объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р5-84-511

В.И.Иноземцев, Д.В.Мещеряков

О ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЯХ ОСНОВНОГО СОСТОЯНИЯ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ САЗЕРЛЕНДА-КАЛОДЖЕРО ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

Направлено в "Physics Letters A"

1984

В данной работе мы рассмотрим решения уравнения Шредингера, описывающего квантовые системы N частиц на прямой с потенциалом бинарного взаимодействия $V(\xi)$, находящиеся во внешнем поле с потенциалом $W(\xi)$:

$$\left\{\sum_{j=1}^{N}\left[-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}+W(x_j)\right]+\sum_{j>k}^{N}V(x_j-x_k)\right\}\psi=E\psi. \qquad /1/$$

В случае $W(\xi)=0$ Сазерленд /1/ нашел функциональное уравнение, определяющее класс потенциалов $V(\xi)$, для которых волновая функция основного состояния обладает свойством факторизации:

$$\psi_0(x_1,\dots,x_N)=\prod_{j>k}^{N}\chi(x_j-x_k). \qquad /2/$$

Этот класс является весьма обширным, причем далеко не все системы, обладающие свойством /2/, имеют дополнительные квантовые или классические интегралы движения. При $W(\xi)\neq 0$ волновая функция основного состояния также может обладать свойством факторизации:

$$\psi_0(x_1,\dots,x_N)=\prod_{j=1}^{N}c(x_j)\prod_{j>k}^{N}\chi(x_j-x_k). \qquad /3/$$

До настоящего времени этот факт был установлен только для системы Калоджеро /2/ $(V(\xi)=(g^2/\xi^2),\ W(\xi)=\alpha\xi^2)$. В этом случае удается найти набор N квантовых интегралов движения, а также изучить спектр всех возбужденных состояний /3/, который, очевидно, является дискретным.

Найдем общие условия, при которых решения уравнения /1/ обладают свойством /3/. Подстановка анзаца /3/ в /1/, очевидно, также приводит к уравнению Сазерленда для $\phi(\xi)$ - логарифмической производной функции $\chi(\xi)$:

$$\phi(\xi)\,\phi(\eta)+[\phi(\xi)+\phi(\eta)]\,\phi(-\xi-\eta)=f(\xi)+f(\eta)+f(-\xi-\eta). \qquad /4/$$

Известно его общее решение, найденное Калоджеро:

$$\phi(\xi)=\alpha\zeta(\xi)+\beta\xi, \qquad /5/$$

$\zeta(\xi)$ - одна из эллиптических функций Вейерштрасса.

Для выполнения /1/ при $W(\xi)\neq 0$ условие /4/ не является достаточным. Вводя обозначение $\tau(\xi)=c'(\xi)/c(\xi)$ для логарифмической производной функции $c(\xi)$, мы приходим также к функциональному уравнению, связывающему $\phi(\xi)$ и $\tau(\xi)$:

$$\phi(\xi-\eta)\,[\tau(\xi)-\tau(\eta)]=\lambda(\xi)+\lambda(\eta). \qquad /6/$$

Потенциал $W(\xi)$ определяется через функции $\tau(\xi),\lambda(\xi)$ с точностью до произвольной постоянной:

$$W(\xi)=\frac{1}{2}(\tau'(\xi)+\tau^2(\xi))+(N-1)\,\lambda(\xi)+\text{const}. \qquad /7/$$

Уравнение /6/ обладает значительно менее широким классом решений, чем уравнение /4/. Все аналитические решения /6/ могут быть найдены стандартным методом, состоящим в разложении /6/ в ряд по степеням $\xi-\eta$ с учетом возможных сингулярностей $\phi(\xi)$ в точке $\xi=0$. В частности, функция $\phi(\xi)$ определяется с точностью до двух произвольных постоянных:

$$\phi(\xi)=\alpha a\,\mathrm{cth}(a\xi). \qquad /8/$$

Очевидно, функция /8/ является одним из частных решений /4/. Из /6/ и /8/ следует также, что

$$\tau(\xi)=-b\,\mathrm{sh}(2a\xi)+b_1,\qquad \lambda(\xi)=\alpha ab\,\mathrm{ch}(2a\xi), \qquad /9/$$

где b, b_1 - постоянные, причем для убывания волновой функции при $|x_j-x_k|\to\infty$ необходимо выбрать $b>0$.

