объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р5-85-317

Р.Мырзакулов, О.К.Пашаев, Х.Т.Холмуродов

# ЧАСТИЦЕПОДОБНЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ В МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ МАГНОН-ФОНОННОЙ СИСТЕМЕ

Направлено в журнал "Physica Scripta"

1985

## ВВЕДЕНИЕ

В последнее время значительный теоретический и практический интерес представляет изучение свойств квазиодномерных молекулярных соединений. С одной стороны, имеется хорошо развитая теория интегрируемых и близких к ним систем [1]. С другой стороны, они представляют богатые возможности для экспериментаторов в изучении таких явлений, как перенос заряда органическими полимерами типа полиацетилена, высокотемпературная сверхпроводимость, распространение лазерного излучения в оптических волноводах, возбуждение солитонов в легкоплоскостном магнетике при рассеянии нейтронов и т.д. [2-4].

В настоящей работе рассматривается модель многоподрешеточной квазиодномерной магнитной системы, описываемая обобщением изотропной XY модели Гейзенберга.

Как хорошо известно, гамильтониан одномерной XY цепочки с помощью преобразования Йордана-Вигнера к фермионным переменным сводится к идеальному газу квазичастиц [5]. Связанные состояния в такой системе отсутствуют [6]. Обобщение XY модели на случай невзаимодействующих подрешеток приводит к идеальному газу квазичастиц с внутренними степенями свободы и не меняет основного результата. Однако включение сколь угодно слабого взаимодействия хотя бы двух XY цепочек приводит к появлению двухмагнонного связанного состояния, энергия которого лежит в сплошном спектре [7,8].

С другой стороны, учет деформации решетки в одномерной XY модели также может приводить к образованию связанных состояний. Как будет показано в настоящей работе, двухподрешеточная XY модель с учетом деформаций решетки с помощью преобразования Йордана-Вигнера может быть сведена к известной модели Су - Шриффера -Хигера [9] в теории полиацетилена. Как известно, в этой модели имеются локализованные состояния типа солитонов, поляронов и т.д.

Для описания нелинейных возбуждений с характерными размерами, значительно бóльшими расстояния между узлами решетки, можно перейти к непрерывному пределу и свести задачу к исследованию нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Наличие связанных состояний в исходной модели приводит к существованию решений нелинейного уравнения в виде частицеподобных возбуждений или уединенных волн. Нелинейный механизм образования уединенных волн за счет деформаций решетки был предложен Давыдовым [2]. Он допускает следующее обобщение для описания магнитных систем. Рассмотрим N несвязанных XY магнитных подрешеток, которые мы будем нумеровать "цветом": a = 1,2,..., N. Гамильтониан такой системы

$$H = \sum_{a=1}^{N} H^{(a)},$$

где $H^{(a)}$ - гамильтониан a - подрешетки. Если в гамильтониане H учесть деформации решетки, причем фононы считать "бесцветными", то обмен такими фононами приведет к взаимодействию между "цветными" подрешетками /10/. В такой системе могут существовать связанные состояния в виде уединенных волн и солитонов /10/. В процессе столкновения цветных солитонов возникает нетривиальная динамика "цвета": солитоны могут изменять свой "цвет" и, в частности, обмениваться "цветом" /15/.

В длинноволновом классическом пределе система взаимодействующих фононов и "цветных" магнонов описывается векторным обобщением известной системы, сводящейся к системе Захарова в теории плазмы:

$$\begin{aligned} & i\phi_t^{(a)} + \frac{1}{2}\phi_{\xi\xi}^{(a)} - x_\xi \phi^{(a)} = 0, \\ & x_{tt} - x_{\xi\xi} - (\bar{\phi}\phi)_\xi = 0, \end{aligned} \qquad /0.1/$$

где $(\phi\bar{\phi}) = \sum_{a=1}^{p} |\phi^{(a)}|^2 - \sum_{a=p+1}^{N} |\phi^{(a)}|^2$, U(p,q) - внутреннее произведение (a = 1,2,..., N). Квазистационарное приближение приводит к интегрируемой системе - векторному нелинейному уравнению Шредингера, подробно исследованному в /11/. В "ультрарелятивистском" пределе, когда $v_{солитона} \approx v_{звука} = 1$, для однонаправленного движения система /0.1/ сводится к векторному обобщению системы Бени для взаимодействующих длинной и коротких волн /12/ /без учета члена с кубической нелинейностью/:

$$i\phi_t^{\prime(a)} + \frac{1}{2}\phi_{\xi\xi}^{\prime(a)} - n\phi^{\prime(a)} = 0, \quad n_t + n_\xi + (\bar{\phi}'\phi')_\xi = 0. \qquad /0.2/$$

Здесь $\phi' = \phi/\sqrt{2}$, $n = x_\xi$. Эта система является интегрируемой /10/. Уединенная волна при этом становится солитоном. Для случая одноподрешеточной изотропной XY модели система /0.2/ сводится к скалярному U(1) варианту, и она впервые получена в теории плазмы Яджимой и Ойкавой /13/. Они построили линейную задачу, соответствующую U(1) варианту системы /0.2/, провели прямую и обратную задачу рассеяния и построили N-солитонное решение при тривиальных граничных условиях $\phi(\xi,t) \xrightarrow[|\xi|\to\infty]{} 0$, $n(\xi,t) \xrightarrow[|\xi|\to\infty]{} 0$.

Оказалось, что U(1) система носит более общий характер и описывает взаимодействие между длинной и короткой волнами без учета амплитудных поправок к частоте /12/.

Если при изучении ленгмюровских колебаний учитывать поляризацию электрического поля $\vec{E}$, то мы получим U(2) векторный вариант системы Захарова /0.1/, где

$$\phi(\xi,t) = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}, \quad (\bar{\phi}\phi) = |E_1|^2 + |E_2|^2.$$

Однако в связи с одномерностью системы /0.1/ более реалистично ее использование в физике конденсированного состояния для описания квазиодномерных соединений. Интересно, что ее "ультрарелятивистский" предел - система /0.2/ является первым примером интегрируемой системы, в которой фононные переменные присутствуют в явном виде как независимое поле $n(\xi,t) = x_\xi$. К сожалению, ультрарелятивистский предел выводит нас из области применимости системы /0.1/, так как фононное поле при этом нарастает и необходимо учитывать ангармонические члены /2,16/.

