сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5-84-75

Г.С.Казача

О СХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ФУНКЦИЙ НЕПРЕРЫВНОГО СПЕКТРА ПО СИСТЕМЕ РЕЗОНАНСНЫХ ФУНКЦИЙ

1984

Введение

В настоящей работе исследуется сходимость разложений функции рассеяния $\psi_\ell^+(k,x)$ и функции Грина $G_\ell^+(k,x,x')$ по системе резонансных функций. Задача рассматривается для сферически-симметричного потенциала конечного радиуса действия:

$$q(x)=0 \qquad \text{при} \qquad x>a.$$

Резонансные функции, введенные Гамовым при описании α -распада /1/, являются собственными функциями краевой задачи для радиального уравнения Шредингера

$$-\varphi'' + q(x)\varphi + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} = k^2\varphi, \quad 0 \le x \le a, \qquad (1)$$

$$\varphi(0)=0, \quad \frac{\varphi'(a)}{\varphi(a)} = \frac{h_\ell^{+\prime}(ka)}{h_\ell^+(ka)}, \qquad (1a)$$

где h_ℓ^+ – функция Риккати-Ганкеля первого рода, имеющая асимптотику

$$h_\ell^+(x) \underset{x\to\infty}{\simeq} e^{i\left(x-\frac{\ell\pi}{2}\right)}.$$

Собственные значения задачи (1)-(1a) k_n являются полюсами S -матрицы, функции Грина и функции рассеяния. Поэтому разложения функции непрерывного спектра можно получить, используя теорему Коши, которая является частной формулировкой теоремы Миттаг-Леффлера. Согласно этой теореме, мероморфная функция $f(z)$ может быть представлена в виде суммы главных частей в полюсах z_n и многочлена $Q(z)$ степени p.

Разложение функции рассеяния по системе резонансных функций впервые было предложено в работе /2/. Положительный опыт применения указанной теоремы для получения разложений S -матрицы, K -матрицы и функции Грина /3-7/ показал плодотворность такого подхода. В этих работах, однако, не уделялось должного внимания сходимости разложений. Хотя из теоремы Коши следует равномерная сходимость по k, ясно, что скорость сходимости и выбор параметра p будет зависеть и от значений переменных x и x'. На это указывают результаты численного исследования сходимости разложений Миттаг-Леффлера /8,9/. Следует отметить также работу /10/, где получена оценка скорости сходимости для разложения функции Грина, которое формально соответствует параметру $p=-1$. В настоящей работе получены равномерные оценки скорости сходимости разложений Миттаг-Леффлера по x и x' с произвольным параметром p для функции Грина и функции рассеяния.

I. Теорема Коши и разложения функций континуума по системе резонансных функций.

Прежде всего сформулируем теорему Коши /11/.

Теорема. Пусть мероморфная функция $f(z)$ на некоторой правильной системе контуров $\{C_n\}$ растет не быстрее, чем степень z^p, т.е. на всех C_n

$$|f(z)| \le M|z|^p, \tag{2}$$

где M - постоянная, $p>0$ - целое число, а $z=0$ не является полюсом $f(z)$. В этих условиях $f(z)$ можно представить в виде

$$f(z)=h(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\{g_n(z)-h_n(z)\}, \tag{3}$$

где $g_n(z)$ - главные части $f(z)$ в полюсах z_n,

$$h(z)=\sum_{q=0}^{p}\frac{f^{(q)}(0)}{q!}z^q, \quad h_n(z)=\sum_{q=0}^{p}\frac{g_n^{(q)}(0)}{q!}z^q.$$

Под правильной системой контуров $\{C_n\}$ понимается совокупность замкнутых кривых, удовлетворяющих следующим условиям:

1) C_1 содержит внутри себя точку $z=0$, каждый контур C_n находится внутри области, ограниченной контуром C_{n+1}.

2) Кратчайшее расстояние d_n от точек C_n до начала координат неограниченно растет с ростом n.

3) Отношение длины ℓ_n кривой C_n к d_n остается ограниченным.

