сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5-84-741

В.Г.Маханьков, Р.Мырзакулов

НЕКОТОРЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ДЛИННОЙ И КОРОТКОЙ ВОЛН

1984

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим систему уравнений

$$
\begin{aligned}
& i\phi_t + \frac{1}{2}\phi_{xx} - u\phi = 0 \\
& u_{tt} - (u + 2|\phi|^2)_{xx} = 0,
\end{aligned}
\qquad /1/
$$

выведенную В.Е.Захаровым в /1/ применительно к взаимодействию ионно-звуковой и ленгмюровской волн в плазме. Как показано в /2/, система /1/ также описывает экситон-фононное и магнон-фононное взаимодействия в кристаллах. Впервые система /1/ численно была изучена в /3/, там же было показано, что она неинтегрируема. Тем не менее в /4/ было найдено N-солитонное решение /1/, позднее в /5/ было показано, что результаты /4/ являются неправильными, а систему /1/ нельзя интегрировать с помощью метода обратной задачи рассеяния. Поэтому представляется актуальным нахождение точных решений /1/ в некоторых частных случаях.

Ниже найдены точные решения системы /1/ в виде "бегущих волн", выражающиеся через функции Вейерштрасса, Якоби, а также тригонометрические, гиперболические и рациональные функции. Отметим, что некоторые из полученных решений являются сингулярными, другие - регулярными. Наконец, показано, что среди полученных решений содержится периодическое решение, выражающееся через одномерную тэта-функцию Римана.

1. ОБЩИЕ РЕШЕНИЯ

Перейдем от двух (x, t) к одной $y = x - vt$ независимой переменной. Так как $\frac{\partial}{\partial t} = -v\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}$, вместо /1/ получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений /штрих означает $\frac{\partial}{\partial y}$ /:

$$
-iv\phi' + \frac{1}{2}\phi'' - u\phi = 0 \qquad /2/
$$

$$
(v^2 - 1)u'' - 2(|\phi|^2)'' = 0. \qquad /3/
$$

Уравнения /3/ легко интегрируются:

$$
(v^2 - 1)u - 2|\phi|^2 = cy + c_1(v^2 - 1). \qquad /4/
$$

Из физических соображений положим $c = 0$, так что вместо /4/ имеем

$$u(y) = \frac{2}{v^2 - 1} |\phi(y)|^2 + c_1. \qquad /5/$$

Исключая из /2/ $u(y)$ с помощью /5/ и переходя к новым переменным $\alpha = |\phi|$, $\beta = \arg\phi$, вместо /2/ получаем систему для $\alpha(y)$ и $\beta(y)$:

$$\alpha'' - \alpha\beta'^2 + 2v\alpha\beta' - \frac{4}{v^2 - 1}\alpha^3 - 2c_1\alpha = 0. \qquad /6/$$

$$(\beta'^2 - v)\alpha' + \frac{1}{2}\alpha\beta'' = 0. \qquad /7/$$

Из /7/ следует

$$\beta(y) = vy + c_2 \int \frac{dy}{\alpha^2} + \delta v, \qquad /8/$$

где c_2, δ - произвольные константы.

С помощью /8/ исключим β' из /6/ и проинтегрируем один раз. В результате имеем

$$\alpha'^2 + (v^2 - 2c_1)\alpha^2 - \frac{2}{v^2 - 1}\alpha^4 + \frac{c_2^2}{\alpha^2} + c_3 = 0, \qquad /9/$$

где $c_3 = \mathrm{const}$. Введем новую функцию $\wp(y)$:

$$\alpha^2 = a(\wp(y) + b), \qquad /10/$$

где $a = (v^2 - 1)/2$, $b = (v^2 - 2c_1)/3$. Тогда уравнение /9/ перейдет в уравнение для функции Вейерштрасса

$$(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3, \qquad /11/$$

где $g_2 = 36b^2$, $g_3 = 8b^3 + 4c_3 b/a + 4c_2^2/a^2$.

Таким образом, мы нашли, что решения системы уравнений Захарова /1/ выражаются через функции Вейерштрасса

$$\phi(x - ut) = \sqrt{a(\wp(y) + b)}\, e^{i\beta}, \quad u(x - vt) = c_1 + b + \wp(x - vt), \qquad /12/$$

где

$$\beta(y) = v(y + \delta) + \frac{c_2}{a}\int \frac{dy}{\wp(y) + b}. \qquad /12'/$$

Далее мы будем полагать $c_2 = 0$. /12 / является решением типа "бегущая волна" в данном классе решений и содержит регулярные, сингулярные и периодические решения системы /1/.

2. ПЕРИОДИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Прежде чем выписать конкретные частные решения, приведем необходимые нам свойства функции $\wp(y)$ и уравнений /11/. Функция $\wp(y)$ является двоякопериодической функцией с периодами $2\omega'$, 2ω, т.е. $\wp(y, \omega, \omega') = \wp(y + 2\omega n + 2m\omega')$ где $m, n \in \mathbf{Z}$. Пусть e_1, e_2, e_3 - корни многочлена $f(\wp)$, т.е. $f = 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3)$.

Тогда уравнение /11/ перепишется следующим образом:

$$\wp'^2 = 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3), \qquad /13/$$

откуда легко получаем соотношения

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \quad e_1e_2 + e_1e_3 + e_2e_3 = -g_2/4, \quad e_1e_2e_3 = -g_3/4,$$

т.е. все корни e_1, e_2, e_3 являются функциями констант a, b, c_2 и c_3.

Существует следующая формула, связывающая первую тэта-функцию Римана $\theta_1(y)$ с функцией Вейерштрасса $\wp(y)$ /6/:

$$\wp(y) = c_0 - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\ln\theta_1(y), \qquad /14/$$

где $c_0 = \mathrm{const}$ и

$$\theta_1(y) = -i \sum_{k\in\mathbf{Z}} \exp\{i\pi[\tau(k + \tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{2k+1}{2i\pi})(y + \pi i)]\}, \quad (\tau = \omega'/\omega)$$

Отсюда и из /12/ получим

$$\phi(y) = \sqrt{a\left(c_0 + b - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\ln\theta_1(y)\right)}\, e^{i\beta}, \quad u(y) = c_1 + b + c_0 - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\ln\theta_1(y), \qquad /15/$$

где

$$\beta(y) = v(y + \delta) + \frac{c_2}{a}\int \frac{dy}{c_0 + b - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\ln\theta_1}. \qquad /15'/$$

/15/ является решением системы уравнений /1/, отвечающим периодическим граничным условиям.

3. РЕГУЛЯРНЫЕ РЕШЕНИЯ

В этом разделе выпишем регулярные по y решения системы /1/. Для этого перейдем к функциям Якоби $sn(y,k)$, $cn(y,k)$ по следующей формуле[7]:

$$\wp(y,\omega,\omega') = e_2 + (e_3 - e_2)cn^2[(y+\omega')\sqrt{e_1 - e_3}, k], \qquad /16/$$

где $k = \sqrt{\dfrac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}}$. Пусть $e_2 = -b$, тогда из /12 / и /16/ получим

$$\phi(y) = \sqrt{a(e_3 - e_2)}\ cn[(y+\omega')\sqrt{e_1 - e_3}, k]\, e^{iv(y+\delta)}, \qquad /17/$$

$$u(y) = c_1 + (e_3 - e_2)\, cn^2[(y+\omega')\sqrt{e_1 - e_3}, k],$$

Пусть $k \to 1$, тогда $cn(\ ) \to sech(\ )$, и из /17/ имеем

$$\phi(x-vt) = \sqrt{(e_3 - e_1)a}\ sech[\sqrt{e_1 - e_3}(x - vt + \omega')]e^{iv(x-vt+\delta)}, \qquad /18/$$

$$u(x-vt) = c_1 + (e_3 - e_1)sech^2[\sqrt{e_1 - e_3}(x - vt + \omega')]k.$$

Если $b = -e_3$ то из /16/ и /12/ получим

$$\phi(x-vt) = \sqrt{(e_2 - e_3)a}\ sn[\sqrt{e_1 - e_3}(x - vt + \omega'), k]\, e^{iv(x-vt+\delta)},$$

$$u(x-vt) = c_1 + (e_2 - e_3)\, sn^2[\sqrt{e_1 - e_3}(x - vt + \omega'), k], \qquad /19/$$

При $k \to 1$ из /19/ следует

$$\phi(x-vt) = \sqrt{(e_2 - e_3)a}\ th[\sqrt{e_1 - e_3}(x - vt + \omega')]e^{iv(x-vt+\delta)},$$

$$u(x-vt) = c_1 + (e_2 - e_3)th^2[\sqrt{e_1 - e_3}(x - vt + \omega')]. \qquad /20/$$

Итак, система уравнений Захарова /1/ имеет решения вида /17/ и /19/ - так называемые кноидальные волны. Кроме того, получены односолитонные решения, отвечающие нулевым /18/ и ненулевым /кинковым/ /20/ граничным условиям.

