сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5-84-541

Д.В.Мещеряков*

КОВАРИАНТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БОГОЛЮБОВА И КВАНТОВЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ СОЛИТОНОВ

---

* Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

1984

К настоящему моменту получено довольно много нелинейных моделей, обладающих классическими решениями типа солитонов и кинков. Среди них, например, хорошо известные $(\sin\Phi)_2$ и $(\Phi^4)_2$ [1]. Классические решения в этих моделях действительны, т.е. не имеют заряда. Кроме того, известны модели самодействующих и самовзаимодействующих полей с обладающими зарядом классическими решениями [2,3]. Введение классических объектов в квантовую теорию осуществляется обычно в процессе квантования в окрестности классического решения, когда квантовое поле представляет собой малые возмущения. Однако такой способ квантования нарушает исходную инвариантность системы. Для преодоления этих трудностей Н.Н.Боголюбовым в 1950 году был разработан метод коллективных координат, позволивший совместить выделение из поля классической составляющей со строгим учетом законов сохранения [4]. Позднее этот метод успешно применялся для изучения сильновзаимодействующих систем [5] и для квантования солитонов [6]. Наиболее общая формулировка канонического метода Боголюбова содержится в [7,8].

В данной работе, основываясь на ковариантном методе Боголюбова, предложенном в [9], мы изучим вопрос о связи абелевых зарядов солитонного решения и квантового поля и покажем, что отсутствие такого заряда у солитонного решения приводит и к его отсутствию у квантовых возбуждений. Под солитонным решением мы будем понимать как собственно солитоны, так и другие возможные классические решения уравнений движения.

1. КОВАРИАНТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БОГОЛЮБОВА

Пусть имеется комплексное скалярное поле $\Phi(x,t)$ в двумерном пространстве-времени. Для учета пуанкаре-инвариантности воспользуемся ковариантным преобразованием Боголюбова [9]. Цель состоит в переходе от переменных x, t к новым ковариантным переменным $\xi(x,t)$, $\tau(x,t)$. Для этого введем алгебру операторов G

$$[H,P]=0, \qquad [K,L]=0, \qquad [H,K]=i\gamma H, \quad [P,K]=i\gamma P, \qquad /1/$$
$$[L,H]=i\gamma P \qquad [L,P]=i\gamma H.$$

Здесь постоянная γ аналогична константе Планка. После этого, определив коммутирующие элементы алгебры G

$$\xi(x,t)=Ht-Px-L, \quad \tau(x,t)=Hx-Pt-K, \quad [\xi(x,t),\tau(x,t)]=0, \qquad /2/$$

заметим, что если считать операторы H, P, K, L генераторами группы Пуанкаре и масштабных преобразований, то $\xi(x,t)$ и $\tau(x,t)$ и есть искомые ковариантные переменные:

$$e^{it'H-iPx'}\xi(x,t)e^{-it'H+iPx'} = \xi(x+x',\, t+t'),$$

$$e^{i\theta L}\xi(x,t)\,e^{-i\theta L} = \xi(x\,\mathrm{ch}\theta + t\,\mathrm{sh}\theta,\ x\,\mathrm{sh}\theta + t\,\mathrm{ch}\theta), \qquad /3/$$

$$e^{i\lambda K}\xi(x,t)\,e^{-i\lambda K} = \xi(xe^{\lambda},\ te^{\lambda}).$$

Соотношения для $\tau(x,t)$ совершенно аналогичны. После этого ковариантное преобразование Боголюбова запишем в виде [9]:

$$\Phi(x,t) = \tilde{\Phi}(\xi,\tau,a) = e^{ia}\int df\,d\omega\, e^{i(\omega\tau - f\xi)}\,\tilde{\Phi}(f,\omega),$$

$$/4/$$

$$\Phi^*(x,t) = \tilde{\Phi}^*(\xi,\tau,a) = e^{-ia}\int df\,d\omega\, e^{-i(\omega\tau - f\xi)}\,\tilde{\Phi}^*(f,\omega).$$

