сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5-84-719

В.Г.Маханьков, Р.Мырзакулов

σ -МОДЕЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЯДЖИМЫ-ОЙКАВЫ

1984

Каждое нелинейное эволюционное уравнение /НЭУ/, интегрируемое с помощью метода обратной задачи рассеяния /МОЗР/, калибровочно-эквивалентно, вообще говоря, некоторой "σ-модели". Так, нелинейное уравнение Шредингера калибровочно-эквивалентно уравнению Ландау-Лифшица [1-3], релятивистское уравнение sine-Gordon эквивалентно $O(n)$ - инвариантной σ-модели [2] и т.д. Суть калибровочной эквивалентности заключается в следующем: НЭУ, интегрируемые с помощью МОЗР, возникают как условия совместности системы линейных дифференциальных уравнений

$$\phi_x = U(x, t, \lambda)\phi, \quad \phi_t = V(x, t, \lambda)\phi; \qquad /1/$$

где $\phi \in GL(n, C)$; $U, V \in gl(n, C)$, $\lambda \in C$. Условия совместности системы /1/ имеют вид

$$U_t - V_x + [U, V] = 0. \qquad /2/$$

Разложение последнего уравнения в ряд Лорана по параметру λ дает систему НЭУ на коэффициенты разложения, интегрируемую с помощью МОЗР посредством системы /1/. Кроме того, система /1/ и уравнения /2/ имеют интересную геометрическую интерпретацию, позволяющую привлечь для их изучения мощный аппарат современной дифференциальной геометрии и теории групп. Так, если U и V интерпретировать как коэффициенты связности в расслоении с базой R^2 и слоем $GL(n, C)$, то уравнения /2/ означают, что кривизна этой связности равна нулю, т.е. связность плоская.

На этом языке калибровочная эквивалентность двух НЭУ выражается в том, что соответствующие плоские связности U, V определены в одном расслоении и получаются друг из друга калибровочным преобразованием

$$U_1 = gU_2g^{-1} + g_x g^{-1}, \quad V_1 = gV_2g^{-1} + g_t g^{-1}, \qquad /3/$$

где $g \in GL(n, C)$. При этом решение соответствующих систем линейных дифференциальных уравнений /1/ связано линейным преобразованием

$$\phi_1 = g\phi_2. \qquad /4/$$

В настоящей заметке найдены уравнения, калибровочно-эквивалентные системе Яджимы-Ойкавы [4]

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

$$iE_t + \frac{1}{2}E_{xx} - nE = 0, \quad n_t + n_x + |E|^2_x = 0, \qquad /5/$$

где E - амплитуда колебаний плазмы, n - вариация плотности ионов. Она является вполне интегрируемым приближением к уравнениям Захарова [5], описывающим взаимодействие ленгмюровских и ионно-звуковых волн в плазме. Как недавно было показано в [6], эти же уравнения описывают волны в магнитных цепочках в низкотемпературной области и "ультрарелятивистском" пределе ($v \simeq 1$) при однонаправленном движении.

Рассмотрим некоторые "редукции" системы /5/:

а/ Если $n_t = 0$, она переходит в известное нелинейное уравнение Шредингера с притяжением

$$iE_t + \frac{1}{2}E_{xx} + |E|^2 E = 0. \qquad /6/$$

Это уравнение подробно исследовано в [7].

б/ В случае $n_x = 0$ получим

$$iE_t + \frac{1}{2}E_{xx} - nE = 0,$$

$$n_t + |E|^2_x = 0. \qquad /7/$$

Эта система известна как уравнения резонансного взаимодействия короткой и длинной волн в плазме. Аналогичные уравнения возникают при анализе внутренних волн [8] и волн Россби [9]. Система уравнений /7/ была проинтегрирована с помощью МОЗР в [10].

Решения системы уравнений Яджимы-Ойкавы были найдены в квадратурах в [4]. В работе [4] получены решения /5/ при разных асимптотиках на бесконечности, в том числе и ненулевых, при этом пара (U, V) имеет вид

$$U = A_0 + 2i\lambda A_1 + (2\lambda)^{-1} A_{-1}, \qquad /8/$$

$$V = -U + 2i\lambda^2 A_1^2 + \lambda B_1 + B_0 + i(4\lambda)^{-1} \begin{pmatrix} |\Phi|^2 & 0 & |\Phi|^2 \\ \Phi_x & 0 & \Phi_x \\ -|\Phi|^2 & 0 & -|\Phi|^2 \end{pmatrix}, \qquad /9/$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\Phi^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi^* & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{-1} = \begin{pmatrix} -ni & 0 & -ni \\ \Phi & 0 & \Phi \\ ni & 0 & ni \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\Phi^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi^* & 0 \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{2}\Phi^*_x + \Phi^* & 0 \\ \frac{1}{2}\Phi & 0 & -\frac{1}{2}\Phi \\ 0 & -\frac{i}{2}\Phi^*_x - \Phi^* & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{-1} = \begin{pmatrix} |\Phi|^2 & 0 & |\Phi|^2 \\ \Phi_x & 0 & \Phi_x \\ -|\Phi|^2 & 0 & -|\Phi|^2 \end{pmatrix},$$

$$\Phi = E \exp\{i(\tfrac{t}{2} - x)\}.$$

Совершим в системе /1/ замену $\phi = g\tilde{\phi}$, где

$$g(x, t, \lambda_0) = \phi(x, t, \lambda)|_{\lambda = \lambda_0} \subset GL(\xi, C)$$

