сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P5-84-718

С.И.Сердюкова

ИСКУССТВЕННЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ВНЕШНЕЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ

1984

Исторически "синтетические граничные условия" впервые возникли в задачах сейсмологии, которые ставятся в неограниченных областях. При численном решении исходная задача заменяется задачей в ограниченной области. Аналогичная ситуация возникает в задачах акустики, гидродинамике, а также при расчете крупных физических установок, где приходится иметь дело с очень большими областями. В связи с этим большое внимание уделяется постановке математически обоснованных "синтетических граничных условий"/1-3/. В предлагаемой работе для внешней задачи Дирихле ставятся искусственные граничные условия, которые позволяют сократить объем вычислительной работы приблизительно в сто раз по сравнению с расчетами, в которых граничное условие переносится из бесконечности на конечное расстояние. Исследована устойчивость возникающей краевой задачи, которая затем аппроксимируется системой разностных уравнений. Показано, что для решения получающейся системы линейных уравнений хорошо подходит вариант метода прогонки Абрамова-Андреева/4/.

Решение задачи Дирихле вне единичного круга имеет вид /5/

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(r^2 - 1)}{(r^2 - 2\cos(\theta_0 - \theta) r + 1)} f(\theta_0)\, d\theta_0 .$$

При $r \to \infty$ решение стремится к пределу $u_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, d\theta$.

Пусть вместо внешней задачи Дирихле решается задача в кольце $1 \le r \le r_0$, $u|_{r=1} = f(\theta)$, $u|_{r=r_0} = u_0$. Посмотрим, каким должно быть r_0, чтобы относительная погрешность не превышала 1%. Максимум модуля решения задачи Дирихле достигается на границе. Надо потребовать, чтобы $(2r_0 + 2)/(r_0 - 1)^2 < 0{,}01$. Отсюда следует, что $r_0 > 101 + \sqrt{(101)^2 + 199} > 200$! Посмотрим, каким условиям удовлетворяет при $r = r_0$ точное решение внешней задачи Дирихле. Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{2\pi} \Biggl\{ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{4r}{(r^2+1)^2} \frac{f(\theta_0)\, d\theta_0}{\left(1 - \dfrac{2r\cos(\theta_0 - \theta)}{r^2+1}\right)} +$$

$$+ \frac{r^2 - 1}{r^2 + 1} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2(1 - r^2)\, f(\theta_0) \cos(\theta_0 - \theta)\, d\theta_0}{(r^2+1)^2 \left(1 - \dfrac{2r\cos(\theta_0 - \theta)}{r^2+1}\right)^2} \Biggr\} ,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=\frac{1}{2\pi}\Big\{\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{r^2-1}{r^2+1}\right)\frac{8r^2}{(r^2+1)^2}\frac{\sin^2(\theta_0-\theta)\,f(\theta_0)\,d\theta_0}{\left(1-\frac{2r}{r^2+1}\cos(\theta_0-\theta)\right)^3}-$$

$$-\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{r^2-1}{r^2+1}\right)\frac{2r}{r^2+1}\cos(\theta_0-\theta)\frac{f(\theta_0)\,d\theta_0}{\left(1-\frac{2r}{r^2+1}\cos(\theta_0-\theta)\right)^2}\Big\}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{r^2-1}{r(r^2+1)}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+O\left(\frac{1}{r^3}\right).$$

Рассмотрим задачу в кольце с искусственным граничным условием на внешней окружности: $1\le r\le r_0$,

$$\tilde u\Big|_{r=1}=f(\theta),\quad \frac{\partial\tilde u}{\partial r}\Big|_{r=r_0}=\frac{1}{r}\frac{\partial^2\tilde u}{\partial\theta^2}. \qquad /1/$$

Получим оценку уклонения решения задачи с искусственным граничным условием $\tilde u$ от точного решения внешней задачи Дирихле. Одновременно будет доказана устойчивость поставленной краевой задачи с искусственными граничными условиями в C. Решение краевой задачи