Редукция, приводящая многокомпонентную магнитную систему к системе /0.1/ с U(p,q) симметрией была получена в работе /10/. Настоящая работа посвящена изучению нелинейных возбуждений в системе, описываемой уравнениями /0.1/, исследованию вопросов гамильтоновости, а также интегрируемости "ультрарелятивистского" предела.

В первой части работы мы кратко коснемся основных физических предположений, при которых системы /0.1/ выводится из многоподрешеточной изотропной XY цепочки спинов. Далее мы покажем, что двухподрешеточный вариант /U(2) - вариант системы /0.1// XY цепочки связан преобразованием Йордана-Вигнера с моделью Су-Шриффера-Хигера в теории полиацетилена.

Во второй части мы покажем гамильтоновость системы /0.1/ и ее ультрарелятивистского предела /0.2/. При этом скобка Пуассона для системы /0.2/ является обобщением скобок Пуассона для нелинейного уравнения Шредингера и уравнения Кортевега-де Вриза. В этой же части мы покажем возможность исследования системы /0.2/ методом обратной задачи и построим производящие функционалы для бесконечной серии дополнительных интегралов движения. Характерной особенностью U(p,q) нелинейного уравнения Шредингера является наличие широкого набора допустимых граничных условий, отвечающих различным физическим ситуациям /ферромагнетик, антиферромагнетик/ /11/. Постановка таких же граничных условий в более общей ситуации /вне квазистационарного режима/, описываемой системой /0.1/, также обогащает спектр возбуждений системы. Мы приводим 4 типа солитоноподобных решений системы /0.1/ и их физические характеристики - интегралы числа частиц и энергии. Обсуждается два предела для этих решений: квазистационарный ($v \ll 1$) и ультрарелятивистский ($v \sim 1$).

В заключении обсуждаются основные результаты.

## 1. ФОРМУЛИРОВКА МОДЕЛИ И ВЫВОД ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ

Гамильтониан рассматриваемой системы имеет вид

$$H = H_S + H_L, \qquad /1.1/$$

где

$$H_S = -\frac{1}{4}\sum_{j\delta}\sum_{\alpha=1}^{N} J_{jj+\delta}\,\Gamma^{\alpha\alpha}\left(S_j^{+\alpha}S_{j+\delta}^{-\alpha} + S_j^{-\alpha}S_{j+\delta}^{+\alpha}\right) \qquad /1.2/$$

описывает N изотропных XY спиновых цепочек,

$$H_L = T + U \qquad /1.3/$$

соответствует колебаниям цепочки. Матрица

$$\Gamma = \mathrm{diag}\,(\underbrace{1,\ldots,1}_{p},\ \underbrace{-1,\ldots,-1}_{q}), \quad (p+q=N),$$

где p компонент соответствуют ферромагнитным подрешеткам, оставшиеся q компоненты соответствуют антиферромагнитным подрешеткам,

$$H_S = -\frac{1}{4}\sum_{j\delta}\sum_{\alpha=1}^{N}\left(S_j^{+\alpha}S_{j+\delta}^{-\alpha} + S_j^{-\alpha}S_{j+\delta}^{+\alpha}\right) + \frac{1}{4}\sum_{j\delta}\sum_{\alpha=p+1}^{N}\left(S_j^{+\alpha}S_{j+\delta}^{-\alpha} + S_j^{-\alpha}S_{j+\delta}^{+\alpha}\right).$$

Обменные интегралы во всех решетках равны между собой /по модулю/, $S_j^{\pm\alpha} = S_j^{x\alpha} \pm iS_j^{y\alpha}$. Сделаем далее следующие допущения.

Рассмотрим фононные эффекты в гармоническом приближении

$$U = \frac{mv_0^2}{2}\sum_j (x_{j+1} - x_j - a)^2, \qquad /1.4/$$

где a - постоянная решетки, а обменные интегралы в линейном приближении

$$J_{jj+\delta} = J(|x_{j+\delta} - x_j|) = J_0 - J_1|x_{j+\delta} - x_j|,$$

где $J_1 = -\frac{\partial J_1}{\partial x_j} < 0$ при $x_j = x_{j+\delta}$.

При низких температурах, используя представление Холштейна-Примакова

$$S_j^{+\alpha} = \sqrt{2S}\,a_j^\alpha, \quad S^{-\alpha} = \sqrt{2S}\,a_j^{+\alpha}, \quad S_j^{z\alpha} = S - a_j^{+\alpha}a_j^\alpha, \quad (\alpha = 1,2,\ldots,N),$$

гамильтониан /1.2/ можно выразить в терминах только бозе-операторов. Вводя когерентные состояния

$$|\Phi\rangle = \exp\{i\sum_j\sum_{\alpha=1}^{N}(\phi_j^\alpha a_j^{+\alpha} + \phi_j^{*\alpha}a_j^\alpha)\}|0\rangle$$

в приближении слабой нелинейности, для длинноволновых возбуждений [2,10] получим систему дифференциальных уравнений, которая после ряда преобразований примет вид /0.1/

$$i\phi_t^{(\alpha)} + \frac{1}{2}\phi_{\xi\xi}^{(\alpha)} - x_\xi\phi^{(\alpha)} = 0, \quad x_{tt} - x_{\xi\xi} - (\bar\phi\phi)_\xi = 0,$$

где $\alpha = 1,2,\ldots,N$, $(\bar\phi\phi) = \sum_{\alpha=1}^{p}|\phi^{(\alpha)}|^2 - \sum_{\alpha=p+1}^{N}|\phi^{(\alpha)}|^2$. Здесь $x(\xi,t)$ описывает локальную деформацию решетки, $\phi^{(\alpha)}(\xi,t)$ - шредингеровская амплитуда спиновых распределений.

В "квазистационарном" пределе $v \ll 1$, $x_\xi = -[(\bar\phi\phi) - \rho]$, где $\rho$ - постоянная, и система /0.1/ переходит в нелинейное уравнение Шредингера с U(p,q) изотопической симметрией

$$i\phi_t^{(\alpha)} + \frac{1}{2}\phi_{\xi\xi}^{(\alpha)} + [(\bar\phi\phi) - \rho]\,\phi^{(\alpha)} = 0.$$

Эта система является интегрируемой. Подробное исследование вопросов интегрируемости, солитонных возбуждений и их спектров проведено в работе [11].