В случае простых полюсов $g_n=\frac{r_n}{z-z_n}$, формула (3) принимает вид:

$$f(z)=\sum_{q=0}^{p}\frac{f^{(q)}(0)}{q!}z^q+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{z_n}\right)^{p+1}\frac{r_n}{z-z_n}, \tag{4}$$

где $r_n=\operatorname{res} f(z)/_{z=z_n}$.

При доказательстве теоремы Коши рассматривается интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_N}\frac{f(s)ds}{s-z}.$$

По теореме о вычетах

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_N}\frac{f(s)ds}{s-z}=f(z)-\sum_{n=1}^{N}g_n(z). \tag{5}$$

Если этот интеграл стремится к нулю при $N\to\infty$, то функция $f(z)$ представляется рядом главных частей ($p=-1$). Однако, если $f(z)$ возрастает на системе контуров C_N как $|z|^p$, интеграл к нулю не стремится. В этом случае для получения стремящегося к нулю интеграла используется прием, предложенный Коши. Так как, по условию, точка $z=0$ является правильной точкой $f(z)$ и лежит внутри C_N, то в равенстве (5) и его последовательных производных по z можно положить $z=0$, в результате получим систему уравнений

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_N}\frac{f(s)ds}{s^{q+1}}=\frac{f^{(q)}(0)}{q!}-\sum_{n=1}^{N}\frac{g_n^{(q)}(0)}{q!}, \quad (q=0,1,\dots p). \tag{6}$$

Умножая равенства (6) на z^q и вычитая их сумму из (5), получаем

$$f(z)-h(z)-\sum_{n=1}^{N}(g_n(z)-h_n(z))=$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_N}\left\{\frac{1}{s-z}-\sum_{q=0}^{p}\frac{z^q}{s^{q+1}}\right\}f(s)ds=\frac{z^{p+1}}{2\pi i}\oint_{C_N}\frac{f(s)ds}{s^{p+1}(s-z)}.$$

Таким образом, оценка скорости сходимости разложения (3) сводится к оценке интеграла

$$R_N=\frac{z^{p+1}}{2\pi i}\oint_{C_N}\frac{f(s)ds}{s^{p+1}(s-z)}.$$

Условие (3) при определении правильной системы контуров, а также условие (2) теоремы Коши используется далее для того, чтобы доказать равномерную сходимость по z. В данной работе эти условия не применяются.

Как известно, функция Грина для радиального уравнения Шредингера (I) определяется следующим образом:

$$G_\ell^+(k,x,x') = y_0(k,x_<)\,y_1(k,x_>)/\omega(k),$$

где $y_0(k,x)$ и $y_1(k,x)$ – два независимых решения радиального уравнения Шредингера со следующими начальными условиями:

$$y_0(0)=0, \quad \lim_{x\to 0} x^{-\ell-1} y_0(k,x) = 1/(2\ell+1)!!, \tag{7}$$

$$y_1(a) = 1, \quad y_1'(a) = \frac{h_\ell^{+\prime}(ka)}{h_\ell^+(ka)}, \tag{8}$$

$x_<$ – меньшее из x и x', $x_>$ – большее из x и x',
$\omega(k)$ – вронскиан

$$\omega(k) = y_0(k,x)\,y_1'(k,x) - y_0'(k,x)\,y_1(k,x). \tag{9}$$

Функция рассеяния $\psi_\ell^+(k,x)$ является решением радиального уравнения Шредингера

$$\psi_\ell^{+\prime\prime}(k,x) - \left(q(x) + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} - k^2\right)\psi_\ell^+(k,x) = 0, \quad 0 \le x \le a$$

со следующими граничными условиями:

$$\psi_\ell^+(k,0) = 0,$$

$$\psi_\ell^+(k,x) \underset{x>a}{=} \psi_\ell(k,x) + \frac{S_\ell(k)-1}{2i}\,h_\ell^+(kx).$$

Здесь $S_\ell(k)$ – матрица рассеяния, ψ_ℓ и h_ℓ^+ – функции Риккати-Бесселя и Риккати-Ганкеля первого рода соответственно.

