объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P5-85-118

Г.Н.Афанасьев

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ПОЛЕЗНЫХ СУММ И ИНТЕГРАЛОВ, СОДЕРЖАЩИХ ФУНКЦИИ ЛЕЖАНДРА

Направлено в "J. Computational Physics"

1985

1. В работах [1] мы получили несколькими различными способами компоненты векторного магнитного потенциала /ВМП/ для тороидального соленоида, а также амплитуду рассеяния на них. Ввиду того, что эти компоненты удовлетворяют одним и тем же уравнениям ($\Delta\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$, $\operatorname{div}\vec{A} = 0$) и граничным условиям, они должны совпадать /см., например, [2] /. Из сравнения этих уравнений удается получить аналитические выражения для некоторых сумм и интегралов, содержащих лежандровские функции. Эти выражения отсутствуют в известной справочной и научной математической литературе [3-11]. Мы понимаем, что иногда разложение потенциалов по функциям Лежандра может не иметь смысла /см., например, [12] /, поэтому в наиболее сомнительных случаях сходимость рядов исследуется. Полученные суммы и интегралы могут быть полезны при расчете магнитных полей с конфигурациями, близкими к тороидальным.

2. Поскольку в дальнейшем мы будем иметь дело с тороидальными координатами, кратко опишем их. Цилиндрические координаты связаны с тороидальными следующим образом:

$$\rho = a\frac{\operatorname{sh}\mu}{\operatorname{ch}\mu - \cos\theta}, \quad z = a\frac{\sin\theta}{\operatorname{ch}\mu - \cos\theta}, \quad \phi = \phi,$$

$(-\pi < \theta < \pi, \quad 0 < \mu < \infty, \quad 0 < \phi < 2\pi)$.

При $\mu = \text{const}$ точки ρ, z, ϕ заполняют поверхность тора: $(\rho - d)^2 + z^2 = R^2$. Параметры тора d и R следующим образом связаны с a, μ: $R = \frac{a}{\operatorname{sh}\mu}$, $d = a\cdot\operatorname{cth}\mu$. Точкам на оси z соответствует $\mu = 0$. Плоскости $z = 0$ соответствуют значения $\theta = 0$ при $\rho > a$ и $\theta = \pm\pi$ при $\rho < a$. Пусть соленоиду отвечает значение $\mu = \mu_0$. Тогда при $\mu > \mu_0$ точка ρ, z, ϕ лежит внутри соленоида, а при $\mu < \mu_0$ - вне его. Как известно, магнитное поле равно: $H_\phi = g/\rho$, $H_\rho = H_z = 0$ внутри соленоида и нулю вне его. Здесь g - константа, зависящая от числа витков и силы тока в обмотке соленоида: $g = \frac{2\cdot n\cdot J}{c}$; c - скорость света. В дальнейшем нам понадобится исследовать поведение лежандровских функций при $z \to 1$ и $z \to \infty$. Имеем [3]

$$P_\nu^m(z) \xrightarrow[z\to 1]{} \frac{1}{m!}\frac{\Gamma(\nu+m+1)}{\Gamma(\nu-m+1)}\cdot\left(\frac{z-1}{2}\right)^{m/2}, \qquad /2.1/$$

$$P_\nu^\mu(z) \xrightarrow[z\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu+1-\mu)}\cdot(2z)^\nu, \quad P_{-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\mu) \xrightarrow[\mu\to\infty]{} \frac{2\mu}{\pi}\exp\left(-\frac{\mu}{2}\right),$$

$$Q_\nu^\mu(z) \xrightarrow[z\to\infty]{} \exp(i\mu\pi)\cdot\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+\frac{3}{2})}\cdot\frac{1}{(2z)^{\nu+1}}.$$

3. ВМП тороидального соленоида можно представить в виде суперпозиции потенциалов отдельных витков. В точке с координатами ρ, z, ϕ имеем [1]:

$$A_z(\rho,z) = \int_0^{2\pi}(d - \rho\cos\phi)\cdot F(\rho,z,\phi), \quad A_\rho(\rho,z) = z\cdot\int_0^{2\pi}\cdot\cos\phi\cdot F(\rho,z,\phi) \qquad /3.1/$$

