сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P5-84-742

В.Г.Маханьков, Р.Мырзакулов

ЗАДАЧА РИМАНА НА ПЛОСКОСТИ И НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА

1984

Настоящий период развития метода обратной задачи рассеяния /МОЗР/ в теории нелинейных эволюционных уравнений /НЭУ/ может быть охарактеризован, с одной стороны, исключительно широким использованием в нем глубоких теоретико-групповых и алгебро-геометрических идей, а с другой стороны, существенной тривиализацией самих основ метода. Последнее обстоятельство особенно выпукло проявляется тогда, когда речь идет о конструктивных аспектах МОЗР - построении явных решений, исследовании задачи Коши и т.п. Анализируя достижения последних лет в этих областях, нетрудно прийти к выводу, что в основе всех аналитических концепций МОЗР лежит, по-видимому, матричная задача Римана /МАЗР/. Поэтому представляется актуальным широкое применение МАЗР в теории НЭУ. В данной заметке с точки зрения МАЗР анализируется скалярное нелинейное уравнение Шредингера /НУШ/ с произвольной константой связи g:

$$i\phi_t + \phi_{xx} + 2g|\phi|^2\phi = 0 \qquad /1/$$

и с граничными условиями:

$$\phi(x,t) \to 0 \quad \text{при} \quad x \to \pm\infty . \qquad /2/$$

Об этом уравнении известно следующее: в случае $g>0$ оно было решено в /1/ при нулевых граничных условиях с помощью МОЗР. Ниже уравнение /1/ с граничными условиями /2/ решено с помощью МАЗР для произвольных g. Найдено односолитонное решение, которое при $g = 1$ переходит в солитон /1/, а при $g = -1$ - в сингулярный солитон. При $g = 0$ это же решение переходит в плоскую волну.

1. Известно, что уравнение /1/ эквивалентно условию совместности $U_t - V_x + [U,V] = 0$ линейной системы

$$\phi_x = U\phi, \qquad /3'/$$

$$\phi_t = V\phi, \qquad /3''/$$

где

$$U = -i\lambda\sigma_3 + Q, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & i\phi^* \\ ig\phi & 0 \end{pmatrix}, \qquad /4/$$

$$V = 2\lambda U + V', \quad V' = \begin{pmatrix} -ig|\phi|^2 & \phi_x^* \\ -g\phi_x & ig|\phi|^2 \end{pmatrix}. \qquad /5/$$

$\phi(x,t)$- 2x2-матричная функция.

Рассмотрим спектральную задачу для оператора /3'/. Потенциал Q неэрмитов:

$$Q^+ = -AQA^{-1}, \qquad /6/$$

где

$$A = \begin{pmatrix} i\sqrt{g} & 0 \\ 0 & i/\sqrt{g} \end{pmatrix}. \qquad /7/$$

/Здесь + обозначает эрмитово сопряжение/. Откуда имеем

$$U^+(\lambda) = -AU(\lambda^*)A^{-1}. \qquad /8/$$

Соотношение /8/ дает следующую инволюцию для матричных решений уравнения /3'/:

$$\phi^{-1}(\lambda) = A^{-1}\phi^+(\lambda^*)A. \qquad /9/$$

Для уравнения /3'/ введем два набора матричных решений Йоста, определяемых своими асимптотиками при $x \to \pm\infty$:

$$\phi_\pm \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} X_\pm = e^{-i\lambda\sigma_3 x}. \qquad /10/$$

Линейная зависимость матричных решений Йоста $\phi_\pm$ определяется матрицей перехода S:

$$\phi_-(x,\lambda) = \phi_+(x,\lambda) \cdot S(\lambda,t). \qquad /11/$$

Из инволюции /9/ следует, что S псевдоунитарна:

$$S^{-1}(\lambda) = A^{-1}S^+(\lambda^*)A. \qquad /12/$$

Соотношение /12/ определяет структуру матрицы $S(\lambda)$:

$$S = \begin{pmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ -gb^*(\lambda) & a^*(\lambda^*) \end{pmatrix}. \qquad /13/$$