- решения Йоста системы /1/ при $\lambda = \lambda_0$:

$$g_x = U(x, t, \lambda_0) g, \quad g_t = V(x, t, \lambda_0) g. \qquad /10/$$

Под действием этого преобразования коэффициенты связности U и V перейдут в $\tilde{U}$ и $\tilde{V}$ соответственно:

$$\tilde{U} = g^{-1} U g - g^{-1} g_x, \qquad /11/$$

$$\tilde{V} = g^{-1} V g - g^{-1} g_t. \qquad /12/$$

Так как связность U, V является плоской, таковой будет и $\tilde{U}$, $\tilde{V}$. С учетом /8/, /9/ и /10/ получим следующие выражения для $\tilde{U}$ и $\tilde{V}$

$$\tilde{U} = 2i(\lambda - \lambda_0) g^{-1} A_1 g - \frac{\lambda - \lambda_0}{4\lambda_0 \lambda} g^{-1} A_{-1} g, \qquad /13/$$

$$\tilde{V} = 2i(\lambda^2 - \lambda_0^2) g^{-1} A_1^2 g - U - \frac{i(\lambda - \lambda_0)}{4\lambda_0\lambda} g^{-1} B_{-1} g + (\lambda - \lambda_0) B_1. \qquad /14/$$

Введем новые матрицы

$$\sigma = g^{-1} A_1 g, \qquad /15/$$

$$S = g^{-1} A_{-1} g. \qquad /16/$$

Тогда новые коэффициенты связности $\tilde{U}$, $\tilde{V}$ принимают вид

$$\tilde{U} = 2i(\lambda - \lambda_0)[\sigma + (4\pi\lambda_0\lambda)^{-1} S], \qquad /17/$$

$$\tilde{V} = -\tilde{U} + (\lambda - \lambda_0)\{2i(\lambda + \lambda_0)\sigma^2 + \sigma(\sigma^2)_x + \lambda^{-1}[i(4\lambda_0)^{-1}[S, \sigma^2] + \frac{1}{2}[S, \sigma^2]\sigma]\}.$$

Равенство нулю кривизны связности $\tilde{U}$, $\tilde{V}$ дает систему уравнений для σ и S

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_t + \sigma_x + \left(\frac{i}{2}\sigma\sigma_x^2 - 2\lambda_0\sigma_x^2\right)_x + (4i\lambda_0)^{-1} h = 0, \\ &S_t + S_x + \left(\frac{1}{2}[S, \sigma^2]_x - i\lambda_0[S, \sigma^2]\right)_x + i\lambda_0 h = 0, \end{aligned}\right\} \qquad /19/$$

где $h = [S(\sigma_x - 2i\lambda_0 I), \sigma^2] + ([\sigma^2, S]\sigma)_x$.

Система уравнений /19/, вследствие /11/-/12/, является калибровочно-эквивалентной системе уравнения Яджимы-Ойкавы /5/.

Как исходные U, V, так и новые $\tilde{U}$, $\tilde{V}$ коэффициенты связности, а также переменные σ, S являются элементами алгебры $gl(3, C)$, причем

$$\mathrm{Sp}\, U = \mathrm{Sp}\, V = \mathrm{Sp}\, \tilde{U} = \mathrm{Sp}\, \tilde{V} = \mathrm{Sp}\, \sigma = \mathrm{Sp}\, S = 0. \qquad /20/$$

Теперь рассмотрим редукции /6/ и /7/. Как известно, нелинейному уравнению Шредингера с притяжением /6/ соответствуют уравнения Ландау-Лифшица /1-3/. Поэтому, не останавливаясь на нем, рассмотрим уравнение резонансного взаимодействия короткой и длинной волн /7/, предварительно переписав его в виде

$$iE_t - 2E_{xx} + 2nE = 0, \quad n_t + |E|_x^2 = 0. \qquad /21/$$

Система уравнений /21/ является вполне интегрируемой. Она является условием совместности для следующей линейной системы

$$\left.\begin{aligned} f_x &= U_1 f, \\ f_t &= V_1 f, \end{aligned}\right. \qquad /22/$$