В "ультрарелятивистском" пределе, когда скорость волны стремится к скорости звука $v \to 1$, оператор $\partial_t^2 - \partial_\xi^2$ может быть заменен на $-2(\partial_t + \partial_\xi)\partial_\xi$ и система /0.1/ переходит в систему уравнений /0.2/

$$i\phi_t'^{(\alpha)} + \frac{1}{2}\phi_{\xi\xi}'^{(\alpha)} - n\phi'^{(\alpha)} = 0, \quad n_t + n_\xi + (\bar\phi'\phi')_\xi = 0,$$

где

$$\phi'^{(\alpha)}(\xi,t) = \phi'(\xi,t)/\sqrt{2}, \quad \phi^T = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_N),$$

$$n(\xi,t) = x_\xi(\xi,t), \quad (\bar\phi\phi) = \phi^+\Gamma\phi.$$

При учете поляризации электрического вектора $\vec{E}$ возникает U(2) вариант модели /0.1/:

$$i\phi_t^{(1)} + \frac{1}{2}\phi_{\xi\xi}^{(1)} - x_\xi\phi^{(1)} = 0,$$

$$i\phi_t^{(2)} + \frac{1}{2}\phi_{\xi\xi}^{(2)} - x_\xi\phi^{(2)} = 0, \qquad /1.5/$$

$$x_{tt} - x_{\xi\xi} - (|\phi_1^{(1)}|^2 + |\phi_2^{(2)}|^2)_\xi = 0.$$

С общей точки зрения ультрарелятивистский предел системы /1.5/ описывает взаимодействие между длинной и короткой волнами [12], при учете поляризации волны, но без амплитудных поправок к частоте. Сейчас мы покажем, что система /1.5/ может быть использована по крайней мере в еще одной задаче из теории конденсированного состояния.

Рассмотрим модель Су-Шриффера-Хигера из теории полиацетилена [9]. Она описывается следующим гамильтонианом:

$$H = -\sum_{n,s=\pm 1/2} t_{n+1,n}(c_{n+1,s}^+ c_{n,s} + c_{n,s}^+ c_{n+1,s}) + \sum_n \{P_n^2/2M + \frac{1}{2}K(u_{n+1} - u_n)^2\}, \qquad /1.6/$$

где $u_n$ - действительное, скалярное бозе-поле, описывающее деформации n-й группы в цепочке полиацетилена. Первая сумма в /1.6/ описывает переходы электронов с n узла на n+1 с амплитудой $t_{n+1,n} = t_0 - \kappa(u_{n+1} - u_n)$, вторая - кинетическую и потенциальную энергию фононов. Фермионные операторы $c^+_{n,s}$ и $c_{n,s}$ рождают и уничтожают электроны спина $s\,(=\pm 1/2)$ в узле n и удовлетворяют антикомутационным соотношениям

$$\{c_{n,s}, c^+_{m,s'}\} = \delta_{nm}\,\delta_{ss'}, \quad \{c_{n,s}, c_{m,s'}\} = \{c^+_{n,s'}, c^+_{m,s}\} = 0. \qquad /1.7/$$

Используя преобразования Йордана-Вигнера к спиновым переменным

$$S^+_{j\downarrow} = c^+_{j\downarrow}\exp\Big(i\pi \sum_{i=1}^{j-1} c^+_{i\downarrow} c_{i\downarrow}\Big),$$

$$S^+_{j\uparrow} = c^+_{j\uparrow}\exp\Big(i\pi \sum_{i=1}^{j-1} c^+_{i\uparrow} c_{i\uparrow}\Big)$$

и коммутационные соотношения

$$[S^+_{i\alpha}, S^-_{j\beta}] = 2\delta_{ij}\,\delta_{\alpha\beta}S^z_{i\alpha},$$

$$[S^z_{i\alpha}, S^\pm_{j\beta}] = \pm\delta_{ij}\,\delta_{\alpha\beta}\,S^\pm_{i\alpha},$$

$(\alpha = 1, 2)$ или $(\uparrow, \downarrow)$, гамильтониан /1.6/ для полузаполненной зоны можно переписать в виде

$$H = -\sum_n \sum_{\sigma=1}^{2} t_{n+1,n}\big(S^+_{n+1,\sigma}S^-_{n,\sigma} + S^+_{n,\sigma}S^-_{n+1,\sigma}\big) + T + U =$$

$$= -2\sum_n \sum_{\sigma=1}^{2} \{t_0 - \kappa(u_{n+1} - u_n)\}\big(S^x_{n+1,\sigma}S^x_{n,\sigma} + S^y_{n+1,\sigma}S^y_{n,\sigma}\big) + T + U. \qquad /1.8/$$

Идентифицируя $J_0 = 8t_0$, $J_1 = 8\kappa$ из /1.1/ и /1.8/, получаем, что модель /1.6/ в случае полузаполненной зоны эквивалентна двум XY цепочкам спинов 1/2. Взаимодействие между цепочками переносится фононами $u_n$.

Как мы показали выше, последняя система в длинноволновом приближении может описываться U(2) вариантом (N = 2) системы /0.1/ (уравнения /1.5/), а в "ультрарелятивистском" пределе для однонаправленного движения системой /0.2/. Как будет показано в третьем разделе статьи, решение системы /1.5/ для фононной переменной $n(\xi, t)$ имеет вид



$$n(\xi, t) = x_\xi = -k^2 \operatorname{sech}^2 k(\xi - \xi_0 - vt)$$

$$\xi_0 = \mathrm{const},$$

интегрируя которое один раз, получим для деформации решетки $x(\xi, t)$ решение в виде "кинка", движущегося со скоростью $v$

$$x(\xi, t) - x_0 = -k \operatorname{th} k(\xi - \xi_0 - vt) \qquad /1.9/$$

Асимптотики /1.9/ на $+\infty$ и $-\infty$ указывают на наличие нетривиальных значений отклонений узлов цепочки

