сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5-84-688

В.Г.Лежнев,* А.Б.Швачка

ОБ ОЦЕНКАХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ С КВАДРАТИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

* Кубанский государственный университет, Краснодар

1984

1. Рассмотрим на вещественной оси дифференциальное уравнение

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(t) + b_1 y^2(t) = f(t), \quad t \in (-\infty, \infty). \qquad /1/$$

Предположим, что решение существует, $y(t) \in W_1^k(-\infty, \infty)$, $f \in L_1(-\infty,\infty)$, $y^{(k)}(t) \to 0$ при $|t| \to \infty$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Обозначим $v(s) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{ist} dt$, $g(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{ist} dt$; в силу сделанных предположений $y(t)$ непрерывна, $y^{(n)}(t)$ принадлежит $L_1(-\infty,\infty)$, поэтому имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^{(k)}(t) e^{ist} dt = (-is)^k v(s). \qquad /2/$$

Следовательно, $v(s) = O(|s|^{-n})$ при $|s| \to \infty$, v принадлежит $L_2(-\infty,\infty)$, $y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} v(s) ds$ и $y(t) \in L\ (-\infty,\infty)$. Имеем далее $\int_{-\infty}^{\infty} y^2(t) e^{ist} dt = \int_{-\infty}^{\infty} v(x) v(s-x) dx$. Следовательно, $v(s)$ удовлетворяет уравнению

$$v(s) \sum_0^n (-is)^k a_k + b_1 \int_{-\infty}^{\infty} v(x) v(s-x) dx = g(s), \quad s \in (-\infty, \infty).$$

2. Предположим далее, что многочлен $p(s) = \sum_0^n (-is)^k a_k$ не имеет нулей на вещественной оси. Обозначим $p_0 = \max \frac{1}{|p(s)|} > 0$ и перепишем последнее уравнение

$$v(s) = \frac{g(s) - b_1 \int_{-\infty}^{\infty} v(x) v(s-x) dx}{p(s)}. \qquad /3/$$

Введем также следующие обозначения:

$$\|v\|_0 = \sup_{(-\infty,\infty)} |v(s)|, \quad \|v(x)\|_1 = \|v\|_{L_1}(-\infty,\infty), \quad \|v\|_2 = \|v\|_{L_2},$$

$$\Pi = \{ s : |\operatorname{Im} s| \le \mu, \ -\infty < \operatorname{Re} s < \infty \}.$$

<u>Лемма.</u> Пусть равномерно в полосе Π выполняется условие $|w(s)| \le A(B + |s|^a)^{-1}$, где $a > 1$, A и B – постоянные. Тогда для $s \in \Pi$ имеем

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} w(t)\,w(s-t)\,dt\right| \le \frac{A2^{a+2}w_{1m}}{2^a B + |\mathrm{Re}\,s|^a},$$

где $w_{1m} = \max\limits_{s\in\Pi} \|w(s-x)\|_{L_1}$.

Обозначим рассматриваемый интеграл через I:

$$I = \left(\int_{-\infty}^{-t} + \int_{-t}^{t} + \int_{t}^{\infty}\right) w(x)\,w(s-x)\,dx = I_1 + I_2 + I_3,$$

где $t = \mathrm{Re}\,s$. Оценим каждый из интегралов

$$|I_1| \le \max_{x\in(-\infty,-t)} |w(x)| \int_{-\infty}^{-t} |w(s-x)|\,dx \le$$

$$\le \max_{(-\infty,-t)} \frac{A}{B+|x|^a} \int_{-\infty}^{\infty} |w(s-x)|\,dx \le \frac{Aw_{1m}}{B+|t|^a},$$

аналогично получаем

$$|I_3| \le \frac{Aw_{1m}}{B+|t|^a}.$$

Рассмотрим I_2:

$$I_2 = \left(\int_{-t}^{t/2} + \int_{t/2}^{t}\right) w(x)\,w(s-x)\,dx = I_{21} + I_{22}$$

