объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P5-84-510

В.И.Иноземцев, Д.В.Мещеряков

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ ЧАСТИЦ ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ И ДВИЖЕНИЕ ПОЛЮСОВ РЕШЕНИЙ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА-ХОПФА

Направлено в журнал "Physics Letters A"

1984

Для большей части интегрируемых классических систем частиц, взаимодействующих между собой и с внешним полем [1-4], к настоящему времени найдены способы построения решений уравнений движения в явном виде. Все эти системы обладают парой Лакса и, следовательно, - N интегралами движения,полиномиальными по импульсам частиц. Одним из них является гамильтониан

$$H = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{p_i^2}{2} + W(x_i)\right) + \sum_{i>j}^{N} V(x_i - x_j) . \qquad /1/$$

Функции $\{V(\xi), W(\xi)\}$ не являются произвольными. Интегрируемость систем с гамильтонианом /1/ имеет место лишь в следующих случаях [1-4,8]:

$$V(\xi) = \frac{a}{\xi^2}, \qquad W(\xi) = \{0, \gamma\xi^2\}; \qquad /2а/$$

$$V(\xi) = \frac{a}{\mathrm{sh}^2(\xi/2)}, \; W(\xi) = \{0, \gamma e^{\xi}\}; \qquad /2б/$$

$$V(\xi) = aP(\xi), \qquad W(\xi) = 0; \qquad /2в/$$

$$V(\xi) = \frac{a}{\xi^2}, \qquad W(\xi) = \gamma_1\xi^4 + \gamma_2\xi^2 + \gamma_3\xi; \qquad /3а/$$

$$V(\xi) = \frac{a}{\mathrm{sh}^2(\xi/2)}, \; W(\xi) = \gamma_1 \,\mathrm{ch}\, 2\xi + \gamma_2 \,\mathrm{ch}\,\xi + \gamma_3 \,\mathrm{sh}\,\xi . \qquad /3б/$$

Здесь $P(\xi)$ - функция Вейерштрасса; $a, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma$ - произвольные постоянные.

Для систем /2а-б/ было предложено несколько способов построения дополнительных интегралов движения [3-6], которые приводят к окончательному решению задачи - нахождению $\{x_i(t)\}$. При этом зависимость x_i от времени определяется посредством алгебраических и тригонометрических функций. Интегрирование уравнений движения в случае /2в/ удалось выполнить методами алгебраической геометрии [7]; $x_i(t)$ являются нулями θ-функций Римана.

Для найденных одним из авторов [8] систем /3а-б/, обобщающих /2а-б/, эти способы не являются эффективными, и проблема явного интегрирования уравнений движения остается открытой.

В работах [9,10] была установлена связь между решениями систем /2а-в/ при $W = 0$ и движением полюсов решений нелинейных эволюционных уравнений: одномерного и двумерного КАВ, Бюргерса-Хопфа. Мы покажем, что подобная связь существует и для систем

/3а-б/. Более того, она может быть использована для построения решений соответствующих уравнений движения при некоторых ограничениях на начальные условия и постоянные $a, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

Рассмотрим сначала систему уравнений первого порядка

$$\dot{x}_i(t) = A \sum_{j \neq i}^{N} Z(x_i - x_j) + Y(x_i), \quad i = 1, \dots, N. \qquad /4/$$

Можно показать, что решения /4/ удовлетворяют уравнениям движения, определяемым гамильтонианом /1/ в случаях /3а-б/, при специальном выборе функций $Z(\xi), Y(\xi)$ и постоянных в /3а-б/:

$$Z(\xi) = \xi^{-1}, \quad Y(\xi) = \alpha\xi^2 + \beta,$$
$$\gamma_1 = -\frac{\alpha^2}{2}, \quad \gamma_2 = -\alpha\beta, \quad \gamma_3 = -\alpha A(N-1), \quad a = -A^2; \qquad /5а/$$

$$Z(\xi) = \mathrm{cth}\frac{\xi}{2}, \quad Y(\xi) = \alpha\,\mathrm{ch}\xi + \beta,$$
$$\gamma_1 = -\frac{\alpha^2}{4}, \quad \gamma_2 = -\alpha\beta, \quad \gamma_3 = -\alpha A(N-1), \quad a = -A^2. \qquad /5б/$$

Таким образом, исследование /4/ позволяет найти решения уравнений движения для систем /3а-б/ с начальными условиями

$$p_i(0) = A \sum_{j \neq i}^{N} Z(x_i(0) - x_j(0)) + Y(x_i(0)). \qquad /6/$$

Величины $x_i(0)$ представляют собой начальные условия для системы /4/ и могут быть выбраны произвольными.