Известно [3], что для потенциала конечного радиуса действия

$$q(x) = 0 \quad \text{при} \quad x > a$$

функции $G_\ell^+(k,x,x')$, $\psi_\ell^+(k,x)$, $S(k)$ – мероморфные во всей комплексной k -плоскости, и их полюса совпадают с собственными значениями задачи (I)-(Iа). При этом в верхней полуплоскости имеется конечное число простых полюсов, лежащих на мнимой оси и соответствующих связанным состояниям. В нижней полуплоскости число полюсов бесконечно. Они расположены на мнимой отрицательной полуоси, отвечая антисвязанным состояниям, а также в III и IV квадратах – симметрично относительно мнимой оси.

Далее будем предполагать, что полюса простые. В литературе это обычно аргументируется тем, что для используемых в ядерной физике потенциалов появление кратных полюсов – редкое явление. При этом их можно рассматривать как предельный случай слияния простых полюсов, расположенных очень близко друг от друга.

Перейдем к построению разложений Миттаг-Леффлера для функции Грина и функции рассеяния. Если резонансные функции удовлетворяют условию нормировки

$$\int_0^a \varphi_n^2(x)\,dx + \frac{\varphi_n^2(a)}{2k_n}\,\frac{d}{dk}\left(\frac{h_\ell^{+\prime}(ka)}{h_\ell^+(ka)}\right) = 1, \tag{10}$$

то вычет функции Грина r_n в полюсе k_n равен

$$\frac{\varphi_n(x)\,\varphi_n(x')}{2k_n}.$$

Таким образом, согласно теореме Коши, справедливо разложение

$$G_\ell^+(k,x,x') = \sum_{q=0}^{p} \frac{k^q}{q!}\,G_\ell^+(0,x,x') + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{k}{k_n}\right)^{p+1} \frac{\varphi_n(x)\,\varphi_n(x')}{2k_n(k-k_n)} \tag{11}$$

при условии, что

$$\oint_{C_N} \frac{G_\ell^+(s,x,x')\,ds}{s^{p+1}(s-k)} \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty. \tag{12}$$

Если рассмотреть интеграл $\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_N} \frac{G_\ell^+(s,x,x')\,ds}{s-k}$, то, согласно теореме о вычетах, получим разложение

$$G_\ell^+(k,x,x') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\,\varphi_n(x')}{2k_n(k-k_n)}, \tag{13}$$

которое формально соответствует случаю $p=-1$ в теореме Коши.

В суммах (II) и (I3) в случае комплексного полюса под номером n объединены два симметричных полюса k_n и $-k_n^*$, которым соответствуют комплексно-сопряженные собственные функции.

Вместо функции рассеяния $\psi_\ell^+(k,x)$ удобнее рассматривать /8,9/ функцию

$$\psi_\ell^a = k^{-1} h_\ell^+(ka)\,\psi_\ell^+(k,x), \quad x \le a. \tag{I4}$$

Для этой функции справедливо соотношение

$$G_\ell^+(k,x,a) = -\psi_\ell^a(k,x).$$

Таким образом, оценка скорости сходимости разложения

$$\psi_\ell^a(k,x) = \sum_{q=0}^{p} \frac{k^q}{q!}\psi_\ell^{a(q)}(0,x) - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{k}{k_n}\right)^{p+1}\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(a)}{2k_n(k-k_n)} \tag{I5}$$

также сводится к оценке интеграла

$$\oint_{C_N}\frac{G(s,x,a)\,ds}{s^{p+1}(s-k)} \qquad \text{при } N\to\infty.$$

2. Асимптотическое поведение функции Грина при $k\to\infty$.

Рассмотрим вначале асимптотическое поведение функций $y_1(k,x)$ и $y_0(k,x)$.