/ввиду аксиальной симметрии A_z и A_ρ не зависят от ϕ, и, кроме того, $A_\phi = 0$/. Функция F равна:

$$F(\rho,z,\phi) = \frac{\sqrt{R}\,g}{2\pi}\frac{1}{[(\rho\cos\phi - d)^2 + z^2]^{3/4}}\,Q_{\frac{1}{2}}\left\{\frac{\rho^2 + z^2 + d^2 - 2d\rho\cos\phi + R^2}{2R[(\rho\cos\phi - d)^2 + z^2]^{1/2}}\right\}.$$

Потенциалы A_ρ, A_z могут быть также найдены в результате решения уравнения $\Delta\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}$ /которое разделяется в тороидальных координатах/. Окончательный ответ следующий [1]:

$$A_\rho = \frac{2\sqrt{2}g}{\pi}\cdot\sqrt{\operatorname{ch}\mu - \cos\theta}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}R_n^1(\mu)\cdot\sin n\theta,$$

$$A_z = \frac{2\sqrt{2}g}{\pi}\cdot\sqrt{\operatorname{ch}\mu - \cos\theta}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}R_n^0(\mu)\cdot\cos n\theta. \qquad /3.2/$$

Функции $R_n(\mu)$ равны:

$$R_n^0 = A_n(\mu_0)\cdot P_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\mu_0)\cdot Q_{n-\frac{1}{2}},$$

$$R_n^1 = -Q_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\mu_0)\cdot[P_{n+\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\mu_0) - P_{n-\frac{3}{2}}(\operatorname{ch}\mu_0)]\cdot Q^1_{n-\frac{1}{2}} \qquad /3.3/$$

внутри соленоида $(\mu > \mu_0)$ и

$$R_n^0 = A_n(\mu_0)\cdot Q_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\mu_0)\cdot P_{n-\frac{1}{2}},$$

$$R_n^1 = -Q_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\mu_0)\cdot[Q_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\mu_0) - Q_{n-\frac{3}{2}}(\operatorname{ch}\mu_0)]\cdot P^1_{n-\frac{1}{2}} \qquad /3.4/$$

- вне его $(\mu < \mu_0)$.

Здесь

$$A_n(\mu_0) = \frac{1}{1+\delta_{n,0}}\cdot C_n(\mu_0), \quad C_n(\mu_0) =$$

$$= (n+\tfrac{1}{2})\,Q_{n+\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\mu_0) - (n-\tfrac{1}{2})\,Q_{n-\frac{3}{2}}(\operatorname{ch}\mu_0).$$

В соотношениях /3.3/, /3.4/ подразумевается, что аргумент функций Лежандра равен $\mathrm{ch}\,\mu$, если он не указан явно. Этого соглашения мы будем придерживаться и впредь. Выражения /3.1/ и /3.2/ удовлетворяют одним и тем же уравнениям и граничным условиям /легко убедиться, например, что $\mathrm{div}\,\vec{A} = U$, $H_\phi = (\mathrm{rot}\,\vec{A})_\phi = g/\rho$ внутри соленоида и нулю - вне его/. Непосредственное сравнение выражений /3.1/ и /3.2/ мало что дает ввиду их малообозримости. Поэтому рассмотрим частные случаи. Положим в /3.1/ $\rho = 0$. Тогда для компоненты A_z имеем на оси z:

$$A_z(\rho = 0, z) = \frac{R^{1/2}\, gd}{(d^2 + z^2)^{3/4}} \cdot Q_{\frac{1}{2}}\left(\frac{d^2 + z^2 + R^2}{2R\sqrt{d^2 + z^2}}\right). \qquad /3.5/$$

Положим в выражении /3.2/ для A_z координату $\mu = 0$ /это соответствует оси z/. Учитывая поведение функций Лежандра $P_\nu^m(\mathrm{ch}\,\mu)$ при $\mu \to 0$, находим в результате сравнения /3.5/ и /3.2/:

$$\sqrt{1 - \cos\theta} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot Q_{n-\frac{1}{2}}(\mathrm{ch}\,\mu_0) \cdot \cos n\theta =$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \frac{\mathrm{ch}\,\mu_0}{\left(1 + \frac{\mathrm{sh}^2 \mu_0}{1 - \cos\theta}\right)^{3/4}} \cdot Q_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1 + \frac{\mathrm{sh}^2 \mu_0}{1 - \cos\theta}}{\sqrt{1 + 2\frac{\mathrm{sh}^2 \mu_0}{1 - \cos\theta}}}\right). \qquad /3.6/$$