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}\tilde u+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\tilde u}{\partial\theta^2}=0,\qquad 1\le r\le r_0,$$

$$\tilde u\Big|_{r=1}=f(\theta),\quad \frac{\partial\tilde u}{\partial r}\Big|_{r=r_0}=\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}$$

ищем в виде ряда по собственным функциям:

$$\tilde u(r,\theta)=\gamma\ln r+A_0+\sum_{\ell=1}^{\infty}(A_\ell r^\ell+A_{-\ell}r^{-\ell})\cos\ell\theta+(B_\ell r^\ell-B_{-\ell}r^{-\ell})\sin\ell\theta.$$

Из первого граничного условия получаем системы

$$A_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\,d\theta=c_0,$$

$$A_\ell+A_{-\ell}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\cos\ell\theta\,d\theta=C_\ell,$$

$$B_\ell-B_{-\ell}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\sin\ell\theta\,d\theta=s_\ell,\qquad \ell=1,\dots,\infty.$$

Из второго граничного условия получаем дополнительную систему

$$\frac{\gamma}{r}+\sum_{\ell=1}^{\infty}\ell(A_\ell r^{\ell-1}-A_{-\ell}r^{-\ell-1})\cos\ell\theta+\ell(B_\ell r^{\ell-1}+B_{-\ell}r^{-\ell-1})\sin\ell\theta=$$

$$=-\frac{1}{r}\sum_{\ell=1}^{\infty}\ell^2(A_\ell r^\ell+A_{-\ell}r^{-\ell})\cos\ell\theta+\ell^2(B_\ell r^\ell-B_{-\ell}r^{-\ell})\sin\ell\theta;$$

$$\gamma=0,\quad A_\ell(\ell+1)r_0^\ell+A_{-\ell}(\ell-1)r_0^{-\ell}=0,$$

$$B_\ell(\ell+1)r_0^\ell-B_{-\ell}(\ell-1)r_0^{-\ell}=0.$$

Отсюда

$$\tilde u=c_0+r^{-1}(c_1\cos\theta+s_1\sin\theta)+\sum_{\ell=2}^{\infty}r^{-\ell}(c_\ell\cos\ell\theta+s_\ell\sin\ell\theta)-$$

$$-\sum_{\ell=2}^{\infty}(r^\ell-r^{-\ell})(c_\ell\cos\ell\theta+s_\ell\sin\ell\theta)\frac{(\ell-1)\cdot r^{-\ell}}{[(\ell+1)r_0^\ell-(\ell-1)r_0^{-\ell}]}.$$

Решение исходной внешней задачи Дирихле имеет вид

$$u=c_0+\sum_{\ell=1}^{\infty}r^{-\ell}(c_\ell\cos\ell\theta+s_\ell\sin\ell\theta).$$

Оцениваем погрешность:

$$|u-\tilde u|\le 2\max_\theta|f(\theta)|\cdot\sum_{\ell=2}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^\ell\left(\frac{\ell-1}{\ell+1}\right)\frac{r_0^{-\ell}}{\left(1-\left(\frac{\ell-1}{\ell+1}\right)r_0^{-2\ell}\right)}<$$

$$<2\max_\theta|f(\theta)|\frac{r_0^{-2}}{(1-r_0^{-1})\left(1-\frac{1}{3r_0^4}\right)}. \qquad /2/$$

Были использованы две элементарные оценки:

