объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р5-85-353

В.И.Иноземцев, Д.В.Мещеряков*

О ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЯХ СОСТОЯНИЙ ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА ИНТЕГРИРУЕМЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ С N СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Направлено в журнал "Physics Letters"

*Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

1985

Со времени появления первой точно решаемой одномерной модели N частиц, взаимодействие которых определяется потенциалом $V(\xi)=\mathrm{const}\cdot\delta(\xi)$, не ослабевает интерес к поиску и изучению квантовых систем, для которых удается найти решение N-мерного уравнения Шредингера в явном виде /1-6/. В /6/ мы указали наиболее общий класс систем с N степенями свободы, связанных с классическими полупростыми алгебрами Ли и обладающих свойством факторизации волновой функции основного состояния. Эти системы описываются гамильтонианом

$$H=\sum_{j=1}^{N}\frac{p_j^2}{2}+\sum_{j>k}^{N}[V(x_j+x_k)+V(x_j-x_k)]+\sum_{j=1}^{N}W(x_j). \qquad /1/$$

Функции $V(\xi)$, $W(\xi)$ не являются произвольными. Требование выполнения свойства факторизации решения уравнения Шредингера, соответствующего состоянию с максимальной энергией, $\psi_0=\prod_{j=1}^{N}a(x_j)\times\prod_{j>k}^{N}c(x_j-x_k)\,c(x_j+x_k)$, накладывает на эти функции жесткие ограничения /6/. Очевидно, точное решение проблемы описания возбужденных состояний систем с гамильтонианом /1/ возможно лишь для еще более узкого, чем найденный в /6/, набора потенциалов $\{V(\xi),W(\xi)\}$.

В данной работе мы указываем способ построения волновых функций возбужденных состояний дискретного спектра в случае, когда системы с гамильтонианом /1/ вполне интегрируемы, и $\{V,W\}$ имеют вид

$$V(\xi)=\frac{a(a-1)}{\mathrm{sh}^2\xi},\qquad W(\xi)=\frac{g}{\mathrm{ch}^2\xi},\qquad g=-\frac{\lambda(\lambda+1)}{2},\ \ \lambda>0. \qquad /2/$$

Подобные системы впервые рассматривались в /5/, однако был исследован лишь непрерывный спектр ($g>0$). Отметим, что и при $g<0$ может существовать лишь конечное число состояний дискретного спектра, как и для одномерной задачи о движении одной частицы в потенциале $W(\xi)$ /2/. В дальнейшем мы укажем, каким образом это число определяется значениями констант λ и a в /2/ /для самосопряженности гамильтониана необходимо выполнение неравенства $a(a-1)\geq 3/4$, т.е. $a\geq 3/2$).

При $a=0$ проблема тривиальна: гамильтониан /1/ описывает совокупность N невзаимодействующих частиц, находящихся во внешнем поле $-\frac{\lambda(\lambda+1)}{2}(\mathrm{ch}\,\xi)^{-2}$. Уравнение Шредингера приводится в этом случае к гипергеометрическому подстановкой $z=\mathrm{th}\,\xi$.

Производя подобную замену переменных $z_j = \operatorname{th} x_j$, $j=1,\dots,N$ в интересующем нас случае нетривиального взаимодействия ($a \neq 0$), получим уравнение

$$\{-\sum_{j=1}^{N}[\frac{1}{2}(1-z_j^2)\frac{\partial}{\partial z_j}(1-z_j^2)\frac{\partial}{\partial z_j}+\lambda(\lambda+1)(1-z_j^2)]+\sum_{j>k}^{N}\frac{2a(a-1)(1-z_j^2)(1-z_k^2)(z_j^2+z_k^2)}{(z_j^2-z_k^2)^2}\}\psi = E\psi. \qquad /3/$$