При частных значениях θ из /4.2/ получаются замкнутые выражения для бесконечных сумм, содержащих функции Лежандра. Положим $\theta = \pi$. Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot Q_{n-\frac{1}{2}} \cdot Q_{n+\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{8} \frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}\,\mu}} Q_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1 + \mathrm{ch}^2\mu}{2\,\mathrm{ch}\,\mu}\right). \qquad /3.7/$$

В обеих частях мы заменили $\mu_0 \to \mu$. При $\theta \to 0$ обе части /3.6/ убывают как θ^3. Учитывая соотношения /2.1/ и приравнивая коэффициенты к этому члену, получаем соотношение

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 Q_{n-\frac{1}{2}} \cdot Q_{n+\frac{1}{2}} = \frac{\pi^2}{32} \frac{\mathrm{ch}\,\mu}{\mathrm{sh}^3 \mu}. \qquad /3.8/$$

Не столь изящно выглядит соотношение /3.6/ при $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$$\frac{1}{2} Q_{-\frac{1}{2}} \cdot Q_{\frac{1}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n Q_{2n-\frac{1}{2}} \left[\left(2n + \frac{1}{2}\right) Q_{2n+\frac{1}{2}} - \left(2n - \frac{1}{2}\right) Q_{2n-\frac{3}{2}}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \frac{\mathrm{ch}\,\mu}{(\mathrm{ch}\,2\mu)^{3/4}} Q_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1 + \mathrm{ch}\,2\mu}{2\sqrt{\mathrm{ch}\,2\mu}}\right). \qquad /3.9/$$

Наиболее сомнительным с точки зрения сходимости выглядит ряд /3.8/ из-за множителя $(n + \frac{1}{2})^2$. Убедимся, что ряд /3.8/ сходится. При фиксированном μ и $\nu \to \infty$ имеем /3/:

$$Q_\nu(\mathrm{ch}\,\mu) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\,\mathrm{sh}\,\mu}} \exp(-\mu\nu).$$

Таким образом, при $n \to \infty$:

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \cdot Q_{n-\frac{1}{2}} \cdot Q_{n+\frac{1}{2}} \approx \frac{\pi}{2\,\mathrm{sh}\,\mu} [n \cdot \exp(-\mu n)]^2 = \frac{\pi}{2\,\mathrm{sh}\,\mu} \cdot \exp[2(\ln n - \mu n)]. \qquad /3.10/$$

Из /3.10/ следует, что отношение двух соседних членов в сумме /3.8/ равно $\exp(-\mu)$ при $n \to \infty$, т.е. ряд /3.8/ сходится при любом конечном $\mu > 0$ как геометрическая прогрессия.

Из /3.6/ следует также замкнутое выражение для интеграла:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta}{\sqrt{1 - \cos\theta}} \frac{1}{\left(1 + \frac{2\,\mathrm{sh}^2\mu}{1 - \cos\theta}\right)^{3/4}} \cdot Q_{1/2}(x) = \frac{2\sqrt{2}}{\mathrm{ch}\,\mu} \cdot \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) Q_{n+\frac{1}{2}} - \right.$$

$$\left. - \left(n - \frac{1}{2}\right) Q_{n-\frac{3}{2}}\right] Q_{n-\frac{1}{2}} \qquad \left(x = \frac{1 + \frac{\mathrm{sh}^2\mu}{1 - \cos\theta}}{\left[1 + 2\frac{\mathrm{sh}^2\mu}{1 - \cos\theta}\right]^{1/2}}\right). \qquad /3.11/$$

