объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р5-84-784

В.И.Иноземцев, Д.В.Мещеряков*

ФАКТОРИЗАЦИЯ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ ОСНОВНОГО СОСТОЯНИЯ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ, СВЯЗАННЫХ С ПОЛУПРОСТЫМИ АЛГЕБРАМИ ЛИ

Направлено в "Physics Letters A"

---

* Московский государственный университет

1984

Впервые вполне интегрируемая модель N взаимодействующих квантовых частиц на прямой, волновая функция основного состояния которой факторизована, была рассмотрена Сазерлендом [1]. В дальнейшем свойство факторизации волновой функции основного состояния было установлено для систем с потенциалом Калоджеро [2], выражающимся через эллиптические функции Вейерштрасса. Ольшанецкий и Переломов [3] установили, что потенциалы Сазерленда и Калоджеро обладают скрытой симметрией: они связаны с системой корней алгебры A_{N-1} и являются инвариантами соответствующей группы Вейля. Связь квантовых интегрируемых систем с полупростыми алгебрами Ли позволила распространить результаты [1,2] на некоторые другие типы потенциалов взаимодействия [3].

Факторизация волновой функции основного состояния может иметь место и при наличии взаимодействия с внешним полем. Первоначально этот факт был установлен для системы Калоджеро с потенциалом бинарного взаимодействия $V(\xi) = a/\xi^2$ во внешнем поле $W(\xi) = \beta\xi^2$ [2].

В предыдущей работе [4] нами было показано, что волновая функция основного состояния факторизована и в более общем случае $V(\xi) = a/\mathrm{sh}^2 a\xi$, $W(\xi) = A\,\mathrm{ch}\,4a\xi + B\,\mathrm{sh}\,2a\xi + C\,\mathrm{ch}\,2a\xi$. Здесь мы распространим результаты [4] на наиболее общий случай квантовых систем, связанных с полупростыми алгебрами Ли.

Гамильтонианы наиболее общего вида соответствуют системам корней $\{B_N, C_N, BC_N\}$ и выглядят следующим образом [5]:

$$H = \sum_{j=1}^{N} \{\frac{p_j^2}{2} + W(x_j)\} + \sum_{j>k} \{V(x_j - x_k) + V(x_j + x_k)\}. \qquad /1/$$

Все возможные наборы функций $\{W, V\}$, при которых классические системы с гамильтонианом /1/ вполне интегрируемы, были найдены в [5,6].

Рассмотрим условия, при которых решения уравнения Шредингера

$$\{\sum_{j=1}^{N} [-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + W(x_j)] + \sum_{j>k}[V(x_j - x_k) + V(x_j + x_k)]\}\psi_0 = E_0\psi_0 \qquad /2/$$

обладают свойством факторизации:

$$\psi_0(x_1, \dots, x_N) = \prod_{j=1}^{N} q(x_j) \prod_{j>k} c(x_j - x_k)\, c(x_j + x_k). \qquad /3/$$

Введем обозначения

$$(\ln c(\xi))' = \alpha(\xi), \quad (\ln q(\xi))' = \gamma(\xi). \qquad /4/$$

Мы считаем, что $c(\xi)$ и $q(\xi)$ - четные, а $\alpha(\xi)$ и $\gamma(\xi)$ - нечетные функции. Подстановка анзаца /3/ в /2/ приводит к следующему функциональному уравнению, содержащему 4 неизвестные функции:

$$[\gamma(\xi) - \gamma(\eta)]\,\alpha(\xi - \eta) + [\gamma(\xi) + \gamma(\eta)]\,\alpha(\xi + \eta) = r(\xi) + r(\eta) + \beta(\xi - \eta) + \beta(\xi + \eta).$$

Дифференцируя обе части /5/ последовательно по ξ и по η и применяя к ним операцию $\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}$, получаем уравнение для двух функций:

$$[\nu(\xi + \eta) - \nu(\xi - \eta)][\delta''(\xi) - \delta''(\eta)] + 2[\nu''(\xi + \eta) - \nu''(\xi - \eta)][\delta(\xi) - \delta(\eta)]$$
$$+ 3\nu'(\xi + \eta)[\delta'(\xi) - \delta'(\eta)] - 3\nu'(\xi - \eta)[\delta'(\xi) + \delta'(\eta)] = 0, \qquad /6/$$