Поскольку операторы алгебры G коммутируют с $\tilde{\Phi}(f,\omega)$, $\tilde{\Phi}^*(f,\omega)$, имеем:

$$e^{it'H-iPx'}\Phi(x,t)e^{-it'H+iPx'} = \Phi(x+x',\, t+t'),$$

$$e^{i\theta L}\Phi(x,t)\,e^{-i\theta L} = \Phi(x\,\mathrm{ch}\theta + t\,\mathrm{sh}\theta,\ x\,\mathrm{sh}\theta + t\,\mathrm{ch}\theta),$$

$$e^{i\lambda K}\Phi(x,t)\,e^{-i\lambda K} = \Phi(xe^{\lambda},\ te^{\lambda})$$

и аналогичные соотношения для $\Phi^*(x,t)$. Переменная a в /4/ введена для учета зарядовой инвариантности. Канонически сопряженная ей величина $Q = -i\frac{\partial}{\partial a}$ есть оператор абелева заряда системы. Далее знак ~ у полей $\tilde{\Phi}(\xi,\tau)$, $\tilde{\Phi}^*(\xi,\tau)$ будем опускать.

Поскольку операторы алгебры G являются генераторами преобразований из группы Пуанкаре и масштабных преобразований, согласно постулату квантования имеем связи, которые необходимо рассматривать на векторе состояния $|\Psi\rangle$ [9]:

$$C_H \equiv (H - H(\Phi,\Phi^*))|\Psi\rangle = 0, \qquad C_P \equiv (P - P(\Phi,\Phi^*))|\Psi\rangle = 0,$$

$$C_L \equiv (L - L(\Phi,\Phi^*))|\Psi\rangle = 0, \qquad C_Q \equiv (Q - Q(\Phi,\Phi^*))|\Psi\rangle = 0. \qquad /5/$$

В /5/ величины $H(\Phi,\Phi^*),\ldots, Q(\Phi,\Phi^*)$ построены по теореме Нетер. В случае конформно-инвариантных теорий необходимо учесть и связь C_K, порождаемую оператором K.

Кроме того, должны выполняться канонические коммутационные соотношения, которые, как и связи, необходимо рассматривать на векторе состояния $|\Psi\rangle$:

$$[\Phi(\xi,\tau),\ \Phi(\xi',\tau')] = [\Phi^*(\xi,\tau),\ \Phi^*(\xi',\tau')] = 0,$$

$$[\partial_t\Phi(\xi,\tau),\ \partial_t\Phi(\xi',\tau')] = [\partial_t\Phi^*(\xi',\tau'),\ \partial_t\Phi^*(\xi,\tau)] = 0, \qquad /6/$$

$$[\partial_t\Phi^*(\xi,\tau),\ \Phi(\xi',\tau')] = -i\gamma\delta(x-x').$$

Квантовые уравнения движения в переменных ξ и τ имеют вид [9]:

$$2\frac{M^2}{\gamma^2}e^{i\gamma\partial_\tau}(\cos\gamma\partial_\xi - \cos\gamma\partial_\tau)\Phi(\xi,\tau) + \frac{\partial U}{\partial\Phi^*}(\xi,\tau) = 0,$$

$$2\frac{M^2}{\gamma^2}e^{-i\gamma\partial_\tau}(\cos\gamma\partial_\xi - \cos\gamma\partial_\tau)\Phi^*(\xi,\tau) + \frac{\partial U}{\partial\Phi}(\xi,\tau) = 0, \qquad /7/$$

$$H^2 - P^2 = M^2.$$

2. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

Пусть плотность лагранжиана в двумерном пространстве-времени имеет вид

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\Phi^*\partial^\mu\Phi - U(\Phi^*,\Phi), \qquad U(\Phi^*,\Phi) = \sum_{n=0}^{N}\frac{a_n}{n!}(\Phi^*\Phi)^n. \qquad /8/$$