Имеем

$$|I_{21}| \le \max_{x\in(-t,t/2)} |w(s-x)| \int_{-t}^{t/2} |w(x)|\,dx \le$$

$$\le \max_{(-t,t/2)} \frac{A}{B+|t-x|^a} \int_{-\infty}^{\infty} |w(x)|\,dx \le \frac{Aw_{1m}}{B+|t/2|^a},$$

$$|I_{22}| \le \max_{(t/2,\,t)} |w(t)| \int_{t/2}^{t} |w(s-x)|\,dx \le$$

$$\le \max_{(t/2,t)} \frac{A}{B+|t|^a} \int_{-\infty}^{\infty} |w(s-x)|\,dx \le \frac{Aw_{1m}}{B+|t/2|^a}.$$

Следовательно,

$$|I| \le \frac{4\cdot A\cdot 2^a w_{1m}}{B\cdot 2^a + |t|^a}, \qquad /4/$$

и мы получили оценку леммы.

Рассмотрим в полосе $\Pi = \{s:\ -\mu \le \mathrm{Im}\,s \le \mu\}$ комплексной плоскости s множество B_a аналитических функций $u(s)$, удовлетворяющих

оценке

$$|u(s)| \le \frac{C}{1+|s|^a}, \quad s\in\Pi, \quad a \ge 0.$$

Обозначим $|||u||| = \sup\limits_{\Pi} |u(s)|(1+|s|^a)$; нетрудно показать, что это норма. Покажем, что B_a полно в этой норме. Пусть $|||u_n - u_m||| \to 0$. Для $s\in\Pi_r = \{s: s\in\Pi, |\mathrm{Re}\,s| \le r\}$ имеем

$$\sup_{\Pi_r} |u_n - u_m| \le \sup_{\Pi_r} (1+|s|^a)\,|u_n - u_m| \le |||u_n - u_m||| \to 0$$

при $m,n\to\infty$, следовательно, $u_n(s)$ равномерно сходится в $\Pi_r \forall r$, и существует предельная функция $u_0(s)$, аналитичная в Π. Так как числовая последовательность $|||u_n|||$ ограничена и

$$|u_n(s)| \le \frac{|||u_n|||}{1+|s|^a}, \quad s\in\Pi,$$

переходя к пределу при $n\to\infty$, получим, что выполняется соответствующая оценка и $u_0(s) \in B_a$.

Пусть $a>1$, рассмотрим в B_a оператор S,

$$Su = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\,u(s-t)\,dt, \quad s\in\Pi.$$

На основании леммы имеем для $w = Su$

$$|w(s)| \le \frac{2^{a+2}|||u|||\cdot\|u\|_1}{1+|s|^a},$$

а так как $\|u\|_1 \le C_a|||u|||$, где C_a зависит только от a, то получаем

$$|||w||| \le C_1 |||u|||^2.$$

Следовательно, оператор S ограничен.

Пространство B_a "почти конечномерно" в том смысле, что его любая ограниченная последовательность содержит фундаментальную подпоследовательность. Действительно, ограниченная последовательность $|||w_n|||$ содержит фундаментальную подпоследовательность $|||w_{n_k}|||$. Так как $|w_{n_k}(s)| \le |||w_{n_k}|||$ в любом прямоугольнике Π_r, то по теореме Витали о сходимости /3/ существует аналитическая в Π функция $w_0(s) = \lim w_{n_k}(s)$ вследствие полноты пространства $w_a \in B_a$. Следовательно, оператор S вполне непрерывен /1/.

Следующий оператор T также вполне непрерывен в B_a,

$$Tu = \frac{g(s)}{p(s)},$$

если в Π $g(s)$ аналитична и ограничена, а $p(s)$ не имеет нулей.

Отсюда получаем /1/, что T имеет по крайней мере одну неподвижную точку. Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема. Уравнение /3/ разрешимо в пространстве B_a, если $a>1$, $p(s)$ и $g(s)$ удовлетворяют указанным выше условиям.