где

$$\nu(\xi) = \alpha'(\xi), \quad \delta(\xi) = \gamma'(\xi)'. \qquad /7/$$

Это уравнение с точностью до знака совпадает с функциональным уравнением, возникающим при исследовании двухчастичных интегрируемых систем [7]. Решения /6/ имеют вид:

$$\mathrm{I.}\quad \nu(\xi) = \frac{\bar\lambda_1 a^2}{\mathrm{sh}^2 a\xi} + \frac{\bar\lambda_2 a^2}{\mathrm{sh}^2 \frac{a\xi}{2}}; \quad \delta(\xi) = \bar\lambda_3 a^2\,\mathrm{ch}\,2a\xi, \qquad /8/$$

$$\mathrm{II.}\quad \nu(\xi) = \bar\lambda_1 \wp(\xi) + \bar\lambda_2; \quad \delta(\xi) = \bar\lambda_3 \wp(\xi) + \bar\lambda_4 \wp(\xi + \omega_1)$$
$$+ \bar\lambda_5 \wp(\xi + \omega_2) + \bar\lambda_6 \wp(\xi + \omega_1 + \omega_2), \qquad /9/$$

где $\bar\lambda_1, \dots, \bar\lambda_6$ - произвольные постоянные, а ω_1 и ω_2 - полупериоды функции Вейерштрасса $\wp(\xi)$.

Подставляя /8/ и /9/ в /5/, с учетом /7/ находим, что функциональное уравнение /5/ имеет следующие решения:

$$\mathrm{I.}\quad \alpha(\xi) = \bar\lambda_1 a\,\mathrm{cth}\,a\xi + \bar\lambda_2 a\,\mathrm{cth}\frac{a\xi}{2}; \quad \gamma(\xi) = \bar\lambda_3 a\,\mathrm{sh}\,2a\xi;$$
$$r(\xi) = 2(\bar\lambda_1 + \bar\lambda_2)\bar\lambda_3 a^2\,\mathrm{ch}\,2a\xi; \quad \beta(\xi) = 2\bar\lambda_2\bar\lambda_3 a^2\,\mathrm{ch}\,a\xi. \qquad /10/$$

II. $$\alpha(\xi) = \lambda\,\zeta(\xi) + \mu\xi,$$

$$\gamma(\xi) = \tilde\lambda\zeta(\xi) + \tilde\lambda_1\zeta_1(\xi) + \tilde\lambda_2\zeta_2(\xi) + \tilde\lambda_3\zeta_3(\xi) + \mu_1\xi, \qquad /11/$$

$$\tau(\xi) = 2\mu\xi\gamma(\xi) - \mu\mu_1\xi^2 + \lambda[\tilde\lambda(\zeta^2(\xi) - \wp(\xi)) +$$

$$+ \tilde\lambda_1(\zeta_1^2(\xi) - \wp_1(\xi)) + \tilde\lambda_2(\zeta_2^2(\xi) - \wp_2(\xi)) + \tilde\lambda_3(\zeta_3^2(\xi) - \wp_4(\xi))],$$

$$\beta(\xi) = \frac{1}{2}\mu\mu_1\xi^2 + \lambda\mu_1\xi\zeta(\xi) + \frac{\lambda(\lambda + \tilde\lambda_1 + \tilde\lambda_2 + \tilde\lambda_3)}{2}[\zeta^2(\xi) - \wp(\xi)].$$

Здесь $\zeta(\xi) - \zeta$ – функция Вейерштрасса, и

$$\zeta_i(\xi) = \zeta(\xi + \omega_i) - \zeta(\omega_i),\ \wp_i(\xi) = \wp(\xi + \omega_i),\ i = 1, 2, 3,\ \omega_3 = \omega_1 + \omega_2,$$

а λ, μ, μ_1, $\tilde\lambda$, $\tilde\lambda_1$, $\tilde\lambda_2$, $\tilde\lambda_3$ – произвольные постоянные.

Можно убедиться, что решение /10/ определяет волновую функцию основного состояния лишь в случаях $\tilde\lambda_1 = 0$ или $\tilde\lambda_2 = 0$, т.е. когда оно сводится к /11/.