<u>Лемма</u>. Пусть $q(x)$ бесконечно дифференцируема на $[0,a]$ и пусть $q(a-0)\neq 0$. Тогда $y_1(k,x)$ допускает при $k\to\infty$ асимптотическое разложение

$$y_1(k,x) = \frac{h_\ell^+(kx)}{h_\ell^+(ka)}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n(x)}{k^n}\right) + \frac{q(a)}{(2ik)^2}h_\ell^-(kx)h_\ell^+(ka)\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n(x)}{k^n}\right). \tag{I6}$$

<u>Доказательство</u>. Функции $h_\ell^+(kx)$ и $h_\ell^-(kx)$ являются независимыми решениями уравнения

$$-y'' + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}y = k^2 y. \tag{I7}$$

Будем искать решение уравнения для $y_1(k,x)$

$$-y_1'' + \left\{q(x) + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\right\}y_1 = k^2 y \tag{I8}$$

методом вариации постоянных

$$y_1(k,x) = C_1(x)h_\ell^+(kx) + C_2(x)h_\ell^-(kx).$$

С учетом граничных условий для y_1 при $x=a$ получим

$$C_1(x) = -\frac{1}{2ik}\int_x^a q(z)y_1(z)h_\ell^-(kz)\,dz + \frac{1}{h_\ell^+(ka)},$$

$$C_2(x) = \frac{1}{2ik}\int_x^a q(z)y_1(z)h_\ell^+(kz)\,dz.$$

Следовательно, $y_1(k,x)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$y_1(k,x) = \frac{h_\ell^+(kx)}{h_\ell^+(ka)} - \frac{h_\ell^+(kx)}{2ik}\int_x^a q(z)y_1(z)h_\ell^-(kz)\,dz + \frac{h_\ell^-(kx)}{2ik}\int_x^a q(z)y_1(z)h_\ell^+(kz)\,dz.$$

Если $x > \frac{1}{|k|}$, то интегральное уравнение можно решать методом последовательных приближений

$$y_1^{(m)}(k,x) = \frac{h_\ell^+(kx)}{h_\ell^+(ka)} - \frac{h_\ell^+(kx)}{2ik}\int_x^a q(z)y_1^{(m-1)}(z)h_\ell^-(kz)\,dz + \frac{h_\ell^-(kx)}{2ik}\int_x^a q(z)y_1^{(m-1)}(z)h_\ell^+(kz)\,dz,$$

$$y_1^{(0)}(k,x) = \frac{h_\ell^+(kx)}{h_\ell^+(ka)}.$$

Справедлива оценка $|y_1(k,x) - y_1^{(1)}(k,x)| \le \frac{c|\Delta_1|}{|k|}$,

где $\Delta_1 = y_1^{(1)} - y_1^{(0)}$.

Выражение вида (I6) для $y_1^{(1)}(k,x)$ получается интегрированием по частям:

$$\frac{h_\ell^-(kx)}{2ik}\int_x^a q(z)h_\ell^+(kz)\frac{h_\ell^+(kz)}{h_\ell^+(ka)}\,dz =$$

$$\frac{1}{2ik}\frac{h_\ell^-(kx)}{h_\ell^+(ka)}\int_x^a q(z)e^{2ikz}P_\ell^{+2}\left(\frac{1}{kz}\right)dz =$$

$$\frac{q(a)}{(2ik)^2}h_\ell^-(kx)h_\ell^+(ka) - \frac{q(x)}{(2ik)^2}\frac{h_\ell^+(kx)}{h_\ell^+(ka)}h_\ell^-(kx)h_\ell^+(kx) -$$

$$\frac{1}{(2ik)^2}\frac{h_\ell^-(kx)}{h_\ell^+(ka)}\int_x^a e^{2ikz}\left[q(z)P_\ell^{+2}\left(\frac{1}{kz}\right)\right]'dz.$$

Для $x \geq \frac{1}{|k|}$ величина $h_\ell^-(kx)h_\ell^+(kx)$ – ограничена и, следовательно, ограничен интеграл $\int_x q(z)h_\ell^-(kz)h_\ell^+(kz)\,dz$.

При $x \gg 1$ они являются полиномами по обратным степеням k.

Продолжая процесс интегрирования по частям, получим младшие члены разложения (I6).