$$x(+\infty) - x_0 = x_+ - x_0 = -k, \quad x(-\infty) - x_0 = x_- - x_0 = k.$$

## 2. ГАМИЛЬТОНОВА СТРУКТУРА И ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКОГО ПРЕДЕЛА

Если продифференцировать второе уравнение в системе /0.1/ по $\xi$, то возникшая система может быть представлена в гамильтоновой форме. Предварительно перепишем ее в виде

$$i\phi_t + \frac{1}{2}\phi_{\xi\xi} - n\phi = 0,$$

$$-i\bar\phi_t + \frac{1}{2}\bar\phi_{\xi\xi} - n\bar\phi = 0,$$

$$u_t = n + (\bar\phi\phi) \qquad /2.1/$$

$$n_t = u_{\xi\xi}, \quad (\bar\phi = \phi^+\Gamma).$$

где мы ввели вспомогательные поля $n(\xi, t) = x_\xi$ и $u(\xi, t)$. Скобка Пуассона между двумя произвольными функционалами A и B определяется следующим образом:

$$\{A, B\} = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \Big\{\frac{\delta A}{\delta n(\xi)}\frac{\delta B}{\delta u(\xi)} - \frac{\delta A}{\delta u(\xi)}\frac{\delta B}{\delta n(\xi)} + i\sum_{k=1}^{N}\Big[\frac{\delta A}{\delta\phi^{(k)}}\frac{\delta B}{\delta\bar\phi^{(k)}} - \frac{\delta A}{\delta\bar\phi^{(k)}}\frac{\delta B}{\delta\phi^{(k)}}\Big]\Big\} \qquad /2.2/$$

В канонически сопряженных переменных

$$\{\phi^{(\alpha)}(\xi), \bar\phi^{(\beta)}(\eta)\} = i\delta_{\alpha\beta}\,\delta(\xi - \eta),$$

$$\{u(\xi), n(\eta)\} = -\delta(\xi - \eta), \qquad /2.3/$$

$$\{\phi^{(\alpha)}(\xi), \phi^{(\beta)}(\eta)\} = \{\phi^{(\alpha)}(\xi), u(\eta)\} = \{\phi^{(\alpha)}(\xi), n(\eta)\} = 0,$$

$$\{\bar\phi^{(\alpha)}(\xi), u(\eta)\} = \{\bar\phi^{(\alpha)}(\xi), n(\eta)\} = 0,$$

$$\{\bar\phi^{(\alpha)}(\xi), \bar\phi^{(\beta)}(\eta)\} = 0.$$

Система /2.1/ примет гамильтонов вид

$$i\phi_t^{(a)} = i\{H, \phi^{(a)}\} = \delta H/\delta\bar{\phi}^{(a)}, \quad i\bar{\phi}_t^{(a)} = i\{H, \bar{\phi}^{(a)}\} = -\delta H/\delta\phi^{(a)},$$

$$u_t = \{H, u\} = \delta H/\delta n, \quad n_t = \{H, n\} = -\delta H/\delta u, \qquad /2.4/$$

где гамильтониан H есть

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \{ \frac{1}{2}(\bar{\phi}_\xi \phi_\xi) + n(\bar{\phi}\phi) + \frac{1}{2}(n^2 + u_\xi^2) \}. \qquad /2.5/$$

Рассмотрим предельные случаи системы /0.1/. Как было отмече-
но выше, в "квазистационарном" пределе она переходит в нели-
нейное уравнение Шредингера с U(p,q) изогруппой. Как
известно[11,17], гамильтониан и уравнения движения в канониче-
ски сопряженных переменных

$$\{\phi^{(a)}(\xi), \bar{\phi}^{(\beta)}(\eta)\} = i\delta_{a\beta}\delta(\xi-\eta), \quad \{\phi^{(a)}(\xi), \phi^{(\beta)}(\eta)\} = \{\bar{\phi}^{(a)}(\xi), \bar{\phi}^{(\beta)}(\eta)\} = 0,$$

имеют вид

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \{ \frac{1}{2}(\bar{\phi}_\xi \phi_\xi) - \frac{1}{2}[(\bar{\phi}\phi) - \rho]^2 \}, \qquad /2.6/$$

$$i\phi_t^{(a)} = i\{H, \phi^{(a)}\} = \delta H/\delta\bar{\phi}^{(a)}, \quad i\bar{\phi}_t^{(a)} = i\{H, \bar{\phi}^{(a)}\} = -\delta H/\delta\phi^{(a)}, \qquad /2.7/$$

где скобка Пуассона $\{\ ,\ \}$ имеет вид

$$\{A, B\} = i \sum_{a=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \left( \frac{\delta A}{\delta\phi^{(a)}} \frac{\delta B}{\delta\bar{\phi}^{(a)}} - \frac{\delta A}{\delta\bar{\phi}^{(a)}} \frac{\delta B}{\delta\phi^{(a)}} \right).$$

В ультрарелятивистском пределе система /0.1/ переходит в сис-
тему /0.2/. Последняя также может быть представлена в гамиль-
тоновой форме со скобкой Пуассона

$$\{A, B\} = i \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \left\{ \frac{\delta A}{\delta n} \frac{\partial}{\partial\xi} \left(\frac{\delta B}{\delta n}\right) + \sum_{a=1}^{N} \left( \frac{\delta A}{\delta\phi^{(a)}} \frac{\delta B}{\delta\bar{\phi}^{(a)}} - \frac{\delta A}{\delta\bar{\phi}^{(a)}} \frac{\delta B}{\delta\phi^{(a)}} \right) \right\},$$

являющейся "кентавром" из скобок Пуассона для уравнения Кор-
тевега-де Вриза и U(p,q) нелинейного уравнения Шредингера.
Коммутационные соотношения для канонически сопряженных пере-
менных $\phi^{(a)}(\xi)$, $\bar{\phi}^{(a)}(\xi)$, $n(\xi)$, $\beta, a = 1, 2, \ldots, N$ имеют вид

$$\{\phi^{(a)}(\xi), \bar{\phi}^{(\beta)}(\eta)\} = i\delta_{a\beta}\delta(\xi-\eta), \quad \{n(\xi), n(\eta)\} = \delta'(\xi-\eta), \quad \{n(\xi), \phi^{(a)}(\xi)\} = 0$$

$$\{n(\xi), \bar{\phi}^{(a)}(\eta)\} = \{\bar{\phi}^{(a)}(\xi), \bar{\phi}^{(\beta)}(\eta)\} = \{\phi^{(a)}(\xi), \phi^{(\beta)}(\eta)\} = 0.$$