Рассмотрим решение /11/. Потенциалы $V(\xi)$ и $W(\xi)$ определяются через функции $\alpha(\xi)$, $\beta(\xi)$, $\gamma(\xi)$, $\tau(\xi)$ с точностью до произвольных постоянных:

$$V(\xi) = \alpha'(\xi) + (N-1)\alpha^2(\xi) + \beta(\xi) - \lambda^2(N-2)\wp(\xi) + \text{const},$$

$$W(\xi) = \frac{1}{2}(\gamma'(\xi) + \gamma^2(\xi)) + (N-1)\tau(\xi) + \text{const}. \qquad /12/$$

При этом волновая функция основного состояния выглядит следующим образом:

$$\psi_0(x_1, \ldots, x_N) = \prod_{j=1}^{N} |\sigma(x_j)|^{\tilde\lambda} \cdot |\sigma_1(x_j)|^{\tilde\lambda_1} \cdot |\sigma_2(x_j)|^{\tilde\lambda_2} \cdot |\sigma_3(x_j)|^{\tilde\lambda_3} \times$$

$$\times\, e^{\frac{\mu_1}{2}x_j^2} \prod_{j>k} |\sigma(x_i - x_k)|^{\lambda} \cdot |\sigma(x_j + x_k)|^{\lambda}\, e^{\mu(x_j^2 + x_k^2)}, \qquad /13/$$

где $\sigma(\xi) - \sigma$ – функция Вейерштрасса, и

$$\sigma_j(\xi) = \sigma(\xi + \omega_j)e^{-\xi\zeta(\omega_j)},\ j = 1, 2, 3 \qquad \omega_3 = \omega_1 + \omega_2.$$

При вырождении функций Вейерштрасса, когда $\omega_1 \to \infty$, $\omega_2 = i\frac{\pi}{2a}$, для $V(\xi)$ и $W(\xi)$ получаем из /12/ следующие выражения:

$$V(\xi) = \frac{\lambda(\lambda - 1)a^2}{\text{sh}^2 a\xi} + \frac{1}{2}\mu\Delta\xi^2 + \lambda\Delta\xi a\,\text{cth}\,a\xi - 2\lambda\lambda_4 a^2\,\text{ch}\,2a\xi,$$

$$W(\xi) = \frac{\lambda(\lambda_1 - 1)a^2}{\text{sh}^2 2a\xi} + \frac{(\lambda_0 - \lambda_1)(\lambda_0 + \lambda_1 - 1)a^2}{\text{sh}^2 a\xi},$$

$$+ [\lambda_2(2(N-1)\lambda + \lambda_0 + \lambda_1 + \tfrac{1}{2}\lambda_4 + 1) - 2\lambda_4(\lambda_0 - \lambda_1)]a^2\,\text{ch}\,2a\xi$$

$$+ [\tfrac{1}{4}\lambda_2^2 - \lambda_4(\lambda_0 + \lambda_1 + 2(N-1)\lambda + 2)]a^2\,\text{ch}\,4a\xi - \tfrac{1}{2}\lambda_2\lambda_4 a^2\,\text{ch}\,6a\xi \qquad /14/$$

$$+ \tfrac{1}{4}\lambda_4^2\,\text{ch}\,8a\xi + \tfrac{1}{2}\lambda_3\Delta\xi^2 + \lambda_0\Delta\xi a\,\text{cth}\,a\xi + \lambda_1\Delta\xi a\,\text{th}\,a\xi,$$

$$+ \lambda_2\Delta\xi a\,\text{sh}\,2a\xi - \lambda_4\Delta\xi a\,\text{sh}\,4a\xi,$$

где λ, μ, λ_0, λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 – произвольные постоянные и $\Delta = \lambda_3 + 2(N-1)\mu$.

Волновая функция основного состояния приобретает вид:

$$\psi_0(x_1, \ldots, x_N) = \prod_{j>k}^{N} |\text{sh}\,a(x_j - x_k)|^{\lambda}\, |\text{sh}\,a(x_j + x_k)|^{\lambda}\, e^{\mu(x_j^2 + x_k^2)} \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{N} |\text{sh}\,a x_j|^{\lambda_0}\, |\text{ch}\,a x_j|^{\lambda_1}\, e^{\frac{\lambda_2}{2}\text{ch}\,2a x_j + \frac{\lambda_3}{2}x_j^2 - \frac{\lambda_4}{4}\text{ch}\,4a x_j}. \qquad /15/$$

Для самосопряженности гамильтониана с потенциалом /14/ необходимо выполнение условия [8] $\lambda(\lambda - 1) > \frac{3}{4}$. Очевидно, что при $\lambda_4 > 0$ $\psi_0(x_1, \ldots, x_N)$ нормируема.