Покажем теперь, что система /4/ при условиях /5/ определяет сингулярные решения неоднородных уравнений типа Бюргерса-Хопфа. С этой целью положим, как и в [10,11],

$$u(x,t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} (x - x_i(t))^{-1}, & /7а/ \\ \sum_{i=1}^{N} \mathrm{cth}\frac{x - x_i(t)}{2}. & /7б/ \end{cases}$$

При использовании уравнений /4/ и функционального соотношения для функций $Z(\xi)$ вида /5/,

$$Z(\xi)\, Z'(\eta) - Z'(\xi)\, Z(\eta) = Z(\xi + \eta)[Z'(\eta) - Z'(\xi)],$$

можно выразить производные $u(x,t)$ по времени через u, u_x, u_{xx} и функции, зависящие только от аргумента x:

$$u_t = -\frac{A}{2}(u_{xx} + 2uu_x) + (u\psi_1(x) + \tilde{\psi}_1(x))_x, \qquad /8а/$$

$$u_t = -A(u_{xx} + uu_x) + (u\psi_2(x) + \tilde{\psi}_2(x))_x, \qquad /8б/$$

где

$$\psi_1(x) = -\alpha x^2 - \beta; \qquad \tilde{\psi}_1(x) = \alpha N x, \qquad /9а/$$

$$\psi_2(x) = -\alpha\,\mathrm{ch}x - \beta; \qquad \tilde{\psi}_2(x) = \alpha N\,\mathrm{sh}x. \qquad /9б/$$

Подстановками $v(x,t) = u - A^{-1}\psi_{1,2}(x)$ можно привести /8а-б/ к виду

$$v_t + c_1 v_{xx} + c_2 v v_x = \psi(x). \qquad /10/$$

Неоднородное уравнение Бюргерса-Хопфа обладает представлением Лакса и всегда может быть приведено к линейному. Координаты частиц $x_i(t)$, согласно /7/, определяют положение полюсов его решений. Для наших целей удобнее рассматривать непосредственно уравнения /8а-б/. Применяя подстановку

$$u = \mathrm{const}\frac{\phi_x}{\phi}, \qquad /11/$$

получим из /8а-б/ линейные уравнения для $\phi(x,t)$:

$$\phi_t + \frac{A}{2}\phi_{xx} - \phi_x\psi_1(x) - \phi\tilde{\psi}_1(x) = 0, \qquad /12а/$$

$$\phi_t + A\phi_{xx} - \phi_x\psi_2(x) - \phi\tilde{\psi}_2(x) = 0. \qquad /12б/$$

Из /7а-б/ следует, что мы должны найти решения /12а-б/, удовлетворяющие начальным условиям

$$\phi(x,0) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{N} (x - x_i(0)), & /13а/ \\ \prod_{i=1}^{N} \mathrm{sh}\frac{x - x_i(0)}{2}. & /13б/ \end{cases}$$

Интересующие нас величины $x_i(t)$ являются нулями функций $\phi(x,t)$.

Решение задачи Коши для уравнений /12а-б/ с начальными условиями /13а-б/ может быть получено следующим образом. Будем искать функции $\phi(x,t)$ в виде

$$\phi^{(1)}(x,t) = \sum_{k=0}^{N} x^k c_k^{(1)}(t), \qquad /14а/$$

$$\phi^{(2)}(x,t) = \sum_{k=0}^{N} \left(\mathrm{sh}\frac{x}{2}\right)^k \left(\mathrm{ch}\frac{x}{2}\right)^{N-k} c_k^{(2)}(t). \qquad /14б/$$

Легко убедиться в том, что соответствующие функции $u(x,t)$ имеют вид /7а-б/. Подставляя /14/ в /12/ и используя явные выражения /9/ для $\psi_{1,2}(x), \tilde{\psi}_{1,2}(x)$, получим системы обычных дифференциальных уравнений первого порядка для $c_k^{(1,2)}(t)$. Вводя обозначение $\vec{c}^{(\epsilon)}(t) =$

$= \{c_0^{(\epsilon)}(t), \ldots, c_N^{(\epsilon)}(t)\}$, $\epsilon = 1, 2$, можно записать эти системы в форме

$$\frac{d\vec{c}^{(\epsilon)}}{dt} = \hat{T}^{(\epsilon)} \vec{c}^{(\epsilon)}(0), \qquad /15/$$