4. СИНГУЛЯРНЫЕ РЕШЕНИЯ

Чтобы получить сингулярные решения, снова вернемся к формулам, связывающим функции Вейерштрасса и Якоби[7]:

$$\wp(y) = e_3 + (e_1 - e_3)/sn^2[\sqrt{e_1 - e_3}\,y, k], \qquad /21/$$

$$\wp(y) = e_2 + (e_1 - e_2)/cn^2[\sqrt{e_1 - e_3}(y+\omega), k]. \qquad /22/$$

Если в /21/ $b = -e_3$, а в /22/ $b = -e_2$, то из /12/, /21/ и /22/ соответственно получим два решения системы Захарова /1/:

$$\phi(x-vt) = \sqrt{a(e_1 - e_3)}\ e^{iv(x-vt+\delta)}/sn[\sqrt{e_1 - e_3}(x - ut)], \qquad /23/$$

$$u(x-vt) = (e_1 - e_3)/sn^2[\sqrt{e_1 - e_3}(x - vt), k],$$

$$\phi(x-vt) = \frac{\sqrt{a(e_1 - e_2)}\exp\{iv(x - vt + \delta)\}}{cn[\sqrt{e_1 - e_3}(x - vt + \omega), k]}, \qquad /24/$$

$$u(x-vt) = c_1 + (e_1 - e_2)/cn^2[\sqrt{e_1 - e_3}(x - vt + \omega), k].$$

Если в /23/ $k \to 1$, то имеем

$$\phi(x-vt) = \sqrt{a(e_1 - e_3)}\ cth[\sqrt{e_1 - e_3}(x - vt)]e^{iv(x-vt+\delta)}$$

$$u(x-vt) = e_1 + (e_1 - e_3)cth^2[\sqrt{e_1 - e_3}(x - vt)]. \qquad /25/$$

то есть односолитонное сингулярное решение системы /1/ при ненулевых граничных условиях. При нулевых граничных условиях получим из /21/ при $b = -e_1$:

$$\phi(x-vt) = \sqrt{a(e_1 - e_3)}\ cosech[\sqrt{e_1 - e_3}(x - vt)]e^{iv(x-vt+\delta)},$$

$$u(x-vt) = c_1 + (e_1 - e_3)cosech^2[\sqrt{e_1 - e_3}(x - vt)]. \qquad /26/$$

Еще два решения получаются, если в /21/ и /22/ полагать $k \to 0$ /$b = -e_3$, $b = -e_2$ соответственно/:

$$\phi(x-vt) = \frac{\sqrt{a(e_1 - e_3)}\ e^{iv(x-vt+\delta)}}{sin[\sqrt{e_1 - e_3}(x - vt)]}, \qquad /27/$$

$$u(x-vt) = c_1 + (e_1 - e_3)/sin^2[\sqrt{e_1 - e_3}(x - vt)],$$

$$\phi(x-vt) = \sqrt{a(e_1 - e_3)}\ e^{iv(k-xv+\delta)}/cos[\sqrt{e_1 - e_3}(x - vt + \omega)], \qquad /28/$$

$$u(x-vt) = c_1 + (e_1 - e_3)/cos^2[\sqrt{e_1 - e_3}(x - vt + \omega)].$$

Наконец, найдем рациональное решение системы /1/. Пусть оба периода функции $\wp(y,\omega,\omega)$ стремятся к бесконечности. Тогда функция $\wp(y,\omega,\omega')$ вырождается в рациональную функцию, имеющую двухкратный полюс на линии $x = v \cdot t$:

$$\mathcal{P}(y, \omega, \omega') \xrightarrow[\omega, \omega' \to \infty]{} \frac{1}{y^2}. \qquad /29/$$

Полагая $c_1 = v^2/2$, из /12/ и /29/ находим

$$\phi(x - vt) = \frac{\sqrt{a}}{x - vt} e^{iv(x - vt + \delta)}, \quad u(x - vt) = \frac{v^2}{2} + \frac{1}{(x - vt)^2}. \qquad /30/$$

Таким образом, получен ряд решений системы уравнений /1/, выражающихся через эллиптические функции Вейерштрасса, Якоби, а также через тригонометрические, гиперболические и рациональные функции. Эти решения отвечают различным граничным условиям, от нулевых до периодических. Кроме того, найдены сингулярные решения.