В силу симметрии задачи достаточно рассмотреть движение в многогранном угле $\{z_j \pm z_k \geq 0,\ j>k\}$ [5]. Для упрощения /3/ естественно ввести новую функцию $\phi(z_1,\dots,z_N)$ посредством соотношения

$$\psi(z_1,\dots,z_N) = \phi(z_1,\dots,z_N)\,\chi_{a,\beta}(z_1,\dots,z_N), \qquad /4/$$

где $\chi_{a,\beta}(z_1,\dots,z_N)$ - аналог волновой функции основного состояния рассматриваемой системы:

$$\chi_{a,\beta}(z_1,\dots,z_N) = \prod_{j=1}^{N}(1-z_j^2)^{\beta}\prod_{j>k}^{N}(z_j^2-z_k^2)^{a}. \qquad /5/$$

Уравнение для ϕ приобретает вид

$$\tilde{H}\phi = (E-\epsilon(\beta))\,\phi, \qquad /6а/$$

где

$$\tilde{H} = -\frac{1}{2}\{\sum_{j=1}^{N}[(1-z_j^2)^2\frac{\partial^2}{\partial z_j^2}+(4az_j(1-z_j^2)^2\sum_{k\neq j}(z_j^2-z_k^2)^{-1}-2(2\beta+1)z_j(1-z_j^2))\frac{\partial}{\partial z_j}]+p(\beta)\sum_{j=1}^{N}z_j^2\}, \qquad /6б/$$

$$\epsilon(\beta) = N[\beta+a(N-1)(2\beta+1)-\frac{\lambda(\lambda+1)}{2}+\frac{a^2}{3}(N-1)(4N-5)],$$

$$p(\beta) = 2\beta(2\beta+1)-\lambda(\lambda+1)+4a^2(N-1)^2+2a(N-1)(4\beta+1). \qquad /6в/$$

Сингулярности в /6б/ на гиперплоскостях $z_j \pm z_k = 0$ сокращаются, если ϕ симметрична относительно любых перестановок аргументов $\{z_j \rightleftarrows z_k,\ z_j \rightleftarrows -z_k\}$. Для ϕ возможны две структуры, удовлетворяющие этому требованию:

$$\phi^{(1)} = \phi_1(z_1^2,\dots,z_N^2), \qquad /7а/$$

$$\phi^{(2)} = (\prod_{j=1}^{N}z_j)\,\phi_2(z_1^2,\dots,z_N^2), \qquad /7б/$$

где ϕ_1 и ϕ_2 - симметричные функции своих аргументов. При выполнении условия симметрии решения уравнения /6/, соответствующие дискретному спектру, можно искать в виде рядов по переменным $z_1^2,\dots,z_N^2$. По аналогии с задачей о движении одной частицы в потенциале Пецля-Теллера $-\frac{\lambda(\lambda+1)}{2}(\operatorname{ch}\xi)^{-2}$ следует ожидать, что эти ряды будут в общем случае расходиться на гиперплоскостях $z_j^2 = 1$, $j = 1,\dots,N$. Сходимость рядов заведомо имеет место в том случае, когда они обрываются и превращаются в полиномы, что может происходить лишь при определенных значениях энергии и параметра β. Из условия нормировки волновых функций /4/

$$\int_{-1}^{1}\prod_{j=1}^{N}dz_j(1-z_j^2)^{2\beta-1}\prod_{j>k}^{N}|z_j^2-z_k^2|^{2a}\,|\phi(z_1,\dots,z_N)|^2<\infty$$

следует, что допустимые значения параметра β ограничены условием

$$\beta > 0. \qquad /8/$$

/Мы предполагаем, что хотя бы на одной из гиперплоскостей $z_j^2=1$ ϕ не обращается в нуль/.