Система уравнений /0.2/ принимает вид

$$i\phi_t^{(a)} = i\{H, \phi^{(a)}\} = +\delta H/\delta\bar{\phi}^{(a)}$$

$$i\bar{\phi}_t^{(a)} = i\{H, \bar{\phi}^{(a)}\} = -\delta H/\delta\phi^{(a)} \qquad /2.8/$$

$$n_t = \{H, n\} = -\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\delta H}{\delta n(\xi)}\right),$$

где гамильтониан H равен

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \{ \frac{1}{2}(\bar{\phi}_\xi \phi_\xi) + n(\bar{\phi}\phi) + \frac{1}{2} n^2 \}. \qquad /2.9/$$

Уравнения /2.8/ допускают более компактную форму записи.
Если ввести кососимметричный матричный оператор

$$\hat{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & I_N & 0 \\ -I_N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial\xi \end{pmatrix} \qquad /2.10/$$

где $I_N$ – единичная $N \times N$- матрица и вектор-столбец p с $2N+1$
компонентами

$$p^T = (p_1, p_2, \ldots, p_{2N+1}) = (\phi_1, \ldots, \phi_N, \phi_1^*, \ldots, \phi_N^*, n),$$

то система /2.8/ примет вид

$$ip_{k,t} = \hat{\omega}\, \delta H/\delta p_k, \quad (k = 1, 2, \ldots, 2N+1). \qquad /2.11/$$

Интегрируемость системы /0.2/ связана с тем, что она может
быть представлена в виде условия совместности

$$U_t - V_x + [U, V] = 0 \qquad /2.12/$$

линейной системы уравнений

$$f_x = Uf, \qquad /2.13а/$$

$$f_t = Vf, \qquad /2.13б/$$

где $f(x,t)$ – $(N+2)$ – компонентный вектор $(\Phi = \phi\exp\{i(\frac{1}{2} - x)\})$,

$$U = i\lambda \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & I_N & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2i\lambda} \begin{pmatrix} n & -2i\lambda\bar{\Phi} & n \\ i\Phi & 0 \cdot I_N & i\Phi \\ -n & 2i\lambda\bar{\Phi} & -n \end{pmatrix}.$$

$$V=\frac{i}{2\lambda}\begin{pmatrix} n+\frac{\bar\Phi\Phi}{2}+2\lambda^2(\frac{2\lambda}{3}-2) & -2i\lambda(-\lambda\bar\Phi+\frac{i}{2}\bar\Phi_x+\bar\Phi) & n+\bar\Phi\Phi/2 \\ -i(\lambda\Phi+\frac{i}{2}\Phi_x-\Phi) & -\frac{8i\lambda^3}{3}\cdot I_N & -i(-\lambda\bar\Phi+\frac{i}{2}\bar\Phi_x-\bar\Phi) \\ -(n+\frac{\bar\Phi\Phi}{2}) & 2i\lambda(\lambda\bar\Phi+\frac{i}{2}\bar\Phi_x+\bar\Phi) & -(n+\frac{\bar\Phi\Phi}{2})+2\lambda^2(\frac{2}{3}\lambda+2) \end{pmatrix}$$

/2.14/

Преобразование $U(p,q)$ изогруппы $\phi' = R\phi$, где $R \in U(p,q)$ $\det R \neq 0$, сохраняющее билинейную форму

$$(\bar\Phi'\Phi') = (\bar\Phi\bar R R\Phi) = (\bar\Phi\Phi), \qquad /2.15/$$

где

$$\bar R = \gamma_0 R^+ \gamma_0, \quad \gamma_0 = \mathrm{diag}\,(I_p, -I_q),$$

переносится на линейную задачу

$$U' = \mathcal{R} U \bar{\mathcal{R}}, \quad V' = \mathcal{R} V \bar{\mathcal{R}}, \qquad /2.16/$$

где

$$\mathcal{R} = \mathrm{diag}\,(1, R, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathcal{R}} = \Gamma_0 \mathcal{R}^+ \Gamma_0, \quad \Gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Нахождение солитонных решений, изучение процессов их рассеяния и т.д. проводится методом обратной задачи рассеяния при выборе определенных граничных условий на потенциалы $\phi^{(a)}(\xi, t)$, $n(\xi, t)$, $a = 1, 2, \ldots, N$ на бесконечности. При тривиальных граничных условиях в скалярном $U(1,0)$ случае /N = 1/ такая программа была реализована в [13]. Использованный подход естественно обобщается на векторный $U(p,q)$ случай при тривиальных граничных условиях. Интересно отметить, что с ростом изогруппы растет число бесконечных серий интегралов движения. Система /2.13/ имеет два линейно независимых матричных решения Йоста $\hat f_\pm$, определяющихся своими асимптотиками при $x \to \pm\infty$:

$$\hat f_\pm \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} e^{i\lambda\Sigma x}, \qquad /2.17/$$

где $\Sigma = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & I_N & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Матрица перехода $\hat S(\lambda, t)$ определяется стандартным образом:



$$\hat f_-(x, \lambda) = \hat f_+(x, \lambda)\cdot \hat S(\lambda), \qquad /2.18/$$