В случае $\Delta = \lambda_4 = 0$ классические системы с потенциалами бинарного взаимодействия и внешнего поля /14/ являются вполне интегрируемыми [5,6]. При $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$, $\mu = -b$ получаем системы, рассматривавшиеся Калоджеро [2]. При $\mu = \Delta = \lambda_0 = \lambda_1 = 0$ приходим к рассмотренным в предыдущей работе [4] системам Сазерленда-Калоджеро во внешнем поле.

Отметим, что для нахождения E_0 и ψ_0 – энергии и волновой функции основного состояния можно также использовать следующий прием. Гамильтониан /1/ представим в виде

$$H = \sum_{j=1}^{N} a_j^+ a_j + E_0, \qquad /16/$$

где

$$a_j = \frac{1}{\sqrt{2}}\{p_j + i(\sum_{k\neq j}[\alpha(x_k - x_j) + \alpha(x_k + x_l)] + \gamma(x_j))\}, \qquad /17/$$

причем при любых нечетных $\alpha(\xi)$ и $\gamma(\xi)$ операторы a_j коммутируют: $[a_j, a_k] = 0$. Из /16/, /17/ следует, что функции $\alpha(\xi)$ и $\gamma(\xi)$ должны удовлетворять функциональному уравнению /5/. Поэтому волновая функция основного состояния может быть найдена как решение системы N дифференциальных уравнений первого порядка $a_j\psi_0(x_1,\dots,x_N) = 0$, $j = 1, \dots N$, где функции $a(\xi)$ и $\gamma(\xi)$ в /17/ определены согласно /11/.

Легко показать, что E_0 в этом случае представляет собой энергию основного состояния системы. В частности, для потенциалов /14/ она имеет вид

$$E = -Na^2\{\frac{1}{2}(\lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \frac{1}{2}\lambda_2^2 - \frac{1}{2}\lambda_4^2) + \lambda_0(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4) -$$
$$- \lambda_1\lambda_4 + \frac{1}{a^2}(\Delta - (N-1)\mu) + 2(N-1)\lambda(\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{(2N-1)}{6}\lambda)\}.$$

В заключение отметим, что значительный интерес представляет изучение остальной части дискретного спектра рассмотренных систем. Это исследование будет проведено нами в дальнейших работах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sutherland B. Phys.Rev. A., 1971, 4, p.2019; Phys.Rev.Lett., 1975, 34, p.1083.
2. Calogero F. J.Math.Phys., 1971, 12, p.419; Lett.Nuovo Cim., 1975, 13, p.507.
3. Olshanetsky M.A., Perelomov A.M. Phys.Reports, 1983,94,p.312.
4. Иноземцев В.И., Мещеряков Д.В. ОИЯИ, Р4-84-511, Дубна, 1984.
5. Иноземцев В.И. ОИЯИ, Р4-84-41, Дубна, 1984.
6. Иноземцев В.И., Мещеряков Д.В. ОИЯИ, Р4-84-247, Дубна, 1984.
7. Inozemtsev V.I. J.Phys.A., 1984, 17, p.815.
8. Meetz K. Nuovo Cim., 1964, 34, p.690.

Иноземцев В.И., Мещеряков Д.В. Р5-84-784

Факторизация волновых функций основного состояния квантовых систем, связанных с полупростыми алгебрами Ли

Рассматриваются условия, при которых волновые функции основного состояния квантовых систем, связанных с полупростыми алгебрами Ли, обладают свойством факторизации и могут быть найдены в явном виде.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод Т.Ю.Думбрайс

Inozemtsev V.I., Meshcherykov D.V. P5-84-784

Factorization of the Ground-State Wave Functions of Quantum Systems Related to Semisimple Lie Algebras

Conditions are considered, under which the ground-state wave functions od quantum systems connected with semisimple Lie algebra are factorizable and may be found explicitly.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984