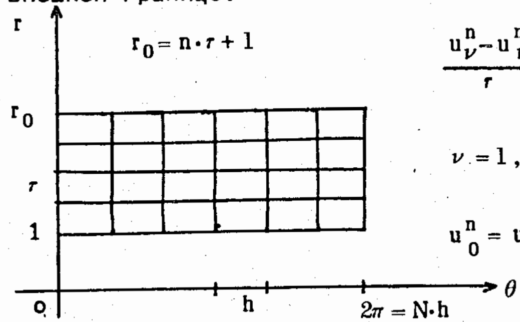
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta_0)(\cos\ell\theta\cos\ell\theta_0+\sin\ell\theta\sin\ell\theta_0)\,d\theta_0\le 2\max_\theta|f(\theta)|;$$

$$\frac{\ell-1}{\ell+1}r_0^{-2\ell}>\frac{\ell}{\ell+2}r_0^{-2\ell-2}\ \text{при}\quad r_0^2>\frac{\ell(\ell+1)}{(\ell-1)(\ell+2)}<2.$$

Из /2/ и неравенства $|\tilde u|<\max_\theta|f(\theta)|$ следует устойчивость рассматриваемой краевой задачи /1/ в равномерной метрике. При $r_0=20$ величина в правой части /2/ не превосходит $0{,}01\cdot\max_\theta|f(\theta)|$, относительная погрешность не превосходит 1%. Таким образом, в случае искусственных граничных условий r_0 уменьшается в 10 раз.

соответственно объем вычислительной работы - в 100 раз. Заметим, что при отсутствии в искусственном граничном условии члена $\frac{1}{r}\frac{\partial^2\bar u}{\partial\theta^2}$ мы имели бы лишь $|u-\bar u| \le 2\max\limits_{\theta}|f(\theta)|/(r_0-1)$.

Для численного решения краевой задачи /1/ могут быть использованы известные итерационные методы. Нестандартная ситуация возникает на каждом шаге итерации при вычислении значений на внешней границе:



$$\frac{u_\nu^n - u_\nu^{n-1}}{\tau} = \frac{1}{r_0}\,\frac{u_{\nu+1}^n - 2u_\nu^n + u_{\nu-1}^n}{h^2},$$

$$\nu = 1,\ldots, N,$$

$$u_0^n = u_N^n,\quad u_{N+1}^n = u_1^n.$$

Пусть значения u_ν^{n-1} /во внутренних узлах области/ на очередном шаге итерации сосчитаны. Для решения системы

$$u_{\nu+1}^n - \left(2 + \frac{r_0 h^2}{\tau}\right) u_\nu^n + u_{\nu-1}^n = -\frac{r_0 h^2}{\tau} u_\nu^{n-1},$$

$$\nu = 1,\ldots, N,\quad u_0^n = u_N^n,\quad u_{N+1}^n = u_1^n$$

применим вариант метода прогонки, предложенный в работе А.А.Абрамова и В.Б.Андреева [4] для решения систем вида

$$A_N \bar y_N = -f_N, \qquad /3/$$

$$A_N = \left\|\begin{matrix} -c_1 & b_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a_1 \\ a_2 & -c_2 & b_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & -c_3 & b_3 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -c_{N-2} & b_{N-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{N-1} & -c_{N-1} & b_{N-1} \\ b_N & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_N & -c_N \end{matrix}\right\|, \qquad /4/$$

$a_i > 0$, $b_i > 0$, $c_i > a_i + b_i$. В нашем случае

$$A_N = \left\|\begin{matrix} -(2+\omega) & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -(2+\omega) & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -(2+\omega) & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -(2+\omega) & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & -(2+\omega) \end{matrix}\right\|,\quad \omega = \frac{r_0 h^2}{\tau}.$$

Перепишем /3/ в виде

$$A_{N-1}\bar y_{N-1} + \bar u_{N-1} y_N = -\bar f_{N-1},\quad \bar v_{N-1}^* \bar y_{N-1} - c_N y_N = -f_N,$$

где

$$\bar u_{N-1} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \bar v_{N-1} = \begin{pmatrix} b_N \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда, если

$$A_{N-1}\bar p_{N-1} = -\bar f_{N-1},\quad A_{N-1}\bar q_{N-1} = -\bar u_{N-1}, \qquad /5/$$