Воспользуемся тождеством $\frac{d}{dx}\det\phi_\pm = \mathrm{Sp}\,U = 0$, из которого следует $\det\phi_+ = \det\phi_-$, т.е. матрица S унимодулярна:

$$\det S = 1, \quad a(\lambda)a^*(\lambda^*) + gb(\lambda)b^*(\lambda^*) = 1. \qquad /14/$$

Факт, что $V \xrightarrow{x\to\pm\infty} V_\pm = 2\lambda U_\pm \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} U$ означает, что эволюция по времени матрицы перехода S имеет вид:

$$S(\lambda,t) = e^{-2i\lambda^2\sigma_3 t}\, S(\lambda,0) \cdot e^{2i\lambda^2\sigma_3 t}. \qquad /15/$$

2. Введем две функции:

$$\psi^+ = \phi_+ S^+ e^{i\lambda\sigma_3 x} = \phi_- \cdot S^- \cdot e^{i\lambda\sigma_3 x}, \qquad /16/$$

$$\psi^- = \phi_- \cdot R^+ \cdot e^{i\lambda\sigma_3 x} = \phi_+ \cdot R^- \cdot e^{i\lambda\sigma_3 x}, \qquad /17/$$

где

$$R = \begin{pmatrix} a & 0 \\ -gb^* & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1-b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} a^* & 0 \\ gb^* & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} i & b \\ 0 & a^* \end{pmatrix} \qquad /18/$$

и $R^\pm, S^\pm \xrightarrow[|\lambda|\to\infty]{} I$.

Очевидно, функции $\psi^\pm$ удовлетворяют уравнениям

$$\psi_x^\pm = -i\lambda[\sigma_3, \psi^\pm] + Q\psi^\pm. \qquad /19/$$

Выбирая подходящие интегральные представления, можно показать, что функция $\psi^+(\psi^-)$ аналитична в верхней /нижней/ полуплоскости комплексной плоскости λ /см., например, [2] /. Таким образом, кусочно-аналитичная функция

$$\psi = \begin{cases} \psi^+, & \mathrm{Im}\lambda > 0 \\ \psi^-, & \mathrm{Im}\lambda < 0 \end{cases} \qquad /20/$$

аналитична на всей комплексной плоскости λ. Из /16/-/18/ следует, что

$$\psi^\pm \xrightarrow[|\lambda|\to\infty]{} I. \qquad /21/$$

3. Теперь построим МАЗР с нулями. Для простоты положим, что функции $\psi^\pm$ имеют в области своей аналитичности нули λ_1 и μ_1 соответственно. Из /9/ следует, что нули МАЗР сопряжены друг дру-

ту: $\mu_1 = \lambda_1^*$. Сформулируем задачу: найти две функции - ψ^+ - аналитическую в области $\mathrm{Im}\lambda>0$ и ψ^-- аналитическую в области $\mathrm{Im}\lambda<0$, удовлетворяющие на вещественной оси линейному соотношению

$$\psi^+(\lambda) = \psi^-(\lambda)\cdot G(\lambda), \quad \mathrm{Im}\lambda = 0, \qquad /22/$$

где

$$G(\lambda) = I + H, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & b(\lambda) \\ -gb^*(\lambda) & 0 \end{pmatrix} \qquad /23/$$

заданы на $\{\mathrm{Im}\lambda=0\}$. Инволюция /9/ дает следующее ограничение:

$$G^{-1}(\lambda) = A^{-1}\cdot G^+(\lambda^*)\cdot A. \qquad /24/$$

С учетом /23/ краевое условие /22/ перепишем так:

$$\psi^+(\lambda) - \psi^-(\lambda) = \psi^-(\lambda)\cdot H(\lambda). \qquad /25/$$

Так как $\det\psi^+(\lambda_1) = \det\psi^-(\lambda_1^*) = 0$, решения /25/ имеют вид

$$\psi^+ = I + \frac{A_1}{\lambda - \lambda_1^*} + h(\lambda), \qquad /26/$$

$$\psi^-(\lambda) = I + \frac{B_1}{\lambda - \lambda_1} + h(\lambda), \qquad /27/$$