где

$$U_1 = C_0 + i\lambda C_1, \quad V_1 = D_0 + \lambda D_1 + 2i\lambda^2 D_2;$$

$$C_0 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E}{2} & in \\ 0 & 0 & \frac{E^*}{2} \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad /23/$$

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 & -iE_x & -\frac{i}{2}|E|^2 \\ -E^* & 0 & iE_x^* \\ 0 & -E & 0 \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & -E^* \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_2 = C_1^2$$

Как и в случае системы уравнений Яджимы-Ойкавы, совершим в системе /22/ замену $f = \omega\tilde{f}$, где $\omega = f(x, t, \lambda)|_{\lambda=0}$ есть решение Йоста системы /22/ при $\lambda = 0$:

$$\left.\begin{aligned} \omega_x &= U_{10}\omega, \\ \omega_t &= V_{10}\omega, \end{aligned}\right\} \qquad /24/$$

$$U_{10} = U_1|_{\lambda=0}, \quad V_{10} = V_1|_{\lambda=0}.$$

Тогда коэффициенты $\tilde{U}_1$, $\tilde{V}_1$ перейдут соответственно в

$$\tilde{U}_1 = \omega^{-1} U_1 \omega - \omega^{-1}\omega_x, \quad \tilde{V}_1 = \omega^{-1} V_1 \omega - \omega^{-1}\omega_t, \qquad /25/$$

или

$$\tilde{U}_1 = i\lambda\omega^{-1} C_1\omega, \quad \tilde{V}_1 = \lambda\omega^{-1} D_1\omega + 2i\lambda^2\omega^{-1} D_2\omega.$$

Так как

$$\omega^{-1} D_1\omega = 2(\sigma^2)_x, \quad \omega^{-1} D_2\omega = \sigma^2,$$

где σ то же, что и в /15/,

$$\sigma = \omega^{-1} C_1\omega, \qquad /26/$$

имеем

$$\left.\begin{aligned} \tilde{U}_1 &= i\lambda\sigma, \\ \tilde{V}_1 &= 2i\lambda^2\sigma^2 + 2\lambda(\sigma^2)_x. \end{aligned}\right\} \qquad /27/$$

Равенство нулю кривизны связности $\tilde{U}_1$, $\tilde{V}_1$ означает, что σ является решением уравнения

$$i\sigma_t + 2[\sigma, \sigma_{xx}] - 4(\sigma_x\sigma)_x = 0, \qquad /28/$$

которое можно рассматривать как некое обобщение известного уравнения Ландау-Лифшица.

Приведем некоторые свойства матрицы σ, удовлетворяющей уравнению /28/:

$$\mathrm{Sp}\,\sigma = 0, \qquad /29/$$

$$\det \sigma_x = \frac{i}{2}|E|^2. \qquad /30/$$

/29/ следует из определения матрицы σ, а /30/ доказывается непосредственным вычислением

$$\det \sigma_x = \det(\omega^{-1}[C_1, C_0]\omega) = \frac{i}{2}|E|^2.$$

В заключение авторы выражают благодарность доценту Э.И.Уразакову и О.К.Пашаеву за полезные замечания и плодотворные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров В.Е., Тахтаджян Л.А. ТМФ, 1979, 38, с.26.
2. Orfanidis S. Phys.Rev.D, 1980, vol.21, No.6.
3. Kundu A., Makhankov V., Pashaev O. JINR, E17-82-601, Dubna, 1982.
4. Yajima N., Oikawa M. Prog.Theor.Phys., 1976, 56, p.1719.
5. Захаров В.Е. ЖЭТФ, 1972, 62, с.1745.
6. Kundu A., Makhankov V., Pashaev D. JINR, E17-82-677, Dubna, 1982. (Physica D, excepted).
7. Захаров В.Е., Шабат А.Б. ЖЭТФ, 1971, 61, с.118.
8. Grimshaw R. Stud.Appl.Math., 1977, 56, p.241.
9. Benney D. Stud.Appl.Math., 1976, 55, p.93; Stud.Appl. Math., 1977, 56, p.81.
10. Ma Y.-C. Stud.Appl.Math., 1978, 58, p.201.

Рукопись поступила в издательский отдел
6 ноября 1984 года.

СООБЩЕНИЯ, КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ, ПРЕПРИНТЫ И СБОРНИКИ ТРУДОВ КОНФЕРЕНЦИЙ, ИЗДАВАЕМЫЕ ОБЪЕДИНЕННЫМ ИНСТИТУТОМ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ, ЯВЛЯЮТСЯ ОФИЦИАЛЬНЫМИ ПУБЛИКАЦИЯМИ.