Если $x < \frac{1}{|k|} = \delta$, то итерационный процесс будем осуществлять по формуле

$$y_1^{(m)} = \frac{h_\ell^+(kx)}{h_\ell^+(ka)} - \frac{1}{2ik}\Big\{h_\ell^+(kx)\int_x^a q(\delta)\, h_\ell^-(kz)\, y_1^{(m-1)}(z)\,dz - h_\ell^-(kx)\int_x^a q(\delta)\, h_\ell^+(kz)\, y_1^{(m-1)}(z)\,dz\Big\} - \frac{1}{2ik}\Big\{h_\ell^+(kx)\int_\delta^a [q(z)-q(\delta)]\, h_\ell^-(kz)\, y_1^{(m-1)}(z)\,dz - h_\ell^-(kx)\int_\delta^a [q(z)-q(\delta)]\, h_\ell^+(kz)\, y_1^{(m-1)}(z)\,dz\Big\} - \frac{1}{2ik}\Big\{h_\ell^+(kx)\int_x^\delta [q(z)-q(\delta)]\, h_\ell^-(kz)\, y_1^{(m-2)}(z)\,dz - h_\ell^-(kx)\int_x^\delta [q(z)-q(\delta)]\, h_\ell^+(kz)\, y_1^{(m-2)}(z)\,dz\Big\},$$

$$y_1^{(0)} = 0, \qquad y_1^{(1)} = \frac{h_\ell^+(kx)}{h_\ell^+(ka)}.$$

Принимая во внимание, что

$$h_\ell^+(kx)\int_x^\delta y(z)\, h_\ell^-(kz)\, y(z)\,dz - h_\ell^-(kx)\int_x^\delta y(z)\, h_\ell^+(kz)\, y(z)\,dz = 2i\Big\{j_\ell(kx)\int_x^\delta y(z)\, h_\ell^-(kz)\, y(z)\,dz - h_\ell^-(kx)\int_x^\delta y(z)\, j_\ell(kz)\, y(z)\,dz\Big\},$$

можно получить оценку

$$|y_1(k,x) - y_1^{(2)}(k,x)| \le \frac{C_1}{|k|^2}|\Delta_1| + \frac{C_2}{|k|}|\Delta_2|,$$

где $\Delta_1 = y_1^{(1)} - y_1^{(0)}$, $\Delta_2 = y_1^{(2)} - y_1^{(1)}$.

При вычислении $y_1^{(2)}(k,x)$ воспользуемся тем, что $\int h_\ell^{+2}(kx)\,dx$ и $\int h_\ell^+(kx)\, h_\ell^-(kx)\,dx$ берутся в явном виде

$$\int h_\ell^+(kx)\, h_\ell^\pm(kx)\,dx = \frac{x}{4}\Big\{2h_\ell^+(kx)\, h_\ell^\pm(kx) - h_{\ell+1}^+(kx)\, h_{\ell-1}^\pm(kx) - h_{\ell-1}^+(kx)\, h_{\ell+1}^\pm(kx)\Big\}.$$

Интегрируя по частям $\int_\delta^a [q(z)-q(\delta)]\, h_\ell^{+2}(kz)\,dz$, получим для $y_1^{(2)}(k,x)$ выражение вида (16). Лемма доказана.

Выбирая функции $j_\ell(kx)$ и $n_\ell(kx)$ (где n_ℓ -функция Риккати-Неймана) в качестве пары независимых решений уравнения (17), аналогично получим асимптотику для $y_0(k,x)$

$$y_0(k,x) \underset{k\to\infty}{\simeq} \frac{j_\ell(kx)}{k^{\ell+1}} + O\left(\frac{e^{|\tau|x}}{k^{\ell+2}}\right), \qquad (19)$$

где τ- мнимая часть $k = \sigma + i\tau$.