При подстановке /7а-б/ в /6/ с одновременной заменой переменных $z_j^2 = 1-t_j$, $j = 1,\dots,N$ мы получаем следующие уравнения для функций ϕ_1, ϕ_2:

$$\{\sum_{j=1}^{N}[2t_j^2(t_j-1)\frac{\partial^2}{\partial t_j^2}+(4at_j^2(t_j-1)\sum_{k\neq j}(t_j-t_k)^{-1}-2(2\beta+1)t_j+(4\beta+3)t_j^2)\frac{\partial}{\partial t_j}+\tilde{p}_1(\beta)t_j]\}\phi_1 = (E-\tilde{\epsilon}(\beta))\phi_1, \qquad /9а/$$

$$\{\sum_{j=1}^{N}[2t_j^2(t_j-1)\frac{\partial^2}{\partial t_j^2}+(4at_j^2(t_j-1)\sum_{k\neq j}(t_j-t_k)^{-1}-2(2\beta+1)t_j+(4\beta+5)t_j^2)\frac{\partial}{\partial t_j}+\tilde{p}_2(\beta)t_j]\}\phi_2 = (E-\tilde{\epsilon}(\beta))\phi_2, \qquad /9б/$$

где

$$\tilde{p}_1(\beta) = \beta(2\beta+1)-\frac{\lambda(\lambda+1)}{2}+a(4\beta+1)(N-1)+2a^2(N-1)^2,$$

$$\tilde{p}_2(\beta) = (\beta+1)(2\beta+1)-\frac{\lambda(\lambda+1)}{2}+a(4\beta+3)(N-1)+2a^2(N-1)^2, \qquad /10/$$

$$\tilde{\epsilon}(\beta) = -\frac{N}{2}[\frac{a^2}{3}(N^2-1)+(2\beta+a(N-1))^2]. \qquad /11/$$

Будем искать решения уравнений /9а-б/ в виде разложений по степеням полиномов $\{a_j\}$ /7/, $j = 1, \ldots, N$

$$a_1 = \prod_{j=1}^{N} t_j\,, \quad a_\ell = \frac{\hat{B}^{\ell-1}}{(\ell-1)!}\, a_1\,, \quad \hat{B} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial t_j}\,, \quad \ell = 1, \ldots, N\,. \qquad /12/$$

Ввиду явной симметрии введенных посредством /12/ новых переменных $\{a_j\}$, сингулярности типа $(t_j - t_k)^{-1}$ в /9а-б/ должны исчезнуть при переходе от $\{t_j\}$ к $\{a_j\}$. Прямое вычисление с использованием явного вида $\{a_j\}$ /12/ показывает, что сокращение сингулярностей действительно происходит, и уравнения /9а-б/ могут быть представлены в виде

$$(\hat{H}_1 + \hat{G}_1)\,\phi_1(a_1, \ldots, a_N) = (E - \tilde{\epsilon}(\beta))\,\phi_1(a_1, \ldots, a_N), \qquad /13а/$$

$$(\hat{H}_2 + \hat{G}_2)\,\phi_2(a_1, \ldots, a_N) = (E - \epsilon(\beta))\,\phi_2(a_1, \ldots, a_N), \qquad /13б/$$

где

$$\hat{H}_i = 2 \sum_{\ell, m=1}^{N} \Big[\sum_{r=1}^{\ell-1} \sum_{s=0}^{1} (\ell + m - 2r - s)\, a_r\, a_{\ell+m-r-s} - (N - m + 2)\, a_{m-1}\, a_\ell - (N - \ell + 2)\, a_m\, a_{\ell-1} - (N - m + 1)\, a_\ell\, a_m \Big] \frac{\partial^2}{\partial a_\ell\, \partial a_m} - \sum_{\ell=1}^{N} \Big[a_{\ell-1} (N - \ell + 2)(4\beta + 2i + 1 + 2\alpha(N + \ell - 3)) + 2 a_\ell (N - \ell + 1)(2\beta + 1 + \alpha(N + \ell - 2)) \Big] \frac{\partial}{\partial a_\ell}\,, \qquad /14/$$

$$\hat{G}_i = a_N \Big[2 \sum_{\ell, m=1}^{N} a_\ell\, a_m \frac{\partial^2}{\partial a_\ell\, \partial a_m} + \sum_{\ell=1}^{N} (4\alpha(N-1) + 4\beta + 2i + 1) \frac{\partial}{\partial a_\ell} + \tilde{p}_i(\beta) \Big]\,. \qquad /15/$$

Отметим, что в формуле /14/ следует полагать $a_j = 0$ при $j = 0$, $N + 2, \ldots$; $a_{N+1} = 1$.