Перейдем теперь к компоненте потенциала A_ρ. При $\rho \to 0$ /т.е. по мере приближения к оси z/ компонента A_ρ убывает пропорционально первой степени μ. Приравнивая к ней коэффициенты, получаем соотношение /при этом опять-таки меняем $\mu_0 \to \mu$):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^2 - \frac{1}{4}\right) \cdot Q_{n-\frac{1}{2}} \cdot \left(Q_{n+\frac{1}{2}} - Q_{n-\frac{3}{2}}\right) \cdot \sin n\theta = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \mathrm{ch}\,\mu \cdot \mathrm{sh}^2\mu \frac{\sin\theta}{(1 - \cos\theta)^{5/2}} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{\left(1 + 2\frac{\mathrm{sh}^2\mu}{1 - \cos\theta}\right)^{7/4}} \cdot \left[2Q_{1/2}^1(x) - 3Q_{1/2}(x)\right]. \qquad /3.12/$$

Снова придаем θ в /3.12/ частные значения. При $\theta \to 0$ из /3.12/ вытекает /3.8/, т.е. не получаем ничего нового. При $\theta = \pi$ получается новое соотношение:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1) \cdot Q_{n-\frac{1}{2}} \cdot Q_{n+\frac{1}{2}} = -\frac{\pi}{32} \cdot \frac{1}{(\mathrm{ch}\,\mu)^{5/4}}.$$

$$\cdot [3\cdot(1+ch^2\mu)\,Q_{1/2}(x_0) + 2\,sh^2\mu\, Q^1_{1/2}(x_0)]\,, \quad (x_0 = \frac{1+ch^2\mu}{2\,ch\mu})\,. \qquad /3.13/$$

Как и в случае /3.8/, легко убедиться в сходимости ряда /3.13/.

Наконец, при $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+\frac{1}{2})\cdot(2n+\frac{3}{2})\cdot(-1)^n\cdot Q_{2n+\frac{1}{2}}(Q_{2n+\frac{3}{2}} - Q_{2n-\frac{3}{2}}) =$$

$$= \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\cdot ch\mu\cdot sh^2\mu\,\frac{1}{(ch\,2\mu)^{7/4}}\cdot[2Q^1_{1/2}(y) - 3Q_{1/2}(y)]\,, \quad (y = \frac{ch^2\mu}{\sqrt{ch\,2\mu}})\,. \qquad /3.14/$$

4. Следующее простое соотношение получается путем приравнивания интеграла $\oint A_\ell\, d\ell$ вдоль замкнутого контура, проходящего через отверстие соленоида, потоку магнитного поля через поперечное сечение соленоида $(\Phi = 2\pi g\,(d - \sqrt{d^2 - R^2}) = 2\pi g a\,(cth\mu_0 - 1))$. Выбирая для определенности в качестве контура интегрирования контур, отвечающий фиксированным $\mu\,(<\mu_0)$ и ϕ, получаем

$$\oint A_\ell\, d\ell = a\int_{-\pi}^{\pi} A_\Theta \frac{d\theta}{ch\mu - \cos\theta}\,. \qquad /4.1/$$

Здесь A_Θ – компонента $\vec{A}$, касательная к выбранному контуру: $A_\Theta = -[\,sh\mu\cdot\sin\theta\, A_\rho + (1 - ch\mu\cos\theta)\cdot A_z\,]\cdot(ch\mu - \cos\theta)^{-1}$. Интегрируя /4.1/ и приравнивая результат Φ, приходим к соотношению:

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_{n-\frac{1}{2}}\cdot Q_{n+\frac{1}{2}} = \frac{\pi^2}{4}\cdot(cth\mu - 1)\,. \qquad /4.2/$$

Это соотношение может быть доказано без апелляции к физическим аспектам задачи, для чего рассмотрим интеграл $\int_0^{2\pi} d\theta \frac{\cos\theta}{ch\mu - \cos\theta}$. Непосредственное интегрирование дает $2\pi(cth\mu - 1)$. Представим подынтегральное выражение в виде произведения двух сомножителей: $\frac{\cos\theta}{\sqrt{ch\mu - \cos\theta}}\cdot\frac{1}{\sqrt{ch\mu - \cos\theta}}$. Каждый из них разлагаем в ряд по $\cos n\theta$ /3/ и интегрируем. В итоге получаем $\frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} Q_{n-1/2}\cdot Q_{n+1/2}$. Сравнивая результаты интегрирования, приходим к /4.2/.