Рассмотрим вронскиан $\omega(k)$. Так как он не зависит от переменной x, достаточно вычислить его в точке $x=0$.

$$\omega(k) = \lim_{x\to 0}\big(y_0(kx)\, y_1'(kx) - y_1(k,x)\, y_0'(kx)\big).$$

Принимая во внимание, что

$$y_0(k,x) \underset{x\to 0}{\simeq} \frac{x^{\ell+1}}{(2\ell+1)!!}, \qquad y_0'(k,x) \underset{x\to 0}{\simeq} \frac{(\ell+1)x^\ell}{(2\ell+1)!!},$$

$$y_1(k,x) \underset{x\to 0}{\simeq} \frac{(2\ell-1)!!}{(kx)^\ell}\,\tilde\omega(k), \qquad y_1'(k,x) \underset{x\to 0}{\simeq} -\frac{\ell(2\ell-1)!!}{x(kx)^\ell}\,\tilde\omega(k),$$

где

$$\tilde\omega(k) = \frac{1}{h_\ell^+(ka)}\left(1+O\left(\tfrac{1}{k}\right)\right) + \frac{q(a)}{(2ik)^2}\, h_\ell^+(ka)\left(1+O\left(\tfrac{1}{k}\right)\right),$$

получим $\omega(k) = -k^{-\ell}\,\tilde\omega(k)$.

Полюса k_n функции Грина являются нулями вронскиана, т.е. удовлетворяют уравнению

$$\frac{1}{h_\ell^+(ka)}\left(1+O\left(\tfrac{1}{k}\right)\right) + \frac{q(a)}{(2ik)^2}\, h_\ell^+(ka)\left(1+O\left(\tfrac{1}{k}\right)\right) = 0. \qquad (20)$$

Так как $h_\ell^+(ka) = (i)^{-\ell} e^{ika}\left(1+O\left(\frac{1}{ka}\right)\right)$, уравнение (20) принимает вид

$$e^{2ika} = \frac{(-1)^\ell 4k^2}{q(a)}\left(1+O\left(\tfrac{1}{ka}\right)\right) = Ak^2\left(1+O\left(\tfrac{1}{ka}\right)\right),$$

где $A = \frac{(-1)^\ell 4}{q(a)}$.

Решая это уравнение методом последовательных приближений, получим асимптотику для собственных значений $k_n = \sigma_n + i\tau_n$:

$$\sigma_n = \frac{n\pi}{a} + \frac{1}{2a}\arg A + O\left(\frac{\ln n}{n}\right),$$

$$\tau_n = -\frac{1}{2a}\ln\left[\frac{n\pi}{a} + \frac{1}{2a}\arg A\right] - \frac{\ln|A|}{2a} + O\left(\frac{1}{k}\right).$$

Здесь $\arg A = -\pi\xi$, $|A| = \frac{4}{|q(a)|}$, $\xi = \begin{cases} 0 & (-1)^\ell q(a) > 0 \\ 1 & (-1)^\ell q(a) < 0. \end{cases}$

Полученные формулы совпадают с известным результатом /3/.

3. Оценка скорости сходимости

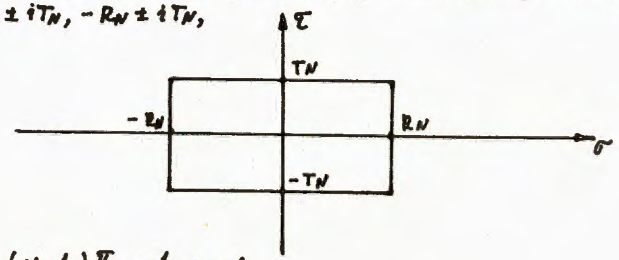
Рассмотрим сначала интеграл $\oint_{C_N} \frac{G(s,x,x')\,ds}{s^{p+2}}$.

Так как функция Грина - симметричная функция переменных x и x', положим для определенности $x' \ge x$. Используя асимптотические разложения (16) и (19), нетрудно показать, что этот интеграл сводится к сумме интегралов вида $I_N(\xi, m) = \oint_{C_N} \frac{e^{is\xi}}{s^m\,\tilde\omega(s)}\,ds$,

где ξ может принимать значения:

$$\xi_1 = -a + x' + x, \quad \xi_2 = -a + (x' - x), \quad m \geq p+3,$$
$$\xi_3 = a - (x' + x), \quad \xi_4 = a - (x' - x), \quad m \geq p+6.$$

Выберем в качестве контура интегрирования прямоугольник с вершинами $R_N \pm iT_N, -R_N \pm iT_N,$



где

$$R_N = \left(N + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{a} + \frac{1}{2a}\arg A,$$

а T_N таково, что $T_N/\ln N \to \infty$, $T_N/R_N \to 0$ при $N \to \infty$ (например, $T_N = R_N^{\alpha}$, $0 < \alpha < 1$).