и удовлетворяет условию унимодулярности

$$\det \hat S = 1. \qquad /2.19/$$

Эволюция по времени матричных элементов $S_{ij}(\lambda, t)$ определяется из /2.13б/ и подчиняется уравнению

$$\hat S_t = [V_0, \hat S], \quad V_0 = \lim_{x\to\pm\infty} V. \qquad /2.20/$$

Отсюда получаем

$$\dot S_{11}(\lambda, t) = \dot S_{\alpha\beta}(\lambda, t) = \dot S_{(N+2)(N+2)}(\lambda, t) = 0,$$

$$S_{1(N+2)}(\lambda, t) = S_{1(N+2)}(\lambda, 0)e^{4i\lambda t}, \quad S_{(N+2)1}(\lambda, t) = S_{(N+2)1}(\lambda, 0)e^{-4i\lambda t},$$

$$S_{(N+2)\alpha}(\lambda, t) = S_{(N+2)\alpha}\, e^{-2i\lambda(\lambda+1)t}, \quad S_{\alpha(N+2)}(\lambda, t) = S_{\alpha(N+2)}(\lambda, 0)e^{2i\lambda(\lambda+1)t},$$

$$S_{1\alpha}(\lambda, t) = S_{1\alpha}(\lambda, 0)e^{-2i\lambda(\lambda-1)t}, \quad S_{\alpha 1}(\lambda, t) = S_{\alpha 1}(\lambda, 0)e^{2i\lambda(\lambda-1)t},$$

$$(\alpha,\ \beta = 2, 3, \ldots, N+1).$$

Мы видим, что наряду с сохранением элементов $S_{11}$, $S_{(N+2)(N+2)}$, как в скалярном $U(1)$ случае, в векторном $U(p,q)$ случае сохраняется целый блок $N \times N$ элементов $S_{\alpha\beta}(\lambda, t) = S_{\alpha\beta}(\lambda, 0)$. Эти сохраняющиеся элементы являются производящими функционалами высших интегралов движения как локального, так и нелокального типов.

Исследование векторной системы с нетривиальными граничными условиями в рамках МОЗР в настоящее время не представляется возможным, поэтому мы переходим к исследованию односолитонных решений системы /0.1/.

## 3. СОЛИТОНОПОДОБНЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Интегралов, имеющих наглядный физический смысл для системы /0.1/, всего три: число частиц $M$, импульса $P$ и энергия $E$:

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\,(\bar\phi\phi), \qquad /3.1/$$

$$P = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \{ i(\bar\phi_\xi \phi - \bar\phi \phi_\xi) - 2nu_\xi \}, \qquad /3.2/$$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \{ \frac{1}{2}(\bar\phi_\xi \phi_\xi) + n(\bar\phi\phi) + \frac{1}{2}(n^2 + u_\xi^2) \}. \qquad /3.3/$$

Рассмотрим солитоноподобные решения системы /0.1/ с наиболее интересными с физической точки зрения граничными условиями:

Граничные условия на потенциалы $\phi^{(a)}(\xi, t)$ при $\xi \to \pm\infty$ определяются типом магнитного упорядочения в XY цепочках /1.2/. При этом ферромагнитному типу упорядочения, как и слабонеидеальному бозе-газу с притяжением между частицами /11/, соответствуют тривиальные граничные условия $\phi^{(a)}(\xi, t) \xrightarrow[|\xi| \to \infty]{} 0$. Напротив, антиферромагнитному типу упорядочения, как и бозе-газу отталкивающихся частиц, соответсвуют нетривиальные граничные условия $|\phi^{(a)}(\xi, t)|^2 \xrightarrow[|\xi| \to \infty]{} \rho$, связанные с наличием в системе конденсанта плотности $\rho$. Исходя из этого мы выделяем четыре типа граничных условий, соответствующих бозе-газу частиц с притяжением /p - сортов/ и отталкиванием /q -сортов/. Граничные условия на поле $n(\xi, t)$, соответствующие фононной переменной $n = x_\xi$, выбираем из условия применимости гармонического приближения:

$$x(\xi, t) \xrightarrow[|\xi| \to \infty]{} \mathrm{const}, \quad n(\xi, t) \xrightarrow[|\xi| \to \infty]{} 0.$$

1/ Тривиальные граничные условия:

$$\phi^{(m)}(\xi, t) \xrightarrow[|\xi| \to \infty]{} 0, \quad n(\xi, t) \xrightarrow[|\xi| \to \infty]{} 0. \qquad /3.4/$$

Односолитонное решение системы /0.1/ имеет вид

$$\phi^{(m)}(\xi, t) = e^{i(vx + \omega t)} \, a_m \operatorname{sech} kz,$$

$$n(\xi, t) = -k^2 \operatorname{sech}^2 kz, \qquad /3.5/$$

где $z = \xi - \xi_0 - vt$, $\xi_0 = \mathrm{const}$,

$$\omega = (k^2 - v^2)/2, \quad \bar a a = \sum_{a=1}^{p} |a_a|^2 - \sum_{\beta=p+1}^{N} |a_\beta|^2 = k^2(1 - v^2).$$

/Здесь и далее $a = 1, 2, \ldots, p$, $\beta = p + 1, \ldots, N$, $m = 1, 2, \ldots, N$/.

2/ Нетривиальные граничные условия:

$$\phi^{(m)}(\xi, t) = \begin{cases} a_{m0}, & \xi \to \infty \\ a_{m0} e^{i\delta}, & \xi \to -\infty \end{cases}$$

$$n(\xi, t) = 0, \quad |\xi| \to \infty. \qquad /3.6/$$

В этом случае существует односолитонное решение в виде кинка:



$$\phi^{(m)}(\xi, t) = a_m(\operatorname{th} kz + \frac{iv}{k}),$$

$$n(\xi, t) = -k^2 \operatorname{sech}^2 kz, \qquad /3.7/$$

где

$$\bar a a = -k^2(1 - v^2),$$

$$|a_{m0}|^2 = |a_m|^2 (1 + \frac{v^2}{k^2}).$$

3/ "Квазиконстантные" граничные условия:

$$\phi^{(a)}(\xi, t) = \begin{cases} a_{a0}, & \xi \to \infty \\ a_{a0} e^{i\delta_1}, & \xi \to -\infty \end{cases}$$

$$\phi^{(\beta)}(\xi, t) = e^{i(v_0 x - \omega t)} \begin{cases} a_{\beta 0}, & \xi \to \infty \\ a'_{\beta 0} e^{i\delta_2}, & \xi \to -\infty \end{cases}$$

$$n(\xi, t) = 0, \quad |\xi| \to \infty, \quad \delta_{1,2} = \mathrm{const}. \qquad /3.8/$$