где $\xi = \mathrm{Re}\lambda$, $\eta = \mathrm{Im}\lambda$, $A = \mathrm{res}\,\psi^+(\lambda_1^*)$, $B = \mathrm{res}\,\psi^-(\lambda_1)$,

$$h(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int d\xi \frac{\psi^-(\xi)H(\xi)}{\xi - \lambda}.$$

Если ограничиться безотражательными потенциалами, т.е. если $b(\xi) = 0 \Rightarrow H(\xi) = 0$, то вместо /26/-/27/ имеем

$$h(\lambda) = 0, \quad \psi^+ = I + \frac{A_1}{\lambda - \lambda_1^*}, \quad \psi^- = I + \frac{B_1}{\lambda - \lambda_1}. \qquad /28/$$

Формулы /9/ и /28/ определяют матрицы A_1 и B_1:

$$A_1 = -2\eta P, \quad B_1 = 2\eta P, \qquad /29/$$

причем $P^2 = P$, $P^+ = A\cdot P\cdot A^{-1}$. /30/

Найдем проектор P. Пусть $P = |m\rangle k^{-1}\langle n|$, где $|m\rangle$ ($\langle n|$) - двухкомпонентный вектор /ковектор/. Из соотношения /30/ следует, что $k = \langle n|m\rangle$, $\langle n| = -|m\rangle^+\cdot A$, т.е.

$$P = |m\rangle|m\rangle^+ A/|m\rangle^+ A|m\rangle. \qquad /31/$$

Таким образом,

$$\psi^+(x,t,\lambda) = I - \frac{2\eta}{\lambda - \lambda_1^*}P. \qquad /32/$$

Подставляя /32/ в уравнение /19/, получаем

$$P_x = QP - i\lambda_1^*[\sigma_3, P], \qquad /33/$$

$$Q = 2i\eta[\sigma_3, P], \qquad /34/$$

С учетом /31/ уравнение /33/ фактически сводится к уравнению для $|m\rangle$:

$$|m\rangle_x = U_\pm |m\rangle. \qquad /35/$$

Чтобы найти зависимость от времени, потребуем

$$|m\rangle_t = V_\pm |m\rangle. \qquad /36/$$

Совместное решение уравнений /35/-/36/ имеет вид

$$|m(x,t,\lambda)\rangle = e^{-i\lambda\sigma_3(x-2\lambda t)}\,|m_0(\lambda)\rangle, \qquad /37/$$

где $|m\rangle = \left|\begin{matrix} m_{01} \\ m_{02}\end{matrix}\right\rangle$.

Таким образом, для P имеем

$$P = \frac{e^{-i\lambda\sigma_3(x+2\lambda t)}\,|m_0\rangle(|m_0\rangle)^+ e^{i\lambda^*\sigma_3(x+2\lambda^* t)}\,A}{|m_0\rangle^+ e^{i\lambda^*\sigma_3(x+2\lambda^* t)}\,A e^{-i\lambda\sigma_3(x+2\lambda t)}\,|m_0\rangle}. \qquad /38/$$

Из соотношения /34/ находим односолитонное решение НУШ /1/ при граничных условиях /2/:

$$\phi(x,t) = 4\eta\frac{\exp\{-2i\xi x - 4i(\xi^2-\eta^2)t - i\delta_0\}}{(g+1)\,\mathrm{ch}\,2\eta(x-x_0+4\xi t) + (1-g)\,\mathrm{sh}\,2\eta(x-x_0+4\xi t)}, \qquad /39/$$

где $x_0 = \frac{1}{2\eta}\ln\left|\frac{m_{02}}{m_{01}}\right|$, $\delta = \arg m_{02} - \arg m_{01}$.