Кроме того, мы считаем, что классические уравнения движения имеют действительное статичное решение

$$\Box\Phi_0^c(x) + \frac{\partial U}{\partial\Phi^*}(\Phi_0^c,\ \Phi_0^{c*}) = 0, \qquad \Phi_0^{c*}(x) = \Phi_0^c(x). \qquad /9/$$

Отметим, что $\Phi_0^c(x)$ фактически зависит от $\frac{x - vt - x_0}{\sqrt{1-v^2}}$, то есть является "бегущей волной". Проделаем преобразование /4/ и разложим квантовое поле $\Phi(\xi,\tau)$ в окрестности классического решения:

$$\Phi(\xi,\tau) = \Phi_0(\xi,\tau) + \sqrt{\gamma}\,\Phi_1(\xi,\tau) + O(\gamma),$$

$$/10/$$

$$\Phi^*(\xi,\tau) = \Phi_0^*(\xi,\tau) + \sqrt{\gamma}\,\Phi_1^*(\xi,\tau) + O(\gamma).$$

Решение квантовых уравнений движения /7/ в порядке γ° и учет связей /5/ дают:

$$\Phi_0^*(\xi,\tau) = \Phi_0(\xi,\tau) = \Phi_0^c\left(\frac{\xi}{M_0}\right), \qquad M_0 = 2\int dx(\Phi_0^2(x))^c. \qquad /11/$$

В /11/ M_0 - старший член разложения,

$$M = M_0 + \sqrt{\gamma} M_1 + O(\gamma). \qquad /12/$$

Перейдем далее для удобства к координатам $x = \xi/M_0$, $t = \tau/M_0$ и рассмотрим следующий порядок теории возмущений. Связь C_H оказывается совместной с условием $M_1 = 0$, а связи C_P, C_L и C_Q приводят к соотношениям /здесь и далее $\Phi_1(x) \equiv \Phi(x)$) :

$$\int dx \Phi_0'(x)(\dot\Phi(x,t) + \dot\Phi^*(x,t)) = 0,$$

$$\int dx \Phi_0'(x)(\Phi(x,t) + \Phi^*(x,t)) = 0, \qquad /13/$$

$$\int dx \Phi_0(x)(\dot\Phi(x,t) - \dot\Phi^*(x,t)) = 0.$$

В силу ковариантности процедуры квантования достаточно рассмотреть коммутационные соотношения для нулевого полного импульса, $P = 0$. В этом случае имеем:

$$[\Phi(x,t), \Phi(x',t')] = [\Phi^*(x,t), \Phi^*(x',t')] = 0,$$

$$[\dot\Phi(x,t), \Phi^*(x',t')] - \frac{2i}{M_0}\Phi_0'(x)\Phi_0'(x') - \frac{2i}{N_0}\Phi_0(x)\Phi_0(x') = -i\delta(x-x'), \qquad /14/$$

$$N_0 = 2\int dx\, \Phi_0^2(x).$$

По сравнению с работой [9], где рассматривалось действительное скалярное поле, в /14/ добавился член $-\frac{2i}{N_0}\Phi_0(x)\Phi_0(x')$, соответствующий связи C_Q, которая означает исключение "зарядовой" нулевой моды $\Phi_0(x)$.