то справедливы соотношения

$$\bar y_{N-1} = \bar p_{N-1} + y_N \bar q_{N-1},\quad y_N = \frac{f_N + \bar v_{N-1}^*\cdot\bar p_{N-1}}{c_N - \bar v_{N-1}^*\cdot\bar q_{N-1}}.$$

Решение системы /5/ может быть получено методом прогонки

$$p_\nu = a_{\nu+1}p_{\nu+1} + \beta_{\nu+1},\quad q_\nu = a_{\nu+1}q_{\nu+1} + \gamma_{\nu+1},\quad \nu = 1,\ldots, N-1.$$

Коэффициенты a_ν, β_ν, γ_ν считаются по рекуррентным формулам:

$$a_{\nu+1} = \frac{1}{2+\omega-a_\nu},\quad \beta_{\nu+1} = \frac{\beta_\nu + f_\nu}{2+\omega-a_\nu},\quad \gamma_{\nu+1} = \frac{\gamma_\nu + u_\nu}{2+\omega-a_\nu},$$

$$a_2 = \frac{1}{2+\omega},\quad \beta_2 = \frac{f_1}{2+\omega},\quad \gamma_2 = \frac{1}{2+\omega}.$$

Для обратного хода прогонки определяем p_N, q_N. Имеем $y_N = y_N$, $y_N = p_N + y_N q_N$. Следовательно, $p_N = 0$, $q_N = 1$, $p_{N-1} = \beta_N$, $q_{N-1} = \alpha_N + \gamma_N$.

После того, как сосчитаны прогоночные коэффициенты и обратным ходом прогонки определены $\bar{p}_N$, $\bar{q}_N$, искомое решение системы /3/ находится по формулам

$$y_N = \frac{\beta_{N+1} + \alpha_{N+1} p_1}{1 - \alpha_{N+1} q_1 - \gamma_{N+1}}, \quad y_\nu = p_\nu + y_{\nu+1} \cdot q_\nu, \; \nu = 1, \ldots, N-1. \qquad /6/$$

Процесс счета устойчив, так как метод прогонки устойчив при $a_\nu > 0$, $b_\nu > 0$, $c_\nu > a_\nu + b_\nu$, а знаменатель не обращается в нуль /4/. Приведем здесь доказательство, так как в нашем случае

$$c_\nu - a_\nu - b_\nu = \omega = \frac{r_0 h^2}{r} = O(h).$$

Из приведенных выше формул видно, что $\alpha_\nu < 1$, $\gamma_\nu > 0$, $\alpha_2 + \gamma_2 < 1$. Пусть $\alpha_\nu + \gamma_\nu < 1$, тогда

$$\alpha_{\nu+1} + \gamma_{\nu+1} = \frac{b_\nu + a_\nu \gamma_\nu}{c_\nu - a_\nu \alpha_\nu} < \frac{b_\nu + a_\nu - a_\nu \alpha_\nu}{c_\nu - a_\nu \alpha_\nu} = \frac{c_\nu - a_\nu \alpha_\nu - \omega}{c_\nu - a_\nu \alpha_\nu} =$$

$$= 1 - \frac{\omega}{c_\nu - a_\nu \alpha_\nu} < 1.$$

По доказанному $q_{N-1} = \alpha_N + \gamma_N < 1$ и, следовательно, $q_1 < 1$. Отсюда получаем, что

$$1 - \alpha_{N+1} \cdot q_1 - \gamma_{N+1} > \frac{\omega q_1}{c_N - c_N \alpha_N} = O(h), \quad q_1 > \gamma_2 = \frac{1}{2 + \omega}.$$

Покажем, что числитель в /6/ также $O(h)$. Имеем $\beta_2 = \dfrac{f_1}{(2+\omega)} = O(h)$, $f_\nu = O(h)$. Тогда из рекуррентной формулы следует, что все $\beta_\nu = O(h)$. Напомним, что $p_{p-1} = \beta_N = O(h)$, и тогда из $p_\nu = \alpha_{\nu+1} p_{\nu+1} + \beta_{\nu+1}$ следует, что все $p_\nu = O(h)$. Так что при малых h числитель и знаменатель для корректности счета делим на ω. Объем вычислений при таком алгоритме решения /3/ пропорционален /6/ числу точек на границе N и не влияет на порядок объема вычислительной работы в области, где число точек $O(N^2)$. Таким образом, при уменьшении площади в сто раз, грубо говоря, во столько же раз сокращается объем вычислительной работы.