4. Рассмотрим частные по g решения, получающиеся из общего /по g / решения /39/. Пусть g = 1. Тогда имеем известное регулярное односолитонное решение

$$\phi(x,t) = 2\eta \frac{\exp\{-2i\xi x - 4i(\xi^2 - \eta^2)t - i\delta\}}{\operatorname{ch} 2\eta\,(x - x_0 + 4\xi t)} . \qquad /40/$$

Если g = -1, то получаем сингулярное односолитонное решение U(0,1) НУШ:

$$\phi(x,t) = 2\eta \operatorname{cosech} 2\eta\,[x - x_0 + 4\xi t] \exp\{-2i\xi x - 4i(\xi^2 - \eta^2)t - i\delta\} . \qquad /41/$$

Наконец, если g = 0, то имеем "конденсатное" решение

$$\phi(x,t) = 4\eta \frac{m_{01}}{m_{02}} e^{-2i\lambda(x+2\lambda t)} . \qquad /42/$$

В заключение авторы приносят благодарность О.К.Пашаеву и Э.И.Уразакову за обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров В.Е., Шабат А.Б. ЖЭТФ, 1971, т.61, с.118.
2. Теория солитонов. /Под ред. С.П.Новикова/. "Наука", М., 1980.

Рукопись поступила в издательский отдел
20 ноября 1984 года.

СООБЩЕНИЯ, КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ, ПРЕПРИНТЫ И СБОРНИКИ ТРУДОВ КОНФЕРЕНЦИЙ, ИЗДАВАЕМЫЕ ОБЪЕДИНЕННЫМ ИНСТИТУТОМ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ, ЯВЛЯЮТСЯ ОФИЦИАЛЬНЫМИ ПУБЛИКАЦИЯМИ.

Ссылки на СООБЩЕНИЯ и ПРЕПРИНТЫ ОИЯИ должны содержать следующие элементы:

- фамилии и инициалы авторов,
- сокращенное название Института /ОИЯИ/ и индекс публикации,
- место издания /Дубна/,
- год издания,
- номер страницы /при необходимости/.

Пример:

1. *Первушин В.Н. и др. ОИЯИ, Р2-84-649, Дубна, 1984.*

Ссылки на конкретную СТАТЬЮ, помещенную в сборнике, должны содержать:

- фамилии и инициалы авторов,
- заглавие сборника, перед которым приводятся сокращенные слова: "В кн."
- сокращенное название Института /ОИЯИ/ и индекс издания,
- место издания /Дубна/,
- год издания,
- номер страницы.

Пример:

Колпаков И.Ф. В кн. XI Международный симпозиум по ядерной электронике, ОИЯИ, Д13-84-53, Дубна, 1984, с.26.

Савин И.А., Смирнов Г.И. В сб."Краткие сообщения ОИЯИ", № 2-84, Дубна,1984,с.3.

Маханьков В.Г., Мырзакулов Р. Р5-84-742

Задача Римана на плоскости и нелинейное уравнение Шредингера

Скалярное нелинейное уравнение Шредингера с произвольной действительной константой связи интегрируется с помощью классической матричной задачи Римана на комплексной плоскости спектрального параметра. На примере скалярного нелинейного уравнения Шредингера с произвольной константой связи демонстрируются преимущества, в конструктивном плане, классической матричной задачи Римана на комплексной плоскости спектрального параметра над более популярным ныне методом обратной задачи рассеяния. Получено общее односолитонное решение скалярного нелинейного уравнения Шредингера с произвольной действительной константой связи. Если константа связи положительна, то полученные решения перейдут в регулярный солитон . При отрицательной константе связи получается сингулярный солитон. Когда константа связи равна нулю, общие решения перейдут в плоскую волну. Решения типа сингулярный солитон приобретут физический смысл в задачах с источниками /неоднородностями/.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод О.С.Виноградовой

Makhankov V.G., Myrzakulov R. P5-84-742

Riemann Problem on a Plane and Nonlinear Schroedinger Equation

Scalar nonlinear Schroedinger equation with an arbitrary real coupling constant is integrated by the classical matrix Riemann problem on a complex plane of spectral parameter. Scalar nonlinear Schroedinger equation with an arbitrary real coupling constant is taken as an example to show the structural advantages of a classical matrix Riemann problem on a complex plane of spectral parameter as compared with the more popular today method of inverse scattering problem. A general one-soliton solution of scalar nonlinear Schroedinger equation with an arbitrary real coupling constant is derived. If the coupling constant is positive, then the obtained solutions will pass to a regular soliton. For negative coupling constant a singular soliton is obtained. When the coupling constant equals zero, general solutions will pass to a plane wave. Solutions of singular soliton type will acquire a physical meaning in problems with sources (inhomogeneities).

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984