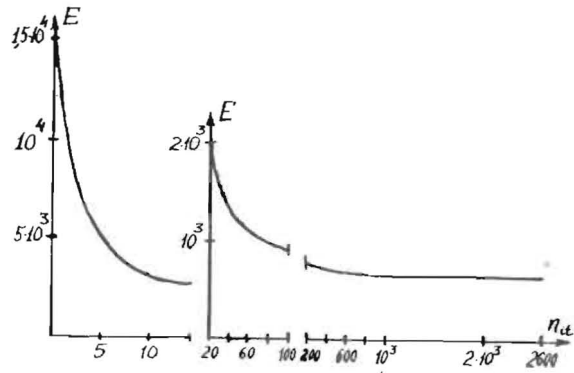


Рис. 5.

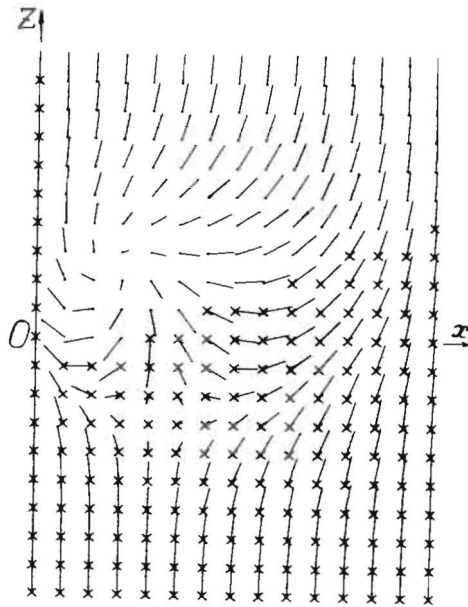


Рис. 6.

соответствуют $S_y > 0$, точки - $S_y < 0$). Отметим, что полученная солитонная конфигурация несимметрична относительно срединной плоскости Oxy . На рис.7 изображены спины в узлах, через которые проходит биссекториальная плоскость Ozb , делящая пополам угол между плоскостями Oxz и Oyz ; отражена тангенциальная составляющая $\vec{S}_t = (S_x \vec{e}_x + S_y \vec{e}_y)/\sqrt{2}$ (крестики означают, что $S_n > 0$,

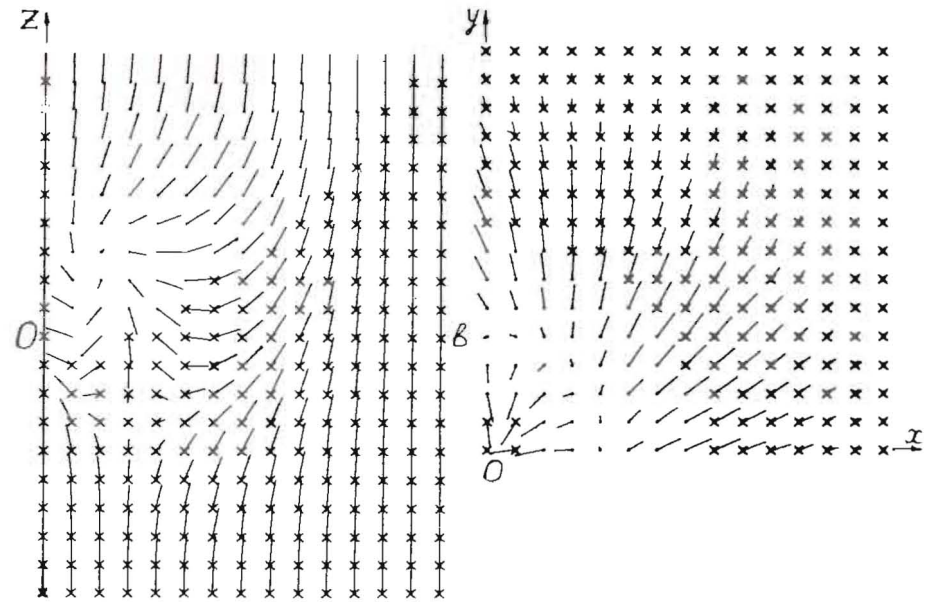


Рис. 7.

Рис. 8.

где $S_n = (S_y - S_x)/\sqrt{2}$, точки - $S_n < 0$; все расстояния между узлами по направлению Oz уменьшены в $\sqrt{2}$ раз). Распределение спинов в узлах срединной плоскости Oxy представлено на рис.8, где изображены компоненты S_x и S_y (крестики соответствуют $S_z \geq 0$, точки - $S_z < 0$). Видно, что при увеличении R картина распределения спинов приближается к осесимметричной.