Следующий интеграл, взятый вдоль оси:

$$\int_{-\infty}^{\infty} A\,(\rho = 0, z)\, dz\,, \qquad /4.3/$$

также должен быть равен потоку магнитного поля. В этом легко убедиться, положив $\mu = 0$ в выражении /3.2/ для A_z и проинтегрировав по θ $(dz = -\frac{d\theta}{1-\cos\theta})$. С другой стороны, в /4.3/ можно подставить A_z из /3.1/:

$$\sqrt{R}\,d\int_0^{\infty}\frac{dz}{(d^2+z^2)^{3/4}}\cdot Q_{1/2}(\frac{d^2+z^2+R^2}{2R\sqrt{d^2+z^2}}) = \pi\,(d - \sqrt{d^2 - R^2})$$

или в безразмерных переменных

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^{3/4}}\,Q_{1/2}(\frac{1+r^2+x^2}{2r\sqrt{1+x^2}}) = \frac{\pi}{\sqrt{r}}\,(1 - \sqrt{1-r^2})\,, \quad (r \le 1)\,. \qquad /4.4/$$

5. Вместо решения уравнения Пуассона можно рассмотреть следующую эквивалентную систему уравнений:

$$H_\rho = H_z = 0\,, \quad H_\phi = \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} = \frac{g}{\rho}\cdot\theta\,[R - \sqrt{(\rho - d)^2 + z^2}\,]\,,$$

$$div\,\vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho) + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0\,. \qquad /5.1/$$

Последнее условие автоматически выполнено, если

$$A_\rho = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial z}\,, \quad A_z = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\,. \qquad /5.2/$$

Подставляя /5.2/ в первое из выражений /5.1/, получаем уравнение второго порядка для ψ. Его решениями являются:

$$\psi = -\frac{4\sqrt{2}\,g}{\pi}\cdot sh\mu\cdot\sqrt{ch\mu - \cos\theta}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}}\,\psi_n(\mu)\cdot\sin n\theta\,, \qquad /5.3/$$

причем функции $\psi_n(\mu)$ равны:

$$\psi_n = Q^1_{n-\frac{1}{2}}\cdot\int_{\mu_0}^{\mu} \cdot P^1_{n-\frac{1}{2}}\cdot Q^1_{n-\frac{1}{2}}\frac{d\mu}{sh\mu} + P^1_{n-\frac{1}{2}}\int_{\mu}^{\infty}(Q^1_{n-\frac{1}{2}})^2\frac{d\mu}{sh\mu}$$

внутри соленоида $(\mu > \mu_0)$, и

$$\psi_n = P^1_{n-\frac{1}{2}}\int_{\mu_0}^{\infty}\frac{d\mu}{sh\mu}(Q^1_{n-\frac{1}{2}})^2 \qquad /5.4/$$

– вне его $(\mu < \mu_0)$.

Подставляя ψ_n в /5.3/ и далее в /5.2/ и сравнивая с ранее найденными выражениями для потенциалов /3.2/, получаем систему рекуррентных соотношений для интегралов, входящих в /5.4/. Разрешая ее, получаем:

$$\int_\mu^\infty (Q^1_{n-1/2})^2 \frac{d\mu}{\operatorname{sh}\mu} = \int_\mu^\infty (Q^1_{1/2}) \frac{d\mu}{\operatorname{sh}\mu} - \sum_{k=1}^{n} (k+\frac{1}{2}) Q_{k+1/2} \cdot Q_{k-1/2},$$

/5.5/

$$\int_\mu^\infty Q^1_{n-1/2} \cdot P^1_{n-1/2} \frac{d\mu}{\operatorname{sh}\mu} = \int_\mu^\infty P^1_{1/2} \cdot Q^1_{1/2} \frac{d\mu}{\operatorname{sh}\mu} - \sum_{k=1}^{n} (k+\frac{1}{2}) Q_{k+1/2} \cdot P_{k-1/2}.$$

6. Следующие аналитические выражения для сумм и интегралов обязаны возможности представления ВМП вне соленоида /т.е. там, где $\vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A} = 0$ / в виде градиента некоторой функции χ /условно именуемой в дальнейшем производящей/. Ввиду того, что $\oint A_\ell \, d\ell$ по некоторым замкнутым контурам отличен от нуля, функция χ многозначна /точнее, разрывна/. Для тонкого соленоида ($\mu_0 >> 1$) функция χ определяется с помощью следующих соотношений, вытекающих из /3.2/:

$$\frac{A_\Theta}{\operatorname{ch}\mu - \cos\theta} = \frac{g\pi}{\sqrt{2}} \cdot \exp(-2\mu_0) \frac{P_{-1/2} \cdot \cos\theta - P_{1/2}}{\sqrt{\operatorname{ch}\mu - \cos\theta}} = \frac{1}{a}\frac{\partial \chi_0}{\partial\theta},$$