Таким образом, все потенциалы $V(\xi)$ и $W(\xi)$, для которых существуют решения уравнения Шредингера вида /3/, могут быть найдены, согласно /8/, /9/:

$$V(\xi)=\frac{\alpha(\alpha-1)a^2}{\mathrm{sh}^2(a\xi)},\qquad W(\xi)=\frac{b^2}{4}\mathrm{ch}(4a\xi)-bb_1\,\mathrm{sh}(2a\xi)-ab(1+\alpha(N-1))\,\mathrm{ch}(2a\xi). \qquad /10/$$

Отметим, во-первых, что гамильтониан системы N частиц с потенциалами /10/ является самосопряженным лишь в случае $\alpha(\alpha-1)>3/4$ /7/. Нормировочный интеграл для волновой функции ψ_0 вида /3/,

$$\psi_0(x_1,\dots,x_N)=C_N\prod_{j=1}^{N}\exp\left\{-\frac{b}{2a}\mathrm{ch}(2ax_j)+b_1x_j\right\}\prod_{j>k}^{N}|\mathrm{sh}\,a(x_j-x_k)|^{\alpha}, \qquad /11/$$

сходится только для положительных значений α, определяемых этим неравенством. Функция $\psi_0(x_1,\dots,x_N)$ /11/ не имеет нулей вне гиперплоскостей $x_j-x_k=0$, на которых расположены сингулярности гамильтониана; поэтому, как и в случае Калоджеро /2/, мы можем заключить, что она описывает основное состояние системы частиц во внешнем поле. Энергия этого состояния легко вычисляется подстановкой /10/, /11/ в /1/:

$$E_0 = -\frac{N}{2}\left[\frac{\alpha^2 a^2 (N^2-1)}{3} + b_1^2 - \frac{b^2}{2}\right].$$

Спектр возбужденных состояний при $b \neq 0$ является дискретным.

Во-вторых, классические системы частиц, взаимодействие которых определяется потенциалами $V(\xi)$, $W(\xi)$ /10/, являются вполне интегрируемыми [4]. Дополнительные классические интегралы движения являются коэффициентами полинома $P(\lambda) = \det/L(p_j, x_j) - \lambda E/$, где L - найденная в [4] матрицы Лакса, зависящая от координат и импульсов частиц, E - единичная матрица. В квантовом случае, по-видимому, также для любого N существуют N интегралов движения, которые могут быть получены из классических некоторым упорядочением операторов $\{p_j\}$ и функций от координат. В простейшем нетривиальном случае $N = 2$, когда гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + \frac{ga^2}{\mathrm{sh}^2 a(x_1 - x_2)} + \sum_{j=1}^{2} \mathrm{ch}(2ax_j + \beta)(\alpha\,\mathrm{ch}(2ax_j) + \gamma),$$

указанная выше проблема упорядочения решается тривиально, и для дополнительного квантового интеграла движения можно получить сравнительно простое выражение

$$I_2 = \left(p_1 p_2 - \frac{ga^2}{\mathrm{sh}^2 a(x_1 - x_2)}\right)^2 + p_1^2 \mathrm{ch}(2ax_2 + \beta)(\alpha\,\mathrm{ch}(2ax_2) + \gamma) +$$

$$+ p_2^2 \mathrm{ch}(2ax_1 + \beta)(\alpha\,\mathrm{ch}(2ax_1) + \gamma) + \frac{ga^2}{\mathrm{sh}^2 a(x_1 - x_2)}(\mathrm{ch}(2ax_2 + \beta) \times$$

$$\times (\alpha\,\mathrm{ch}(2ax_1) + \gamma) + \mathrm{ch}(2ax_1 + \beta)(\alpha\,\mathrm{ch}(2ax_2) + \gamma)) +$$

$$+ \mathrm{ch}(2ax_1 + \gamma)\,\mathrm{ch}(2ax_2 + \gamma)(\alpha\,\mathrm{ch}(2ax_1) + \gamma)(\alpha\,\mathrm{ch}(2ax_2) + \gamma).$$

Интересным частным случаем /10/ является потенциал Морса

$$W(\xi) = 2a^2 A^2 (e^{4a\xi} - 2e^{2a\xi}). \qquad /12/$$

Потенциал /12/ получается из /10/ сдвигом координат на некоторое число ϵ и переходом к пределу $\epsilon \to \infty$, $b^2 e \to 16a^2 A^2$, $b_1 \to a(2A - 1 - \alpha(N-1))$. В этом случае уравнение /1/ описывает также состояния рассеяния /например, M частиц на связанном состоянии из $(N-M)$ частиц/. Спектр гамильтониана содержит лишь ограниченное число дискретных значений. Волновая функция /11/ приобретает вид

$$\psi_0(x_1, \dots, x_N) = C_N \prod_{j=1}^{N} \exp(-Ae^{2ax_j} + ax_j(2A - 1 - \alpha(N-1))) \prod_{j>k}^{N} |\mathrm{sh}\,a(x_j - x_k)|^{\alpha}. \qquad /13/$$