В работе Кравицкого А.О /12/ получены оценки интеграла $\oint\limits_{C_N} \frac{e^{-is\xi}}{s^m \omega(s)} ds$ для случая $l=0$. Для I_N справедливы аналогичные оценки:

$$|I_N(\xi, m)| = \frac{Const}{\cos\frac{\pi\xi}{2a}} N^{1-m-\frac{a-\xi}{a}}, \quad -a < \xi < a,$$

$$|I_N(a, m)| = O(N^{3-m}), \quad |I_N(-a, k)| = O(N^{1-m}).$$

Следовательно,

$$\left|\oint\limits_{C_N} \frac{G(s,x,x')}{s^{p+2}} ds\right| \leq Const \cdot N^{-p-3+\frac{x+x'}{a}}, \quad x + x' < 2a,$$

$$\left|\oint\limits_{C_N} \frac{G(s,x,x')}{s^{p+2}} ds\right| \leq Const \cdot N^{-p}, \quad x + x' = 2a.$$

Вернемся к интегралу $\oint\limits_{C_N} \frac{G(s,x,x')}{s^{p+1}(s-k)} ds.$

Справедлива оценка

$$\left|\oint\limits_{C_N} \frac{G(s,x,x')ds}{s^{p+1}(s-k)}\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left|\oint\limits_{C_N} \frac{G(s,x,x')}{s^{p+2}} \left(\frac{k}{s}\right)^n ds\right| \leq$$

$$\leq \begin{cases} Const\ N^{-p-3+\frac{x+x'}{a}} \frac{N}{N-k}, & x + x' < 2a, \\ Const\ N^{-p} \frac{N}{N-k}, & x + x' = 2a. \end{cases}$$

Таким образом, разложения (II), (I5) для функции Грина и функции рассеяния сходятся равномерно по x и x' на отрезке [0, a] при $p \geq 1$ со скоростью $O(N^{-p})$. Разложение (I3), соответствующее параметру $p = -1$, сходится равномерно на отрезке $[0, a-\delta]$ для любого δ . При этом справедливо неравенство

$$\left|G(k,x,x') - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(x')}{2k_n(k-k_n)}\right| \leq C(\delta) N^{-\frac{\delta}{a}}.$$

В заключение выражаю благодарность С.И.Сердюковой за постоянное внимание и помощь в работе.

Литература

I. Gamov G.Z. Phys., 1928, Bd51, p.204.

2. Сердобольский В.И. ЖЭТФ, 1959, 36, с.1903.

3. Нуссенцвейг Х.М. Причинность и дисперсионные соотношения."Мир", М., 1976, с.248.

4. Humblet J., Rosenfeld L. Nucl. Phys., 1961, 26, p.329.

5. Romo W.F. Nucl. Phys., 1970, A 151, p.225.

6. More R.M., Gerjucy E. Phys. Rev., 1973, A 7, p.1288.

7. More R.M. Phys. Rev., 1971, A 4, p.1782.

8. Bang J., Gareev F.A., Gissatculov M.H., Goncharov S.A. Nucl. Phys., 1978, A 309, p.381.

9. Bang J., Ershov S.N., Gareev F.A., Kazacha G.S. Nucl. Phys., 1980, A 339, p.89.

I0. Romo W.J. Nucl. Phys., 1978, A 302, p.61.

II. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. Физматгиз, М., 1958, с.398.

I2. Кравицкий А.О. Дифференциальные уравнения. 1968, т.IУ, № I.