/6.1/

$$\frac{A_\mu}{\operatorname{ch}\mu - \cos\theta} = \sqrt{2}\pi g \cdot \exp(-2\mu_0) \frac{\sin\theta}{\sqrt{\operatorname{ch}\mu - \cos\theta}} \cdot P^1_{-1/2} = \frac{1}{a}\frac{\partial \chi_0}{\partial\mu}.$$

Интегрируем /6.1/ по θ и μ и результат приравниваем. В итоге получаем

$$\chi_0 = ga \cdot \exp(-2\mu_0)\{-2\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n} \cdot [P_{-1/2}(Q_{n+\frac{1}{2}} + Q_{n-\frac{3}{2}}) - 2P_{1/2} \cdot Q_{n-\frac{1}{2}}]\} =$$

/6.2/

$$= -2ga \cdot \exp(-2\mu_0)[\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\theta \int_0^\mu P^1_{-1/2}(Q_{n+\frac{1}{2}} - Q_{n-\frac{3}{2}}) d\mu + \pi(1-\cos\frac{\theta}{2}) \cdot \operatorname{sgn}\theta].$$

Принимая во внимание соотношение [6]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\sin n\theta}{n^2 - \frac{1}{4}} = 2\theta - 2\pi(1-\cos\frac{\theta}{2}) \cdot \operatorname{sgn}\theta$$

и сравнивая коэффициенты при $\sin n\theta$, находим:

$$\int_0^\mu P^1_{-1/2} \cdot Q^1_{n-\frac{1}{2}} \operatorname{sh}\mu \, d\mu = \frac{1}{4}(\frac{1}{4n^2} - 1) \cdot [P_{-1/2}(Q_{n+\frac{1}{2}} + Q_{n-\frac{3}{2}}) -$$

$$- 2P_{1/2} \cdot Q_{n-\frac{1}{2}}] + \frac{1}{4n^2}, \quad (n \geq 1).$$

/6.3/

Устремляем $\mu \to \infty$:

$$\int_0^\infty P^1_{-\frac{1}{2}} Q^1_{n-\frac{1}{2}} \operatorname{sh}\mu \, d\mu = \frac{1}{4n^2}.$$

/6.4/

При нахождении производящей функции для конечного соленоида возникает [1] система конечно-разностных уравнений для интегралов $F_n = \int_0^\mu (Q_{n-\frac{1}{2}})^2 \operatorname{sh}\mu \, d\mu$, $C_n = \int_0^\mu P_{n-\frac{1}{2}} \cdot Q_{n-\frac{1}{2}} \operatorname{sh}\mu \, d\mu$. Условие совместности этой системы определяет интегралы

$$n \cdot F_n = \operatorname{sh}\mu \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} \cdot (Q_{k+\frac{1}{2}} \cdot Q^1_{k+\frac{1}{2}} - Q_{k-\frac{1}{2}} Q^1_{k-\frac{1}{2}}) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (k+\frac{1}{2})^{-2},$$

/6.5/

$$n \cdot C_n = \operatorname{sh}\mu \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} \cdot (Q_{k+\frac{1}{2}} \cdot P^1_{k+\frac{1}{2}} - Q_{k-\frac{1}{2}} \cdot P^1_{k-\frac{1}{2}}).$$

При $\mu \to \infty$ первое из этих соотношений переходит в известное [3,5]:

$$2n \int_0^\infty (Q_{n-\frac{1}{2}})^2 \operatorname{sh}\mu \, d\mu = \frac{\pi^2}{2} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+\frac{1}{2})^2},$$

/6.6/

а обе части второго расходятся как $\mu/2$. При $\mu_0 \to \infty$ производящая функция χ для конечного соленоида должна переходить в χ_0 /см. /6.2//. Это приводит к условию [1]:

$$-\frac{1}{4} S_n = 2n \cdot (P_{n-\frac{1}{2}} \cdot F_n - Q_{n-\frac{1}{2}} \cdot C_n) + [\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+\frac{1}{2})^2} - \frac{\pi^2}{2}] \cdot P_{n-\frac{1}{2}}$$