Соответствующее односолитонное решение имеет вид:

$$\phi^{(a)}(\xi, t) = a_a(\operatorname{th} kz + \frac{iv}{k}),$$

$$\phi^{(\beta)}(\xi, t) = a_\beta e^{i(v_0 x - \omega t)} [\operatorname{th} kz + \frac{i}{k}(v - v_0)], \qquad /3.9/$$

$$n(\xi, t) = -k^2 \operatorname{sech}^2 kz,$$

где

$$\omega = v_0^2/2, \quad \bar a a = -k^2(1 - v^2)$$

$$|a_{a0}|^2 = |a_a|^2 (1 + \frac{v^2}{k^2}), \quad |a_{\beta 0}|^2 = |a_\beta|^2 [1 + \frac{(v - v_0)^2}{k^2}].$$

4/ "Смешанные" граничные условия:

$$\begin{cases} \phi^{(a)}(\xi, t) = 0 \\ n(\xi, t) = 0 \end{cases} \quad |\xi| \to \infty, \quad \delta = \mathrm{const}. \quad \phi^{(\beta)}(\xi, t) = \begin{cases} a_{\beta 0}, & \xi \to \infty \\ a_{\beta 0} e^{i\delta}, & \xi \to -\infty \end{cases} \qquad /3.10/$$

Односолитонное решение:

$$\phi^{(a)}(\xi, t) = a_a e^{i(vx + \omega t)} \operatorname{sech} kz$$

$$\phi^{(\beta)}(\xi, t) = a_\beta(\operatorname{th} kz + \frac{iv}{k}), \quad n(\xi, t) = -k^2 \operatorname{sech}^2 kz, \qquad /3.11/$$

где

$$\omega = (k^2 - v^2)/2, \quad (\bar{a}a) = \sum_{\alpha=1}^{p} |a_\alpha|^2 - \sum_{\beta=p+1}^{N} |a_\beta|^2 = k^2(1 - v^2),$$

$$|a_{\beta 0}|^2 = |a_\beta|^2 \left(1 + \frac{v^2}{k^2}\right).$$

Эти решения можно интерпретировать на языке "капель" и "пузырей", как в теории бозе-газа [11]. При этом явно прослеживается природа нелинейности, связанная с фононным взаимодействием, и все представленные решения сопровождаются распространением локальной деформации решетки в виде кинка /1.9/.

Перейдем теперь к вычислению интегралов энергии и числа частиц на полученных односолитонных решениях. Как и в [11], зависимость $E(M, v)$ будем называть спектром возбуждения.

Вычисляя функционалы M и E на решении /3.5/ получим

$$E^{(I)} = \frac{(5v^2 - 1)M^3}{24(1 - v^2)^3} + \frac{v^2}{2} M,$$

$$M = 2k(1 - v^2). \qquad /3.12/$$

Отсюда видно, что энергия солитона зависит от двух параметров: v - скорости солитона и M - числа магнонов.

Чтобы найти выражения для интегралов энергии и число частиц на решениях /3.7/, /3.9/ и /3.11/, нормируем их следующим образом /учет нетривиальных граничных условий путем введения в систему химического потенциала/:

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi [(\bar{\phi}(\xi, t)\phi(\xi, t)) - (\bar{\phi}(\infty, t)\phi(\infty, t))], \qquad /3.13/$$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \{H(\phi^{(m)}(\xi, t)) - H(\phi^{(m)}(\infty, t))\}, \qquad /3.14/$$

где

$$H(\phi^{(m)}(\xi, t)) = \frac{1}{2}(\bar{\phi}_\xi(\xi, t)\phi_\xi(\xi, t)) + n(\bar{\phi}\phi) + \frac{1}{2}(n^2 + u_\xi^2).$$

Тогда, вычисляя E и M по формулам /3.13/ и /3.14/ для решений /3.7/, получаем

$$E^{(II)} = \frac{(1 + v^2)M^3}{12(1 - v^2)^3} + v^2 M,$$

$$M = 2k(1 - v^2). \qquad /3.15/$$



В случае граничных условий /3.8/, когда газ частиц с индексом "цвета" $\beta = p + 1, \ldots, N$ движется с постоянной скоростью $v_0$ относительно газа частиц с индексом "цвета" $\alpha = 1, 2, \ldots p$, энергия и число частиц на решениях /3.9/ имеют вид

$$E^{(III)} = \frac{(1 + v^2)M^3}{12(1 - v^2)^3} + v^2 M + v_0\left(\frac{v_0}{2} - v\right) M_2,$$

$$M = 2k(1 - v^2), \qquad /3.16/$$

где

$$M_2 = \frac{2}{k} \sum_{\beta=p+1}^{N} |a_\beta|^2.$$

Наконец, энергия и число частиц, вычисленные для решений /3.11/, имеют вид:

$$E^{(IV)} = \frac{(5v^2 - 1)M^3}{24(1 - v^2)^3} + \frac{v^2 M^2}{8(1 - v^2)} + \frac{M_2 M^2}{8(1 - v^2)^2} + \frac{v^2 M_2}{2},$$

$$M = 2k(1 - v^2), \qquad /3.17/$$

где

$$M_2 = \frac{2}{k} \sum_{\beta=p+1}^{N} |a_\beta|^2.$$

Рассмотрим квазистационарный ($v \ll 1$) и ультрарелятивистский ($v \sim 1$) пределы полученных выражений. В квазистационарном случае, переходя к пределу $v \to 0$ в формулах /3.12/ /3.15/-/3.17/, получаем

$$M = 2k, \qquad /3.18/$$

$$E^{(I)} = -\frac{M^3}{24} + \frac{v^2}{2} M, \quad E^{(II)} = \frac{M^3}{12} + v^2 M,$$

$$E^{(III)} = \frac{M^3}{12} + v^2 M + v_0\left(\frac{v_0}{2} - v\right) M_2, \qquad /3.19/$$

$$E^{(IV)} = -\frac{M^3}{24} + \frac{M_2 M^2}{8} + \frac{v^2}{2} M_2.$$

В стационарном пределе, т.е. при $v = 0$, из выражений /3.12/-/3.17/ для интегралов энергии и числа частиц имеем

$$M = 2k,\quad E^{(I)} = -\frac{M^3}{24},\qquad E^{(II)} = \frac{M^3}{12},$$

$$E^{(III)} = \frac{M^3}{12} + \frac{v_0^2}{2} M_2,\qquad E^{(IV)} = -\frac{M^3}{24} + \frac{M_2 M^2}{8}. \qquad /3.20/$$