Ссылки на СООБЩЕНИЯ и ПРЕПРИНТЫ ОИЯИ должны содержать следующие элементы:

- фамилии и инициалы авторов,
- сокращенное название Института /ОИЯИ/ и индекс публикации,
- место издания /Дубна/,
- год издания,
- номер страницы /при необходимости/.

Пример:

1. Первушин В.Н. и др. ОИЯИ, Р2-84-649, Дубна, 1984.

Ссылки на конкретную СТАТЬЮ, помещенную в сборнике, должны содержать:

- фамилии и инициалы авторов,
- заглавие сборника, перед которым приводятся сокращенные слова: "В кн."
- сокращенное название Института /ОИЯИ/ и индекс издания,
- место издания /Дубна/,
- год издания,
- номер страницы.

Пример:

Колпаков И.Ф. В кн. XI Международный симпозиум по ядерной электронике, ОИЯИ, Д13-84-53, Дубна, 1984, с.26.

Савин И.А., Смирнов Г.И. В сб."Краткие сообщения ОИЯИ", № 2-84, Дубна,1984,с.3.

Вниманию организаций и лиц, заинтересованных в получении публикаций Объединенного института ядерных исследований

Принимается подписка на препринты и сообщения Объединенного института ядерных исследований.

Установлена следующая стоимость подписки на 12 месяцев на издания ОИЯИ, включая пересылку, по отдельным тематическим категориям:

ИНДЕКС	ТЕМАТИКА	Цена подписки на год
1.	Экспериментальная физика высоких энергий	10 р. 80 коп.
2.	Теоретическая физика высоких энергий	17 р. 80 коп.
3.	Экспериментальная нейтронная физика	4 р. 80 коп.
4.	Теоретическая физика низких энергий	8 р. 80 коп.
5.	Математика	4 р. 80 коп.
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия	4 р. 80 коп.
7.	Физика тяжелых ионов	2 р. 85 коп.
8.	Криогеника	3 р. 85 коп.
9.	Ускорители	7 р. 80 коп.
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных	7 р. 80 коп.
11.	Вычислительная математика и техника	6 р. 80 коп.
12.	Химия	1 р. 70 коп.
13.	Техника физического эксперимента	8 р. 80 коп.
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами	1 р. 70 коп.
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях	1 р. 50 коп.
16.	Дозиметрия и физика защиты	1 р. 90 коп.
17.	Теория конденсированного состояния	6 р. 80 коп.
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники	2 р. 35 коп.
19.	Биофизика	1 р. 20 коп.

Подписка может быть оформлена с любого месяца текущего года.

По всем вопросам оформления подписки следует обращаться в издательский отдел ОИЯИ по адресу: 101000 Москва, Главпочтампт, п/я 79.

Маханьков В.Г., Мырзакулов Р. Р5-84-719

σ-модельное представление системы уравнений Яджимы-Ойкавы

Исследуется система уравнений Яджимы-Ойкавы, описывающая в низкотемпературной области и в ультрарелятивистском пределе ленгмюровскую турбулентность в плазме и магнон-фононное взаимодействие в магнитных цепочках. Ищутся калибровочно-эквивалентные уравнения к уравнениям Яджимы-Ойкавы и уравнению резонансного взаимодействия короткой и длинной волн. Калибровочные преобразования задаются стандартным образом: $\tilde{U} = g^{-1}Ug + g^{-1}g_x$, $\tilde{V} = g^{-1}Vg + g^{-1}g_t$. С помощью калибровочного преобразования найдены калибровочно-эквивалентные уравнения к системе уравнений Яджимы-Ойкавы. Показано, что уравнения резонансного взаимодействия короткой и длинной волн калибровочно-эквивалентны некоторому обобщению уравнений Ландау-Лифшица. Это означает, что системы уравнений Яджимы-Ойкавы и уравнения резонансного взаимодействия короткой и длинной волн содержат больше информации, чем классическое уравнение Ландау-Лифшица.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод О.С.Виноградовой

Makhankov V.G., Myrzakulov R. P5-84-719

σ-Model Representation of the Yajima-Oikawa Equation System

The Yajima-Oikawa equation system describing the Langmuir turbulence in plasma in the low temperature region and in the ultrarelativistic limit and magnon-phonon interaction in magnetic chains is investigated. Gauge equivalent equations to the Yajima-Oikawa equations and to the equation of resonance interaction of short and long waves are searched. The gauge transformations are given in a standard way: $\tilde{U} = g^{-1}Ug + g^{-1}g_x$, $\tilde{V} = g^{-1}Vg + g^{-1}g_t$. Gauge equivalent equations to the Yajima-Oikawa equation system are found by the gauge transformation. It is shown that the equations of resonance interaction of short and long waves are gauge invariant to a certain generalization of Landau-Lifshits equations. That means that the Yajima-Oikawa equation system and equations of resonance interaction of short and long waves contain more information as compared with the classical Landau-Lifshits equation.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984