где $\hat{T}^{(\epsilon)}$ - не зависящие от времени и начальных значений координат $\{x_i(0)\}$ матрицы размером $(N+1) \times (N+1)$. Отличными от нуля оказываются лишь следующие их элементы:

$$T^{(1)}_{00} = -\beta, \quad T^{(1)}_{02} = -a, \quad T^{(1)}_{N-1N} = -N\beta, \quad T^{(1)}_{N-1\,N-2} = 2\alpha, \quad T^{(1)}_{NN-1} = \alpha,$$

$$T^{(1)}_{kk-1} = (N+1-k)\alpha, \quad T^{(1)}_{kk+1} = -(k+1)\beta, \quad T^{(1)}_{kk+2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} a, \qquad /16а/$$

$$1 \le k \le N-2;$$

$$T^{(2)}_{00} = -\frac{N}{4} a, \quad T^{(2)}_{01} = -\frac{1}{2}(\alpha+\beta), \quad T^{(2)}_{02} = -\frac{a}{2};$$

$$T^{(2)}_{10} = \frac{N}{2}(\alpha-\beta), \quad T^{(2)}_{11} = \frac{1-3N}{4} a, \quad T^{(2)}_{12} = -(\alpha+\beta), \quad T^{(2)}_{13} = -\frac{3a}{4};$$

$$T^{(2)}_{N-1\,N-2} = (\alpha-\beta), \quad T^{(2)}_{N-1\,N-1} = \frac{1-N}{4} a, \quad T_{N-1N} = -\frac{N}{2}(\alpha+\beta);$$

$$T^{(2)}_{NN-1} = \frac{1}{2}(\alpha+\beta), \quad T^{(2)}_{NN} = -\frac{N(N+1)}{4} a;$$

$$/16б/$$

$$T^{(2)}_{kk-2} = -\frac{(N+2-k)(N+1-k)}{4} a, \quad T^{(2)}_{kk+1} = -\frac{(k+1)}{2}(\alpha+\beta),$$

$$T^{(2)}_{kk+2} = -\frac{(k+1)(k+2)}{4} a, \quad 2 \le k \le N-2.$$

Далее из /13а-б/ следует, что $\vec{c}^{(\epsilon)}(0)$ могут быть выражены через величины $\{x_i(0)\}$:

$$c^{(1)}_{N-k}(0) = (-1)^k \sum_{1 \le \lambda_1 \ldots < \lambda_k \le N} x_{\lambda_1}(0) \ldots x_{\lambda_k}(0), \quad c^{(1)}_N(0) = 1, \qquad /17а/$$

$$c^{(2)}_k(0) = (-1)^{N-k} \sum_{1 \le \lambda_1 \ldots < \lambda_k \le N,} \operatorname{ch}\frac{x_{\lambda_1}(0)}{2} \ldots \operatorname{ch}\frac{x_{\lambda_k}(0)}{2} \prod^{N}_{\mu \ne \lambda_1 \ldots \lambda_k,} \operatorname{sh}\frac{x_\mu(0)}{2}, \qquad /17б/$$

$$c^{(2)}_0(0) = (-1)^N \prod_{i=1}^{N} \operatorname{sh}\frac{x_i(0)}{2}, \quad k = 1, \ldots, N.$$

Поскольку матрицы $\hat{T}^{(\epsilon)}$ /16а-б/ - постоянные, легко найти решения уравнений /15/: $\vec{c}^{(\epsilon)}(t) = \exp(t\hat{T}^{(\epsilon)})\vec{c}^{(\epsilon)}(0)$. Приведем также выражения для функций $\phi(x,t)$,

$$\phi^{(1)}(x,t) = \sum_{k=0}^{N} x^k \{\exp(t\hat{T}^{(1)})\vec{c}^{(1)}(0)\}_k, \qquad /18а/$$

$$\phi^{(2)}(x,t) = \sum_{k=0}^{N} \left(\operatorname{sh}\frac{x}{2}\right)^k \left(\operatorname{ch}\frac{x}{2}\right)^{N-k} \{\exp(t\hat{T}^{(2)})\vec{c}^{(2)}(0)\}_k. \qquad /18б/$$

Формулы /16-18/ дают решение поставленной нами задачи об интегрировании уравнений движения для систем /3а-б/ с начальными условиями /6/: координаты частиц $x_i(t)$ являются нулями функций /19а-б/. Таким же способом можно найти явные решения уравнений движения и для более общих, чем /2а-б, 3а-б/, интегрируемых классических систем/12/, связанных с полупростыми алгебрами Ли. Гамильтониан этих систем имеет структуру, напоминающую /1/,

$$H = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{p_i^2}{2} + W(x_i)\right) + \sum_{i>j}^{N}\left(V(x_i - x_j) + V(x_i + x_j)\right),$$