Уравнения движения имеют вид:

$$\Box\Phi(x,t) + \sum_n \frac{a_n}{(n-2)!}(\Phi_0^*\Phi_0)^{n-2}\left[\frac{n}{n-1}(\Phi_0^*\Phi_0)\Phi(x,t) + (\Phi_0\Phi_0)\Phi^*(x,t)\right] = 0, \qquad /15/$$

$$\Box\Phi^*(x,t) + \sum_n \frac{a_n}{(n-2)!}(\Phi_0^*\Phi_0)^{n-2}\left[\frac{n}{n-1}(\Phi_0^*\Phi_0)\Phi^*(x,t) + (\Phi_0^*\Phi_0^*)\Phi(x,t)\right] = 0.$$

Введем обозначения:

$$\Phi_+(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi(x,t) + \Phi^*(x,t)), \quad \Phi_-(x,t) = \frac{-i}{\sqrt{2}}(\Phi(x,t) - \Phi^*(x,t)).$$

Складывая и вычитая уравнения /15/, получаем

$$\Box\Phi_+(x,t) + \sum_n \frac{a_n}{(n-2)!}(\Phi_0^*\Phi_0)^{n-2}\left[\frac{1}{2}(\Phi_0^2 + \Phi_0^{*2})\Phi_+(x,t) + \right.$$

$$\left. + \frac{i}{2}(\Phi_0^2 - \Phi_0^{*2})\Phi_-(x,t) + \frac{n}{n-1}(\Phi_0^*\Phi_0)\Phi_+(x,t)\right] = 0,$$

$$/16/$$

$$\Box\Phi_-(x,t) + \sum_n \frac{a_n}{(n-2)!}(\Phi_0^*\Phi_0)^{n-2}\left[-\frac{1}{2}(\Phi_0^2 + \Phi_0^{*2})\Phi_-(x,t) - \right.$$

$$\left. - \frac{i}{2}(\Phi_0^2 - \Phi_0^{*2})\Phi_+(x,t) + \frac{n}{n-1}(\Phi_0^*\Phi_0)\Phi_-(x,t)\right] = 0.$$

Из уравнений /16/ видно, что если $\Phi_0(x)$ - комплексная функция, то поля Φ_+ и Φ_- "перепутываются", и для диагонализации гамильтониана в порядке $O(\gamma)$ приходится решать сложную систему /16/. В нашем же случае имеет место /11/, и уравнения /16/ упрощаются:

$$\Box\Phi_+(x,t) + \sum_n \frac{a_n}{(n-1)!}(2n-1)\Phi_0^{2n-2}(x)\Phi_+(x,t) = 0,$$

$$/17/$$

$$\Box\Phi_-(x,t) + \sum_n \frac{a_n}{(n-1)!}\Phi_0^{2n-2}(x)\Phi_-(x,t) = 0.$$

Решения системы /17/ представляются в виде разложения по собственным функциям таких уравнений:

$$-\frac{d^2}{dx^2}\Psi_+(k,x) + \sum_n \frac{a_n}{(n-1)!}(2n-1)\Phi_0^{2n-2}(x)\Psi_+(k,x) = \omega_+^2(k)\Psi_+(k,x),$$

$$-\frac{d^2}{dx}\Psi_-(k,x) + \sum_n \frac{a_n}{(n-1)!}\Phi_0^{2n-2}(x)\Psi_-(k,x) = \omega_-^2(k)\Psi_-(k,x), \qquad /18/$$

$$\Psi_\pm(k,x) = e^{ikx}, \quad x \to -\infty, \quad \omega_+^2 = \mu_+^2 + k^2, \ \omega_-^2 = \mu_-^2 + k^2.$$

Здесь μ_+ и μ_- - массы квантов полей Φ_+ и Φ_-, которые будут различными:

$$\mu_+ = \lim_{|x|\to\infty} \sum_n \frac{a_n}{(n-1)!}(2n-1)\Phi_0^{2n-2}(x), \quad \mu_- = \lim_{|x|\to\infty} \sum_n \frac{a_n}{(n-1)!}\Phi_0^{2n-2}(x). \quad /19/$$