Рассмотрим условия, при которых решения /13а-б/ могут быть представлены в виде полиномов конечной степени по переменным $\{a_j\}$,

$$\phi_i = \sum_{s=0}^{n} \sum_{j_1 + \ldots + j_N = s} C^{(i)}_{j_1 \ldots j_N; s}\, a_1^{j_1} a_2^{j_2} \ldots a_N^{j_N}\,, \quad i = 1, 2\,. \qquad /16/$$

Легко заметить, что при действии операторов $\hat{H}_i$ на полином $a_1^{j_1} \ldots a_N^{j_N}$ его степень $s = j_1 + \ldots j_N$ не увеличивается; операторы $\hat{G}_i$, благодаря множителю a_N перед квадратной скобкой в /15/, увеличивают эту степень на 1. Поэтому представление /16/ может быть справедливо лишь в том случае, когда операторы $\hat{G}_i$, действуя на

слагаемые в /16/ с максимальной степенью n, обращают их в нуль. Из /15/ следует, что это условие при данном n приводит к квадратным уравнениям относительно β:

$$\tilde{p}_i(\beta) + n(4\alpha(N-1) + 4\beta + 2i + 1) + 2n(n-1) = 0. \qquad /17/$$

Из решений /17/

$$\beta^{(1)}_{1,2} = -(n + \alpha(N-1) + \frac{1}{4}) \pm \frac{1 + 2\lambda}{4}\,, \quad \beta^{(2)}_{1,2} = -(n + \alpha(N-1) + \frac{3}{4}) \pm \frac{1 + 2\lambda}{4} \qquad /18/$$

следует выбрать лишь такие, для которых выполнено условие /8/. При этом параметры $\beta^{(i)}$ определяются однозначно: в формулах /18/ перед вторыми слагаемыми должен быть выбран верхний знак. Из /8/ следует также, что решения /13а-б/ вида /16/ могут существовать лишь для достаточно больших значений λ. При заданных λ и α максимальная степень полинома /16/ ограничена:

$$\frac{\lambda}{2} - \alpha(N-1) > n\,, \quad i = 1\,, \qquad /19а/$$

$$\frac{\lambda}{2} - \alpha(N-1) > n + 1/2\,, \quad i = 2\,. \qquad /19б/$$

Отметим, что при $n = 0$ решение $\phi_1 = \mathrm{const}$ соответствует, согласно /4,5/, волновой функции основного состояния рассматриваемой нами системы с гамильтонианом /1,2/, причем $\beta^{(1)} = \frac{\lambda}{2} - \alpha(N-1)$. Решение $\phi_2 = \mathrm{const}$ определяет простейшую волновую функцию возбужденного состояния с энергией $\epsilon(\beta^{(2)}) = -\frac{N}{2}\left[\frac{\alpha^2}{3}(N^2 - 1) + (\lambda - \alpha(N-1) - 1)^2\right]$. При $n > 0$ подстановка /16/ в /13а-б/ приводит к системам $\frac{(N+n)!}{N!\,n!}$ однородных алгебраических уравнений для коэффициентов $c^{(i)}_{j_1 \ldots j_N; s}$, если выполнены условия /18/. Эти системы имеют нетривиальные решения лишь для некоторых значений параметра E, образующих дискретный спектр. Эти значения должны определяться из условия обращения в нуль определителей систем. Тем самым задача об отыскании волновых функций возбужденных состояний дискретного спектра N-мерного уравнения Шредингера с гамильтонианом /1,2/ становится алгебраической; существуют две серии волновых функций, соответствующих решениям /13а-б/ вида /16/ при ограничениях /19/ на n.