Рукопись поступила в издательский отдел
8 февраля 1984 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

Д3-11787	Труды III Международной школы по нейтронной физике. Алушта, 1978.	3 р. 00 к.
Д13-11807	Труды III Международного совещания по пропорциональным и дрейфовым камерам. Дубна, 1978.	6 р. 00 к.
	Труды VI Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1978 /2 тома/	7 р. 40 к.
Д1,2-12036	Труды V Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1978	5 р. 00 к.
Д1,2-12450	Труды XII Международной школы молодых ученых по физике высоких энергий. Приморско, НРБ, 1978.	3 р. 00 к.
	Труды VII Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц, Дубна, 1980 /2 тома/	8 р. 00 к.
Д11-80-13	Труды рабочего совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике, Дубна, 1979	3 р. 50 к.
Д4-80-271	Труды Международной конференции по проблемам нескольких тел в ядерной физике. Дубна, 1979.	3 р. 00 к.
Д4-80-385	Труды Международной школы по структуре ядра. Алушта, 1980.	5 р. 00 к.
Д2-81-543	Труды VI Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1981	2 р. 50 к.
Д10,11-81-622	Труды Международного совещания по проблемам математического моделирования в ядерно-физических исследованиях. Дубна, 1980	2 р. 50 к.
Д1,2-81-728	Труды VI Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1981.	3 р. 60 к.
Д17-81-758	Труды II Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1981.	5 р. 40 к.
Д1,2-82-27	Труды Международного симпозиума по поляризационным явлениям в физике высоких энергий. Дубна, 1981.	3 р. 20 к.
Р18-82-117	Труды IV совещания по использованию новых ядерно-физических методов для решения научно-технических и народнохозяйственных задач. Дубна, 1981.	3 р. 80 к.
Д2-82-568	Труды совещания по исследованиям в области релятивистской ядерной физики. Дубна, 1982.	1 р. 75 к.
Д9-82-664	Труды совещания по коллективным методам ускорения. Дубна, 1982.	3 р. 30 к.
Д3,4-82-704	Труды IV Международной школы по нейтронной физике. Дубна, 1982.	5 р. 00 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79
Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

Казача Г.С. Р5-84-75
О сходимости разложений функций непрерывного спектра по системе резонансных функций

Исследуется сходимость разложений функций рассеяния $\psi_\ell^+(k,x)$ и функции Грина $G_\ell^+(k,x,x')$ в конечной области пространства $(x,x' \in [0,a])$ по системе резонансных функций. Резонансные функции являются решениями краевой задачи для уравнения Шредингера с граничными условиями, отвечающими существованию, при $x > a$ только расходящейся волны. Поскольку собственные значения k_n, соответствующие резонансным функциям, являются полюсами мероморфных функций $\psi_\ell^+(k,x)$ и $G_\ell^+(k,x,x')$, то, согласно теореме Миттаг-Леффлера, они могут быть представлены в виде суммы главных частей в полюсах k_n и многочлена $Q(k)$ степени p. Доказано, что разложения Миттаг-Леффлера функции рассеяния и функции Грина сходятся равномерно на отрезке $[0,a]$, в случае $p \geq 1$ со скоростью $O(N^{-p})$, если потенциал $q(x)$ удовлетворяет условию $q(a-0) \neq 0$. При $p=-1,0$ разложения сходятся равномерно на отрезке $[0,a-\delta]$.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод автора

Kazacha G.S. P5-84-75
On the Convergence of Expansions of Continuum Functions on Resonance Wave Functions

The convergence of the expansions of the continuum wave function $\psi_\ell^+(kx)$ and of the Green function $G_\ell^+(k,x,x')$ for $x,x' \in [0,a]$ is studied. The resonance functions are solutions of the eigenvalue problem for the radial Schrödinger equation with boundary conditions corresponding to the case when there is only outgoing wave on $x>a$. The eigenvalues k_n corresponding to the resonance functions are the poles of meromorphic functions $\psi_\ell^+(kx)$ and $G_\ell^+(k,x,x')$. By Mittag-Leffler theorem these functions may be represented as sum of the principal parts and the polynimial $Q(k)$ of degree p. It is proved, that in the case of finite range potential, satisfying the condition $q(a-0) \neq 0$, the Mittag-Leffler expansions are uniformly convergent on the interval $[0,a]$, for $p \geq 1$, and on the interval $[0,a-\delta]$ for $p=-1,0$.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984