Для функций $\Psi_+(k,x)$ и $\Psi_-(k,x)$ можно получить следующие соотношения /9/:

$$\int dx \Psi_+^*(k,x)\,\Psi_-(k,x) = 2\pi(A(k)\,\delta(k-k') + B(x)\,\delta(k+k')),$$
$$\int dx \Psi_+(k,x)\Psi_-(k,x) = 2\pi(C(k)\,\delta(k-k'), + D(x)\,\delta(k+k')), \quad /20/$$

$$A(k) = \alpha_+^*(k)\,\alpha_-(k) + \beta_+^*(k)\,\beta_-(k), \qquad B(k) = \beta_+^*(k)\,\alpha_-(-k) + \alpha_+^*(k)\beta_-(-k),$$
$$C(k) = \alpha_+(k)\,\beta_-(k) + \beta_+(k)\,\alpha_-(k), \qquad D(k) = \alpha_+(k)\,\alpha_-(-k) + \beta_+(k)\,\beta_-(-k). \quad /21/$$

В /21/ коэффициенты $\alpha_+(k)$ и $\beta_+(k)$ определяются из асимптотик функций $\Psi_+(k,x)$ и $\Psi_-(k,x)$ при $x \to \infty$:

$$\Psi_+(k,x) = \alpha_+(k)\,e^{ikx} + \beta_+(k)\,e^{-ikx}, \quad x\to\infty, \quad /22/$$
$$\Psi_-(k,x) = \alpha_-(k)\,e^{ikx} + \beta_-(k)\,e^{-ikx}, \quad x\to\infty.$$

Разложим теперь поля Φ_+ и Φ_- по операторам рождения и уничтожения:

$$\Phi_+(x,t) = \int \frac{dk}{\sqrt{2\omega_+(k)}}(a_+(k)\,e^{-i\omega_+ t}\,\Psi_+(k,x) + a_+^+(k)\,e^{i\omega_+ t}\,\Psi_+^*(k,x)), \quad /23/$$

$$\Phi_-(x,t) = \int \frac{dk}{\sqrt{2\omega_-(k)}}(a_-(k)\,e^{-i\omega_- t}\Psi_-(k,x) + a_-^+(k)\,e^{i\omega_- t}\Psi_-^*(k,x)).$$

Подставляя /23/ в оператор заряда

$$Q_2 = \int dx(\Phi_-(x,t)\dot{\Phi}_+(x,t) - \Phi_+(x,t)\,\dot{\Phi}_-(x,t)),$$

получаем для Q_2 выражение:

$$Q_2 = i\int \frac{dk}{2\sqrt{\omega_+(k)\,\omega_-(k)}}[C_1(k)\,e^{i(\omega_+-\omega_-)t} + C_2(k)\,e^{i(\omega_++\omega_-)t} +$$
$$+ C_3(x)\,e^{-i(\omega_+-\omega_-)t} + C_4(k)\,e^{-i(\omega_++\omega_-)t}]. \quad /24/$$

Рассмотрим случай, когда потенциалы в /18/ являются безотражательными, как, например, для модели $(\Phi^4)_2$. Рассмотрение общего случая приведет к чисто алгебраическим усложнениям. Итак, в /20/ мы считаем, что $\beta_+(k) = \beta_-(k) = 0$. Тогда $C_i(k)$ имеют вид:

$$C_1(k) = [\omega_+(k) + \omega_-(k)]\,a_+^+(k)\,a_-(k)\,A(k),$$
$$C_2(k) = [\omega_+(k) - \omega_-(k)]\,a_+^+(k)\,a_-^+(k)\,D^*(k),$$
$$C_3(k) = -[\omega_+(k) + \omega_-(k)]\,a_-^+(k)\,a_+(k)\,A^*(k), \quad /25/$$
$$C_4(k) = -[\omega_+(k) - \omega_-(k)]\,a_+(k)\,a_-(k)\,D(k).$$