В заключение отметим, что при $n = 1$ волновые функции этих серий могут быть вычислены явно /с точностью до нормировочного множителя/. Мы приводим также соответствующие энергетические уровни:

$$\phi^{(1)}_{1,\ell} = c^{(r)}_{1,\ell} \sum_{j=1}^{\ell} (-1)^{\ell-j} \frac{(N-j+1)!}{(N-\ell+1)!\,(\ell-j)!} \frac{\Gamma(\frac{2\lambda-1}{2\alpha} - N + \ell)\,\Gamma(\frac{\lambda-1}{\alpha} - 2N + \ell + j - 1)}{\Gamma(\frac{2\lambda-1}{2\alpha} - N + j)\,\Gamma(\frac{\lambda-1}{\alpha} - 2N + 2\ell - 1)}\, a_j$$

$$-E^{(1)}_{1,\ell} = \frac{N}{2}\left[(\lambda-2-a(N-1))^2 + \frac{a^2(N^2-1)}{3}\right] + 2(N-\ell+1)(\lambda-1-a(N-\ell)),$$

$$\ell = 2,\dots,N+1, \qquad /20a/$$

$$\phi^{(1)}_{2,\ell} = c^{(1)}_{2,\ell}\sum_{j=1}^{\ell}(-1)^{\ell-j}\frac{(N-j+1)!}{(N-\ell+1)!(\ell-j)!}\,\frac{\Gamma(\frac{2\lambda-1}{2a}-N+\ell)\,\Gamma(\frac{\lambda-2}{a}-2N+\ell+j-1)}{\Gamma(\frac{2\lambda-1}{2a}-N+j)\,\Gamma(\frac{\lambda-2}{a}-2N+2\ell-1)}\,a_j \qquad /20б/$$

$$-E^{(1)}_{2,\ell} = \frac{N}{2}\left[(\lambda-3-a(N-1))^2 + \frac{a^2(N^2-1)}{3}\right] + 2(N-\ell+1)(\lambda-2-a(N-\ell)),\ \ell=1,\dots,N+1.$$

Возможность явного вычисления функций /20а-б/ обусловлена тем, что при $n = 1$ матрицы операторов $\hat{H}_i + G_i$ в базисе $\{a_1,\dots,a_N,1\}$ имеют отличные от нуля элементы лишь на главной и соседней с ней диагоналях. В общем случае $n \geq 2$ структура матриц $\hat{H}_i + G_i$ более сложна. Проблема построения явного вида волновых функций ϕ_i при $n \geq 2$ уже не может быть сведена к рассмотрению простых рекуррентных соотношений, связывающих коэффициенты в /16/, и требует дальнейшего исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lieb E., Liniger W. Phys.Rev., 1963, 130, p.1605; McGuire J.B. J.Math.Phys., 1971, 12, p.419.
2. Calogero F. J.Math.Phys., 1971, 12, p.419.
3. Sutherland B. Phys.Rev., 1972, A5, p.1372.
4. Muriel A. Phys.Rev., 1977, A15, p.341.
5. Olshanetsky M.A., Perelomov A.M. Lett.Math.Phys., 1977, 2, p.7; Phys.Rep., 1983, 94, p.313.
6. Inozemtsev V.I., Meshcheryakov D.V. Phys.Lett., 1984, 106A, p.101; ОИЯИ, Р5-84-784, Дубна, 1984.
7. Иноземцев В.И., Мещеряков Д.В. В сб.: Краткие сообщения ОИЯИ, №4-84, Дубна, 1984, с.22.

Рукопись поступила в издательский отдел
14 мая 1985 года.