Можно показать, что интеграл $\int |\psi_0|^2 dx_1 \dots dx_N$ сходится лишь при выполнении условия

$$\alpha(N - 1) < A - 1/2. \qquad /14/$$

При этом /13/ является волновой функцией основного состояния системы с энергией $E_0 = -\frac{Na^2}{2}\left[\frac{\alpha^2}{3}(N^2 - 1) + (2A - 1 - \alpha(N-1))^2\right]$. Физический смысл неравенства /14/ ясен: лишь ограниченное число отталкивающихся частиц может "разместиться" в потенциальной яме конечной глубины. При $A < 1/2$ дискретный спектр отсутствует; при $\alpha(N-1) > A - 1/2$, возможно, также существуют N-частичные связанные состояния, волновые функции которых, однако, уже не обладают свойством факторизации. В настоящее время мы не можем утверждать, что такие состояния отсутствуют. В пределе $\alpha \to 0$ /13/ переходит в произведение волновые функций основного состояния невзаимодействующих частиц в потенциале Морса.

Для системы из двух частиц мы смогли найти явное выражение для нормировочной константы в /13/:

$$C_2 = a\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{2}(4A)^{2(1+\alpha-2A)} \frac{\Gamma(4A - 2\alpha - 2)\,\Gamma(2A - 2\alpha - 1)\,\Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma(2A - \alpha - 1/2)\,\Gamma(\alpha + 1)}\right\}^{-1/2}, \qquad /15/$$

где $\Gamma(\xi)$ - гамма-функция Эйлера. Возможно, что существует сравнительно простое обобщение /15/ на случай $N > 2$.

Факторизация некоторых решений уравнения Шредингера имеет место также для более общих гамильтонианов, связанных с полупростыми алгебрами Ли [3]. Решения вида $\psi = \prod_{j>k}^{N} \chi(x_i - x_k)\tilde{\chi}(x_j + x_k) \prod_{j=1}^{N} \tilde{c}(x_j)$ по-видимому, имеет также уравнение $H\psi = E\psi$, где

$$H = \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{p_j^2}{2} + W(x_j)\right) + \sum_{j>k}^{N} \alpha(\alpha - 1)a^2\left\{\frac{1}{\mathrm{sh}^2 a(x_j - x_k)} + \frac{1}{\mathrm{sh}^2 (x_j + x_k)a}\right\},$$

$$/16/$$

$$W(\xi) = \frac{\alpha_1}{\mathrm{sh}^2 2a\xi} + \frac{\alpha_2}{\mathrm{sh}^2 4a\xi} + \alpha_3\,\mathrm{ch}2a\xi + \alpha_4\,\mathrm{ch}4a\xi.$$

Интегрируемость классических систем с гамильтонианом /16/ была установлена нами в [5,6]. Исследование свойств квантовых систем с этим гамильтонианом будет проведено нами в отдельной работе.

Один из авторов /В.И.Иноземцев/ благодарен Я.Диттриху за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sutherland B. Phys.Rev.A, 1971, 4, p. 2019; Phys.Rev.Lett., 1975, 34, p. 1083.
2. Calogero F. J.Math.Phys., 1971, 12, p. 419; Lett.Nuovo Cim., 1975, 13, p. 507.
3. Olshanetsky M.A., Perelomov A.M. Phys.Reports, 1983, 94, p. 312.
4. Inozemtsev V.I. Phys.Lett.A, 1983, 98, p. 316; ОИЯИ, Р4-83-664, Дубна, 1983.
5. Иноземцев В.И. ОИЯИ, Р4-84-41, Дубна, 1984.
6. Иноземцев В.И., Мещеряков Д.В. ОИЯИ, Р4-84-247, Дубна, 1984.
7. Meetz K. Nuovo Cim., 1964, 34, p. 690.

Рукопись поступила в издательский отдел
13 июля 1984 года.

Иноземцев В.И., Мещеряков Д.В. Р5-84-511

О волновых функциях основного состояния квантовых систем Сазерленда-Калоджеро во внешнем поле

Рассматриваются условия, при которых волновые функции основного состояния квантовых систем взаимодействующих частиц, находящихся во внешнем поле, обладают свойством факторизации и могут быть найдены в явном виде. Соответствующие классические системы частиц являются вполне интегрируемыми; в квантовом случае дополнительный интеграл движения построен для системы двух частиц.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод авторов

Inozemtsev V.I., Meshcheryakov D.V. P5-84-511

On Ground-State Wave Functions for Sutherland-Calogero Systems in an External Field

Conditions are condsidered under which the ground-state wave functions of quantum systems of interacting particles in an external field are factorizable and can be found explicitly. The corresponding classical systems of particles are completely integrable; in the quantum case an extra integral of motion is constructed for a two-particle system.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984