Сравнение результатов расчетов при $\beta = 1,5$ и $\beta = 10$ показывает, что, по-видимому, при $\beta = 0$, т.е. в решеточном варианте модели Гейзенберга (I) солитонных решений нет (как и в непрерывной модели). Солитоны возникают лишь при учете помимо взаимодействия ближайших соседей (C_n) взаимодействий со следующими соседями (C_{nn} и C_{nd}); в данной работе рассмотрен случай конкурирующих взаимодействий ($C_n > 0$, $C_{nn} < 0$, $C_{nd} < 0$). Найденное в данной работе локализованное распределение спинов - топологический солитон - может представлять собой локальный минимум функционала энергии при заданном $H_e = 1$, поэтому исследования продолжаются.

ЛИТЕРАТУРА

1. Воловик Г.Е., Минеев В.П. ЖЭТФ, 1977, 73, 767.
2. Иванов Б.А., Косевич А.М. ЖЭТФ, 1977, 72, 2000.
3. Фаддеев Л.Д. В поисках многомерных солитонов. В сб: Нелокальные, нелинейные и неперенормируемые теории поля (Материалы IV Международного совещания по нелокальным теориям поля, Алушта, 1976). ОИЯИ, Д-29788, Дубна, 1976, с.207.-223.
4. Дзялошинский И.Е., Иванов Б.А. Письма в ЖЭТФ, 1979, 29, 592.
5. Derrick G.H. J. Math. Phys. , 1964, 5 , 1252.
6. Вахитов М.Г., Колоколов А.А. Известия вузов, Радиофизика, 1973, 16, 1020.
7. Friedberg R., Lee T.D., Sirlin A. Phys. Rev. D, 1976, 13, 2739.
8. Makhankov V.G. Phys. Reports, 1978, 35, 1 .
9. Nicole D.A. J. Phys. G. 1978, 4, 1363.
10. Berg V., Lüscher M. Nucl. Phys., 1981, B190 [FS3] , 412.
11. Berg V. Phys. Letters, 1981, 104B, 475.

Рукопись поступила в издательский отдел
21 июня 1985 года.

Боголюбовский И.Л.

P5-85-482

Трехмерные топологические солитоны на решетке

Работа посвящена изучению топологических солитонов трех-компонентного векторного поля $\vec{s}(\vec{x})$, $s_a s_a = 1$, $a = 1, 2, 3$, на трехмерной решетке. Разрабатывается алгоритм минимизации разностного аналога функционала энергии

$$E = 0,5 \int [\alpha (\frac{\partial \vec{s}}{\partial x_m})^2 + \beta (\frac{\partial^2 \vec{s}}{\partial x_m^2})] d^3 x ;$$

в полученной модели имеют место конкурирующие ферромагнитные и антиферромагнитные взаимодействия классических спинов, расположенных в узлах решетки. Развита метод вычисления топологического заряда /индекса Хопфа H / для трехмерных решеточных распределений спинов. Показано, что в процессе численной минимизации энергии топологический заряд при $\beta > \beta_{cr}(\alpha)$ сохраняется, и возникают топологические солитоны с заданным значением индекса Хопфа. Эти солитоны являются устойчивыми, хотя не обязательно соответствуют абсолютному минимуму E при данном H .

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1985

Перевод О.С.Виноградовой

Bogolubsky I.L.

P5-85-482

Three-Dimensional Topological Solitons on the Lattice

Topological solitons of the three-component vector field $\vec{s}(\vec{x})$, $s_a s_a = 1$, $a = 1, 2, 3$, defined on the three-dimensional lattice are investigated. We elaborate the minimization method for the discrete analogue of the energy functional

$$E = 0,5 \int [\alpha (\frac{\partial \vec{s}}{\partial x_m})^2 + \beta (\frac{\partial^2 \vec{s}}{\partial x_m^2})] d^3 x ;$$

Corresponding discrete model describes competing ferromagnetic and antiferromagnetic interactions of classical spins, localized in the cubic lattice sites. The method is developed to compute topological charge (Hopf index H) of three-dimensional lattice spin distributions. We show that this topological charge is maintained during the minimization process at $\beta > \beta_{cr}(\alpha)$ and topological solitons with given Hopf index arise. These solitons are classically stable, although they are not sure to correspond to absolute minimum of E at given H .

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1985