Отметим еще одну оценку. Из уравнения /3/ имеем $v = \frac{1}{p}\left(g + b_1 S\frac{g}{p} + b_1 S\frac{b_1}{p}Sv\right)$. Пусть $|g(s)| \le g_0(1+|s|^2)^{-1}$. Так как $v \in B_n$, то, используя равенство $\|v\|_2 = \|y(t)\|_2$ и оценку $|Sv| < \|v\|_2^2$, а также лемму, получаем

$$|v(s)| \le \frac{p_0}{1+|s|^n}\left[\frac{g_0}{1+|s|^2} + (g_0|b_1| + |b_1|^2\|y\|_2^2)\frac{C_n}{1+|s|^n}\right], \qquad /5/$$

где C_n зависит лишь от n.

3. Итак, в пространстве B_n существует решение $v(s)$ интегрального уравнения /3/. Следовательно, существует и решение $y(t)$ уравнения /1/, такое, что

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} v(s)\, e^{-ist} ds.$$

Рассмотрим поведение $y(t)$ при $|t| \to \infty$. Пусть $t > 0$, в силу свойств $v(s)$ в последнем интеграле вещественную ось можно заменить на контур интегрирования $\ell_1 = \{s = \alpha + i\omega_1 : -\infty < \alpha < +\infty\}$, где ω_1 фиксировано на $(-\mu, 0)$, следовательно,

$$y^{(k)}(t) = \frac{1}{2\pi} e^{\omega_1 t}\int_{-\infty}^{\infty} v(\alpha + i\omega_1)\, e^{-i\alpha t}(\alpha + i\omega_1)^k\, d\alpha, \quad 0 \le k \le n-2.$$

Так как $v(\alpha + i\omega) \in B_n$, то получаем оценку при $t>0$

$$|y^{(k)}(t)| \le C_2 \exp(t\omega_1), \quad k = 0,1,\dots,n-2,$$

для любого $\omega_1 \in (-\mu, 0)$.

Аналогичным образом, используя контур $\ell_2 = \{s = \alpha + i\omega_2 : -\infty < \alpha < \infty\}$, где ω_2 фиксировано на интервале $(0,\mu)$, получим

$$|y^{(k)}(t)| \le C_3 \exp(\omega_2 t), \quad t < 0.$$

Следовательно, получим: если $f(t)$ такова, что $g(s)$ аналитична и ограничена в полосе Π, то существует решение $y(t)$ уравнения /1/, экспоненциально убывающее при $|t| \to \infty$,

$$|y^{(k)}(t)| \le C_4 e^{-\nu t}, \quad t \in (-\infty, \infty), \quad k = 0,1,\dots,n-2,$$

где $0 \le \nu < a$, a - наименьшее расстояние от вещественной оси до корней многочлена $p(s)$.

4. Рассмотрим оценки решений дифференциального уравнения /1/.

Пусть $n \ge 2$, $f(t)$ такова, что $g(s)$ аналитична и ограничена в полосе Π, и ее норма в $L_1(\ell)$, где ℓ - любая прямая, принадлежащая Π, равномерно ограничена. Пусть

$$|p(s)|^{-1} \le g_0(1+|s|^n)^{-1},$$

тогда $g(s)p^{-1}(s) \in B_n$.

Обозначим $s = \alpha + i\omega$, $R > 0$,

$$y_0(t) = \int_{-R}^{R} e^{-i\alpha t} v(\alpha)\, d\alpha, \quad y_1(t) = \int_{R}^{\infty} e^{-i\alpha t} v(\alpha)\, d\alpha, \quad y_2(t) = \int_{-\infty}^{-R} e^{-i\alpha t} v(\alpha)\, d\alpha.$$

Тогда $2\pi y(t) = y_0 + y_1 + y_2$.