/6.7/

Здесь S_n - следующая сумма:

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} [(Q_{k+\frac{1}{2}} + Q_{k-\frac{3}{2}}) P_{-1/2} - 2Q_{k-\frac{1}{2}} \cdot P_{1/2}](Q_{|k-n|-\frac{1}{2}} - Q_{k+n-\frac{1}{2}}).$$

Само соотношение /6.7/ малообозримо, но из него удается получить несколько полезных выражений. В пределе малых μ оно вырождается в следующее:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+\frac{1}{2})^2} - \frac{\pi^2}{2} = -\frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{1}{k^2 - \frac{1}{4}} (\frac{1}{k+n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{k+n-\frac{3}{2}} + \dots + \frac{1}{k-n+\frac{3}{2}}).$$

Придавая n частные значения, получаем известные суммы [7]:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k^2 - \frac{1}{4})^2} = \pi^2 - 8, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - (n+\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2}.$$

При $\mu \to \infty$ из /6.7/ вытекают два соотношения. Одно из них сводится к /6.6/, а второе:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\Gamma(k-\frac{1}{2})\cdot\Gamma(n-k+\frac{1}{2})}{\Gamma(k+1)\cdot\Gamma(n-k+1)} = 2\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)}, \qquad /6.8/$$

хотя и напоминает формулу Дуголла [3], но не сводится к ней.

Итак, в данной работе просуммированы ряды /3.7/-/3.9/ /3.13/, /3.14/, /4.2/, получены аналитические выражения для интегралов /3.11/, /4.4/, /6.3/, /6.4/, /6.5/. Мы уже упоминали, что они отсутствуют в цитированной математической литературе. Кроме того, соотношения /5.5/ позволяют выразить интегралы $A_n = \int_{\mu}^{\infty} (Q^1_{n-\frac{1}{2}})^2 \cdot \frac{d\mu}{sh\,\mu}$, $B_n = \int_{\mu}^{\infty} P^1_{n-\frac{1}{2}} \cdot Q^1_{n-\frac{1}{2}} \frac{d\mu}{sh\,\mu}$ через A_0, B_0.

ЛИТЕРАТУРА

1. Afanasiev G.N. JINR, E2-83-339, Dubna, 1983; JINR, E4-84-65, Dubna, 1984.
2. Стрэттон Дж. Теория электромагнетизма. Гостехиздат, М., 1948.
3. Беймен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, "Наука", М., 1973, т.1.
4. Гобсон Е.В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. ИЛ, М., 1952.
5. Robin L. Fonctions Spheriques de Legendre et Fonctions Spheroidales. t-1-3, Gauthier-Villars, Paris, 1957-1959.
6. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралом, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1962.
7. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев. Интегралы и ряды. "Наука", М., 1981, т.1, т.2, 1983.
8. Magnus W., Oberhettinger F., Soni R.P. Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics "Springer", Berlin, 1966.
9. Hansen E.R. A Table of Series and Products. "Prentice-Hall", H.Y., 1975.
10. Абрамович М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. "Наука", М., 1979.
11. Van Haeringen H., Kuk L.P. J.Math.Phys., 1981, 22, p. 2482; van Hacringen H. J.Math.Phys., 1982, 23, p. 964; ibid 1983, 24, p. 1054.
12. Brazier-Smith P.R. J.Comput.Phys., 1984, 54, p. 524.

Рукопись поступила в издательский отдел
19 февраля 1985 года.

Афанасьев Г.Н. Р5-85-118

Аналитические выражения для некоторых полезных сумм и интегралов, содержащих функции Лежандра

Получены простые замкнутые аналитические выражения для некоторых интегралов и бесконечных сумм, содержащих функции Лежандра. Эти выражения отсутствуют в математической литературе. Предельные значения их в большинстве случаев переходят в известные. Полученные суммы и интегралы могут быть полезны при расчете магнитных полей с конфигурациями, близкими к тороидальным /например, в установках типа "Токамак"/.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1985

Перевод Т.Ю.Думбрайс