Приношу благодарность Н.С.Бахвалову за постановку задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kelly K.R. et al. Proc. of the Royal Irish Acad. Conf. on Numer.Anal., New York, 1974, p.57-76.
2. Clayton R., Enquist B. Bull.Seismol.Soc.Amer., 1977, 67(6), p.1529-1540.
3. Enquist B., Majda A. Comm.on Pure and Appl.Math., 1979, vol.XXXII, p.313-357.
4. Абрамов А.А., Андреев В.Б. ЖВМ и МФ, 1963, т.3, №2, с.377-381.
5. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. "Наука", М., 1966, с.240.
6. Бахвалов Н.С. Численные методы. "Наука", М., 1973, с.555.

Рукопись поступила в издательский отдел
6 ноября 1984 года.

СООБЩЕНИЯ, КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ, ПРЕПРИНТЫ И СБОРНИКИ ТРУДОВ КОНФЕРЕНЦИЙ, ИЗДАВАЕМЫЕ ОБЪЕДИНЕННЫМ ИНСТИТУТОМ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ, ЯВЛЯЮТСЯ ОФИЦИАЛЬНЫМИ ПУБЛИКАЦИЯМИ.

Ссылки на СООБЩЕНИЯ и ПРЕПРИНТЫ ОИЯИ должны содержать следующие элементы:

- фамилии и инициалы авторов,
- сокращенное название Института /ОИЯИ/ и индекс публикации,
- место издания /Дубна/,
- год издания,
- номер страницы /при необходимости/.

Пример:

1. *Первушин В.Н. и др. ОИЯИ, Р2-84-649, Дубна, 1984.*

Ссылки на конкретную СТАТЬЮ, помещенную в сборнике, должны содержать:

- фамилии и инициалы авторов,
- заглавие сборника, перед которым приводятся сокращенные слова: "В кн."
- сокращенное название Института /ОИЯИ/ и индекс издания,
- место издания /Дубна/,
- год издания,
- номер страницы.

Пример:

Колпаков И.Ф. В кн. XI Международный симпозиум по ядерной электронике, ОИЯИ, Д13-84-53, Дубна, 1984, с.26.

Савин И.А., Смирнов Г.И. В сб."Краткие сообщения ОИЯИ", № 2-84, Дубна,1984,с.3.

Сердюкова С.И.
Р5-84-718

Искусственные граничные условия для внешней задачи Дирихле

Для внешней задачи Дирихле ставятся искусственные граничные условия. Это позволяет сократить объем вычислительной работы приблизительно в 100 раз по сравнению с расчетами, в которых граничное условие переносится из бесконечности на конечное расстояние. Исследуется устойчивость возникающей краевой задачи, которая затем аппроксимируется системой разностных уравнений. Показано, что для решения получающейся системы уравнений хорошо подходит вариант метода прогонки Абрамова-Андреева. Метод искусственных граничных условий может быть использован в решении задач магнитостатики.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод автора

Serdyukova S.I.
P5-84-718

The Synthetic Boundary Conditions for the Exterior Dirichlet Problem

For the exterior Dirichlet problem the synthetic boundary condition is stated. It permits to shorten the computation work volume approximately in 100 times with regard to the computation, when the boundary condition is carried over from the infinity to the finite distance.The stability of the originating boundary problem is investigated.Then it is approximated by the system of difference equations.The Abramov-Andreev variant of the stepwise pursuit method is shown to be well available for the solution of this system.The synthetic boundary conditions method can be used in the magnetostatic problem solution.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984