Из оценки /5/ при $|s| > R$ имеем

$$|v(s)| \le C_5 |s|^{-(n+2)},$$

где $C_5 = C_6 + C_7\|y\|_2^2$, а C_6 и C_7 зависят лишь от коэффициентов уравнения /1/.

Для $y_1(t)$ и $y_2(t)$ справедливы оценки

$$|y_{1,2}^{(k)}(t)| \le C_5 \int_R^{\infty} \frac{\alpha^k}{\alpha^{n+2}}\, d\alpha \le C_8 R^{-(n+1-k)}, \quad k = 0,1,\dots,n. \qquad /6/$$

Пусть $Ly = a_0 y^{(n)} + \dots + a_1 y'(t) + a_0$, тогда

$$|Ly_{1,2}| \le \frac{C_8}{R^{n+1}} \sum_0^n |a_k| R^k. \qquad /7/$$

Функция $y_0(t)$ является целой функцией экспоненциального типа в комплексной плоскости z, ограниченной на вещественной оси. Из неравенства Бернштейна /2/ получаем

$$|Ly_0| \le \sum_0^n |a_k|\, |y_0^{(k)}(t)| \le M \sum_0^n |a_k| R^k, \qquad /8/$$

где $M = \max|y_0(t)|$, $t \in (-\infty, \infty)$.

Обозначим $f_0 = \max|f(t)|$, $Q(R) = \sum_0^n |a_k| R^k$, $b_0 = |b_1|$, из уравнения /1/ и оценок /6/-/8/ имеем

$$f_0 \le MQ(R) + 2\frac{C_8}{R^{n+1}}Q(R) + b_0\left[M^2 + 2M\frac{2C_8}{R^{n+1}} + 4\frac{C_8^2}{R^{2(n+1)}}\right]$$

или

$$M^2 + B(R)M + C(R) - f_0 b_0^{-1} \ge 0, \qquad /9/$$

где

$$B(R) = \frac{4C_8}{R^{n+1}} + \frac{Q(R)}{b_0}, \quad C(R) = \frac{4C_8^2}{R^{2(n+1)}} + \frac{2C_8 Q(R)}{b_0 R^{n+1}}.$$

Пусть $R_1 > 0$ - наибольшее из таких чисел, для которых $C(R_1) = f_0 b_0^{-1}$; будем далее рассматривать $R \in (R_1, \infty)$. Обозначим через $M_1(R)$ правый вещественный корень квадратичной по M функции в левой части неравенства /9/:

$$M_1(R) = -\frac{B}{2} + \sqrt{\frac{B^2}{4} - (C(R) - f_0 b_0^{-1})} = -\frac{Q(R)}{2b_0} + \sqrt{\frac{Q^2}{4b_0^2} + f_0 b_0^{-1}} - \frac{2C_8}{R^{n+1}}.$$

Легко проверить, что $M_1(R_1) = 0$, $M_1(R) = O(R^{-n})$ при $R \to \infty$ и $M_1 \geq 0$ при $R \in (R_1, \infty)$. Обозначим через M_0 максимум $M_1(R)$ на (R_1, ∞), $M_0 = M_1(R_0)$.

Пусть $R = R_0$; из неравенства /9/ имеем, что $M > M_0$. Так как, согласно /6/, $|y_{1,2}(t)| \leq C_8 R_0^{-(n+1)}$, то при достаточно больших R_0 основным из трех слагаемых в $y(t)$ будет $y_0(t)$. Следовательно, величина $(2\pi)^{-1} M_0$, которую можно вычислить, является приближенной оценкой снизу для $\max|y(t)|$:

$$\max|y(t)| \geq \frac{1}{2\pi}(M_0 - 2C_8 R_0^{-(n+1)}).$$

5. Рассмотрим случай, когда $f(t) \equiv 0$ и существует решение $y(t)$, непрерывное и принадлежащее $L_2(-\infty, \infty)$. Тогда выполняется оценка /8/. Предположим также, что выполняются оценки /6/ для $R > 0$. Тогда $-M^2 + B(R)M + C(R) \geq 0$.