Один из нас /Р.М./ благодарен Э.И.Уразакову и О.К.Пашаеву за обсуждения полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров В.Е. ЖЭТФ, 1972, 62, с. 1745.
2. Давыдов А. Кислуха А.С.ЖЭТФ, 1976, 71, с. 1090; Makhankov V.G., Fedjanin V.K. Phys.Rep., 1984, vol.104, No 1, p. 1.
3. Abgulloev Kh., Bogolubsky I., Makhankov V.G. Nucl.Fusion, 1975, vol.15, p. 21; Дегтярев Л.М., Маханьков В.Г., Рудаков Л.И. ЖЭТФ, 1974, т. 67, с. 553.
4. Ma J.C. Stud. Appl.Math., 1979, 60, p. 73.
5. Herrera J.J.E. J.Phys.A, Math. and Gen., 1983, 16, p. L597.
6. Дубровин Б.А. УМН, 1981, 36, №2, с. 11.
7. Справочник по специальным функциям. Под ред. М.Абрамовича и И.Стигана, "Наука", М., 1979.

Рукопись поступила в издательский отдел
20 ноября 1984 года.

Вниманию организаций и лиц, заинтересованных в получении публикаций Объединенного института ядерных исследований

Принимается подписка на препринты и сообщения Объединенного института ядерных исследований.

Установлена следующая стоимость подписки на 12 месяцев на издания ОИЯИ, включая пересылку, по отдельным тематическим категориям:

ИНДЕКС	ТЕМАТИКА	Цена подписки на год
1.	Экспериментальная физика высоких энергий	10 р. 80 коп.
2.	Теоретическая физика высоких энергий	17 р. 80 коп.
3.	Экспериментальная нейтронная физика	4 р. 80 коп.
4.	Теоретическая физика низких энергий	8 р. 80 коп.
5.	Математика	4 р. 80 коп.
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия	4 р. 80 коп.
7.	Физика тяжелых ионов	2 р. 85 коп.
8.	Криогеника	2 р. 85 коп.
9.	Ускорители	7 р. 80 коп.
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных	7 р. 80 коп.
11.	Вычислительная математика и техника	6 р. 80 коп.
12.	Химия	1 р. 70 коп.
13.	Техника физического эксперимента	8 р. 80 коп.
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами	1 р. 70 коп.
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях	1 р. 50 коп.
16.	Дозиметрия и физика защиты	1 р. 90 коп.
17.	Теория конденсированного состояния	6 р. 80 коп.
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники	2 р. 35 коп.
19.	Биофизика	1 р. 20 коп.

Подписка может быть оформлена с любого месяца текущего года.

По всем вопросам оформления подписки следует обращаться в издательский отдел ОИЯИ по адресу: 101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79.

Маханьков В.Г., Мырзакулов Р. P5-84-741

Некоторые точные решения системы уравнений взаимодействующих длинной и и короткой волн

Рассматривается система уравнений взаимодействующих длинной и короткой волн, описывающих взаимодействия ионно-звуковой и ленгмюровской волн в плазме, а также экситон-фононное и магнон-фононное взаимодействия в кристаллах. Ранее было показано, что такая система неинтегрируема, т.е. ее нельзя интегрировать с помощью метода обратной задачи рассеяния. Тем не менее в данной работе найдены точные решения рассматриваемой системы в виде "бегущих волн", выражающиеся через функции Вейерштрасса, Якоби, а также тригонометрические, гиперболические и рациональные функции. Часть полученных решений являются сингулярными, другие-регулярными. Показано, что среди полученных решений содержится периодическое решение, выражающееся через одномерную тэта-функцию Римана. Полученные решения отвечают разным граничным условиям.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод О.С.Виноградовой

Makhankov V.G., Myrzakulov R. P5-84-741

Some Exact Solutions of Interacting Long and Short Wave Equation System

System of equations of interacting long and short waves is considered which describe interactions of ion-accoustic and Langmuir waves in plasma as well as exciton-phonon and magnon-phonon interactions in crystals. It was shown earlier, that such a system is nonintegrable by the inverse scattering method. Nevertheless, exact solutions of the system considered are found in the form of "travelling waves" expressed via the Weierstrass function, and via Jacobi, an trigonometric, hyperbolic and rational functions. The obtained solutions are partly singular, and partly regular. It is shown that among the obtained solutions a periodic one is found expressed via one-dimensional Riemann θ-function. The solutions meet requirements of different boundary conditions.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984