Аналогично в ультрарелятивистском случае, переходя к пределу $v \to 1$ в формулах /3.12/-/3.17/, получаем

$$M = 4k(1-v),\quad E^{(I)} = \frac{(5v^2-1)M^3}{192(1-v)^3} + \frac{v^2}{2} M,$$

$$E^{(II)} = \frac{(1+v^2)M^3}{96(1-v)^3} + v^2 M,$$

$$E^{(III)} = \frac{(1+v^2)M^3}{96(1-v)^3} + v^2 M + v_0\left(\frac{v_0}{2} - v\right)M_2,$$

$$E^{(IV)} = \frac{(5v^2-1)}{192(1-v)^3} M^3 + \frac{v^2 M^2}{16(1-v)} + \frac{M_2 M^2}{32(1-v)^2} + \frac{v^2}{2} M_2. \qquad /3.21/$$

В случае $v = 1$, т.е. когда скорость солитонов равна скорости звука, из выражений /3.12/-/3.17/ для энергии и числа частиц соответственно имеем:

$$M = 0,\qquad E^{(I)} = \frac{4}{3} k^3,\qquad E^{(II)} = 4k^3/3,$$

$$E^{(III)} = \frac{4k^3}{3} + v_0\left(\frac{v_0}{2} - 1\right)M_2,\qquad E^{(IV)} = \frac{4k^3}{3} + (1+k^2)M_2/2. \qquad /3.22/$$

Сравнивая спектры /3.19/ с полученными в работе [11] для нелинейного уравнения Шредингера /с учетом различия в нормировке волновой функции $\phi(\xi, t)$/ мы видим, что они полностью совпадают.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение сформулируем основные результаты, полученные в работе. Мы показали, что длинноволновая динамика многоподрешеточной XY цепочки Гейзенберга может быть описана векторным обобщением системы Захарова из теории плазмы /0.1/ с $U(p,q)$ "цветовой" симметрией. При этом p подрешеток системы ферромагнитного типа, а q подрешеток - антиферромагнитного. Различный тип магнитного упорядочения в подрешетках приводит к широкому



набору граничных условий на функцию распределения на бесконечности. Нами представлено четыре типа граничных условий и найдены соответствующие солитоноподобные решения уравнения движения. Вычислены соответствующие классические спектры. Как и в случае $U(p,q)$ НУШ [11], рассматриваемые возбуждения допускают интерпретацию в виде "капель" и "пузырей" как связанных состояний частиц и дырок, и в квазистационарном пределе переходят в соответствующие возбуждения $U(p,q)$ НУШ. Используя изотопический поворот $U(p,q)$, можно также аналогично $U(p,q)$ НУШ построить "дышащие" состояния бионного типа [11]. Существенно отметить при этом, что в НУШ нелинейность, приводящая к наличию связанных состояний, может быть обусловлена как деформациями решетки, так и характером обменного взаимодействия. В нашем случае мы выделили деформации решетки в явном виде, и показали, что они описываются решением в виде кинка, нетривиальные асимптотики для которого обеспечиваются взаимодействием с магнитной подсистемой. Интересен с математической точки зрения /хотя физически находящийся вне пределов применимости приближения/ "ультрарелятивистский" предел для однонаправленного движения $v_{\text{сол}} \sim v_{\text{зв}} = 1$. В этом случае система становится интегрируемой и допускает в принципе точное решение. В этой связи наибольший интерес представляет вопрос динамики "цвета" в процессе столкновения солитонов, который находится в стадии исследования.

Замечательным обстоятельством является то, что хотя исследуемая система не является интегрируемой [18], в предельных случаях $v \ll 1$ и $v \sim 1$ она обладает интегрируемостью.

Авторы выражают глубокую благодарность профессору В.Г.Маханькову за ценные замечания.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров В.Е. и др. Теория солитонов. "Наука", М., 1980; Makhankov V.G. Phys.Rep. 1978, 35, p.1.
2. Давыдов А.С. Солитоны в молекулярных система."Наукова думка", Киев, 1984.
3. Косевич А.М. и др. Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны. "Наукова думка", Киев, 1983.
4. Кодама Г. ТИИЭР, 1981, 69, № 9, с.62; Maki K. Progress in Low Temperature Physics v.VIII, Ed. D.F.Brewer, North-Holland Pub.Company, 1982.
5. Lieb E. et al. Ann. Phys. 1961, 16, p.407.
6. Канторович В.М., Цукерник В.М. ЖЭТФ, 1967, 53, с.1167.
7. Езерская Е.В. ФНТ, 1984, 10, с.991.

8. Езерская Е.В., Цукерник В.М. ФНТ, 1983, 9, с.1082.
9. Su W.P., Schrieffer J.R. and Heeger A.J. Phys.Rev.Lett., 1979, 42, p.1698; Phys. Rev. 1980, B22, p.2099.
10. Makhankov V.G., Pashaev O.K., Kundu A. Physica Scripta, 1983, vol.28, No.2, p.229.
11. Маханьков В.Г., Пашаев О.К. ТМФ, т.53, № 1, с.55.
12. Benney D.J. Stud. Appl. Meth., 1977, vol.56, No.1, p.81.
13. Yajima N., Oikawa M. Progress Theor. Phys., 1976, No.6, p.1719.
14. Shiba H. Prog. Theor.Phys., 1972, 48, p.2171.
15. Манаков С.В. ЖЭТФ, 1974, 67, с.543.
16. Kundu A., Makhankov V.G., Pashaev O.K. JINR, E17-82-602, Dubna, 1982.
17. Пашаев О.К., Сергеенков С.А. ОИЯИ, Р2-83-377, Дубна, 1983.
18. Дегтяров Л.М., Маханьков В.Г., Рудаков Л.И. ЖЭТФ, 1974, т.67, с.553.
Abdulloev Kh., Bogolubsky I., Makhankov V.G. Phys.Lett.A., 1974, vol.48, p.161; Nucl.Fusion, 1975, vol.15, p.21.

Рукопись поступила в издательский отдел
5 мая 1985 года