Обозначим через $M_1(R)$ положительный корень правой части, $\max_t |y_0(t;R)| = M(R) \leq M_1(R)$. В данном случае

$$M_1(R) = \frac{Q(R)}{2b_0} + \frac{2C_8}{R^{n+1}} + \sqrt{\frac{Q^2}{4b_0^2} + \frac{4QC_8}{b_0 R^{n+1}} + \frac{8C_8^2}{R^{2(n+1)}}}.$$

Отсюда $M_1(R) = O(R^{-(n+1)})$ при $R \to 0$, $M_1(R) = O(R^n)$ при $R \to \infty$. Пусть m_0 - значение абсолютного минимума функции $M_1(R)$, R_0 - самый правый вещественный корень уравнения $M_1(R) = m_0$.

Так как $2\pi \max|y(t)| \leq \max|y_0(t;R)| + 2C_8 R^{-(n+1)}$ для любого $R > 0$, имеем

$$\max|y(t)| \leq \frac{1}{2\pi}\left(m_0 + \frac{2C_8}{R_0^{n+1}}\right). \qquad /10/$$

Отметим, что правая часть в /10/ растет с ростом $\|y(t)\|_2$.

Для следующего уравнения $y''(t) + 5\alpha y' + 6\alpha^2 y - 6y^2 = 0$, изу-

чавшегося Пенлеве, известно, что функция

$$y(t) = \alpha^2 e^{-2|\alpha| t} \gamma(e^{-|\alpha| t} + C_1; 0, -C_2^2)$$

является решением, где $\alpha > 0$, γ - функция Вейерштрасса.

В данном случае $Q = R^2 + 5\alpha R + 6\alpha^2$, $C_8 = 2^4 6^2 \|y\|^2$. Отметим также, что ближайший корень многочлена $p(s)$ находится от вещественной оси на расстоянии $\nu = 2\alpha$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красносельский М.А., Забрейко П.П. Геометрические методы нелинейного анализа. "Наука", М., 1975.
2. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. "Наука", М., 1965.
3. Титчмарш Е. Теория функций. "Наука", М., 1980.
4. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. "Наука", М., 1971.

Рукопись поступила в издательский отдел
25 октября 1984 года.

В Объединенном институте ядерных исследований начал выходить сборник *"Краткие сообщения ОИЯИ"*. В нем будут помещаться статьи, содержащие оригинальные научные, научно-технические, методические и прикладные результаты, требующие срочной публикации. Будучи частью "Сообщений ОИЯИ", статьи, вошедшие в сборник, имеют, как и другие издания ОИЯИ, статус официальных публикаций.

Сборник "Краткие сообщения ОИЯИ" будет выходить регулярно.

The Joint Institute for Nuclear Research begins publishing a collection of papers entitled *JINR Rapid Communications* which is a section of the JINR Communications and is intended for the accelerated publication of important results on the following subjects:

Physics of elementary particles and atomic nuclei.
Theoretical physics.
Experimental techniques and methods.
Accelerators.
Cryogenics.
Computing mathematics and methods.
Solid state physics. Liquids.
Theory of condenced matter.
Applied researches.

Being a part of the JINR Communications, the articles of new collection like all other publications of the Joint Institute for Nuclear Research have the status of official publications.

JINR Rapid Communications will be issued regularly.

Лежнев В.Г., Швачка А.Б. Р5-84-688

Об оценках решений уравнений с квадратичной нелинейностью

Предложен метод нахождения оценок снизу решений обыкновенных дифференциальных уравнений произвольного вида с квадратичной нелинейностью. При нахождении оценок используется неравенство Бернштейна.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод О.С.Виноградовой

Lezhnev V.G., Shvachka A.B. P5-84-688

About Estimation of the Solutions of Differential Equations with Quadratic Nonlinearity

The method to estimate from below the ordinary differential equations with quadratic nonlinearity solutions is presented. To estimate the solutions Bernshtein inequility is used.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984