Из /24/ и /25/ видно, что Q_2 явно зависит от времени. Таким образом, предположив, что квантовые возбуждения действительного солитонного решения могут иметь заряд, уже в первом порядке теории возмущений приходим к противоречию. Для его устранения необходимо положить $\Phi(x,t) = 0$. При этом в преобразовании /4/ $\Phi(x,t) = \Phi^*(x,t)$ и переменной α не возникает, так как нет степени свободы, описывающей заряд. Отметим еще, что в случае комплексного классического решения $\omega_+(k) = \omega_-(k)$ и из /24/-/25/ получаем сохраняющуюся квантовую поправку к классическому заряду солитонного решения. Комплексные классические решения в двумерном пространстве времени уже не будут представлять собой "бегущие волны", т.к. добавится зависимость от переменной $\frac{t - vx - t_0}{\sqrt{1-v^2}}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение необходимо заметить, что отсутствие заряда у квантовых возбуждений нейтрального классического решения в нелинейных моделях, видимо, является проявлением более общего свойства: квантовые возбуждения не могут иметь квантовых чисел, отличных по своей природе от квантовых чисел классического решения. Или, другими словами, квантовое поле в нелинейной модели не может иметь более высокого типа симметрии, чем классическое решение. Этот вопрос требует отдельного рассмотрения.

В заключение автор считает своим долгом выразить благодарность О.А.Хрусталеву за постановку задачи и многочисленные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Faddeev L.D., Korepin V.E. Phys.Rep., 1978, 42, p. 1.
2. Sarker S., Trullinger S. Phys.Lett., 1976, A59, No 4, p.255.

3. Ranada A.F., Ranada M.F. Jorn.Math.Phys., 1977, 18, No 12, p. 2477; Rajarman R., Weinberg E. Phys.Rev., 1975, D11, p. 2950.
4. Боголюбов Н.Н. УМЖ, 1950, 2,3, с. 5; см. также "Избранные труды", "Наукова думка", Киев, 1970, т.2.
5. Солодовникова Е.П., Тавхелидзе А.Н., Хрусталев О.А. ТМФ, 1972, 10, с. 162; 1972, 12, с. 164.
6. Разумов А.В. ТМФ, 1976, 30, с. 18.
7. Солодовникова Е.П., Тавхелидзе А.Н., Хрусталев О.А. ТМФ, 1972, 11, с. 317; Шургая А.В. ТМФ, 1980, 45, с. 45.
8. Khrustalev O.A., Ruzamov A.V., Taranov A.Yu. Nucl.Phys., 1980, B172, p. 44.
9. Свешников К.А. ТМФ, 1983, 55, №3, с. 361.

Рукопись поступила в издательский отдел
24 июля 1984 года.

Мещеряков Д.В. P5-84-541
Ковариантное преобразование Боголюбова и квантовые возбуждения действительных солитонов

Исследуется квантование решений нелинейных классических уравнений движения, обладающих действительными солитонными решениями. Рассматривается нелинейное комплексное скалярное поле в двумерном пространстве-времени. Квантование осуществляется в окрестности классического решения. Для учета пуанкаре-инвариантности используется ковариантное преобразование Боголюбова. Операторы вторичного квантования удовлетворяют связям, рассматриваемым на векторах состояний. Показано, что квантовые возбуждения нейтрального классического решения в нелинейных моделях не обладают дополнительными по отношению к классическим решениям сохраняющимися величинами. Квантовое поле нелинейной модели не может иметь более высокий тип симметрии, чем симметрия классического решения.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод автора

Mescherjakov D.V. P5-84-541
Covariant Bogolubov's Transformation and Quantum Excitations of Real Solitons

Quantization of the solutions of nonlinear classical equations with real soliton solutions is investigated. Nonlinear complex scalar field in two-dimensional space-time is considered. In order to account Poincare - invariance covariant Bogolyubov's transformation is used. Quantum operators satisfy the linkages being imposed on state vectors. It is shown that quantum excitations of neutral classical solution in nonlinear models had not additional conservating values. Quantum field in nonlinear model cannot has higher symmetry tipe that one of the classical solution.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984