где $\{V, W\}$ могут принимать следующие значения:

$$V(\xi) = \frac{a}{\xi^2}, \quad W(\xi) = \frac{\gamma_1}{\xi^2} + \gamma_2 \xi^2 + \gamma_3 \xi^4 + \gamma_4 \xi^6, \qquad /19а/$$

$$V(\xi) = \frac{a}{\operatorname{sh}^2\frac{\xi}{2}}, \quad W(\xi) = \frac{\gamma_1}{\operatorname{sh}^2\frac{\xi}{2}} + \frac{\gamma_2}{\operatorname{sh}^2\xi} + \gamma_3 \operatorname{ch}\xi + \gamma_4 \operatorname{ch}2\xi. \qquad /19б/$$

Например, в случае /19б/ и начальных условий /6/ при $Y(\xi) = \alpha\operatorname{ch}\xi + \beta\operatorname{cth}\xi + \gamma\operatorname{cth}\frac{\xi}{2}$, $Z(\xi) = \operatorname{cth}\frac{\xi}{2}$ величины $x_i(t)$ удовлетворяют системе уравнений первого порядка, обобщающей /4/:

$$\dot{x}_i(t) = A \sum_{j \ne i}^{N} [Z(x_i - x_j) + Z(x_i + x_j)] + Y(x_i). \qquad /20/$$

При этом постоянные $a, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ связаны с A, α, β, γ соотношениями

$$a = -A^2, \quad \gamma_1 = -\frac{\gamma(\gamma+\beta)}{2}, \quad \gamma_2 = -\frac{\beta^2}{2}, \quad \gamma_3 = \alpha(\beta+\gamma+2A(N-1)), \quad \gamma_4 = -\frac{\alpha^2}{4}. \qquad /21/$$

Системе /20/ также соответствует сингулярное решение неоднородного уравнения Бюргерса-Хопфа, построение которого позволяет найти функции $x_i(t)$.

В заключение отметим, что использованный нами метод не позволяет найти решения уравнений движения для систем /3/, /19/ при отсутствии ограничений /6/ на начальные условия $\{p_i(0),$

$x_i(0)\}$ и /5/, /12/ - на постоянные $\{a, \gamma_1, ..., \gamma_4\}$. Возможно, исследование этих систем в общем случае приведет к установлению их связи с решениями более сложных нелинейных эволюционных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Calogero F. Lett. Nuovo Cim., 1975, 13, p. 411.
2. Moser J. Adv.Math., 1975, 16, p. 197.
3. Olshanetsky M.A.,Perelomov A.M. Lett.Nuovo Cim., 1976, 16, p. 333; 17, p. 97.
4. Adler M. Comm.Math.Phys., 1977, 55, p. 196.
5. Kotera T., Sawada R. J.Phys.Soc.Japan, 1975, 39, p. 1614.
6. Barucchi G., Regge T. J.Math.Phys., 1977, 18, p. 1149.
7. Кригевер И.М. Функц. анализ и приложения, 1980, 14, вып.4, с. 45.
8. Иноземцев В.И. Phys.Lett., 1983, 98A, p. 316; ОИЯИ, Р4-83-664, Дубна, 1983.
9. Airault H., MacKean H.R., Moser J. Comm.Pure.Appl.Math., 1977, 30, p. 95.
10. Choodnowsky D.V.,Choodnowsky G.V. Nuovo Cim., 1977, 40B, p. 359.
11. Calogero F. Nuovo Cim., 1978, 45B, p. 177.
12. Иноземцев В.И., Мещеряков Д.В. ОИЯИ, Р4-84-247, Дубна, 1984.

Рукопись поступила в издательский отдел
13 июля 1984 года.

Иноземцев В.И., Мещеряков Д.В. Р5-84-510

Интегрируемые системы частиц во внешнем поле и движение полюсов решений неоднородного уравнения Бюргерса-Хопфа

Устанавливается связь между движением классических интегрируемых систем частиц во внешнем поле при некоторых начальных условиях и решениями неоднородного уравнения Бюргерса-Хопфа, обладающими полюсными особенностями. Эта связь позволяет в ряде новых случаев найти решения уравнений движения систем с произвольным числом частиц.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод авторов

Inozemtsev V.I., Meshcheryakov D.V. P5-84-510

Integrable Particle Systems in an External Field and Singular Solutions of the Inhomogeneous Bürgers-Hopf Equation

The connection is found between the motion of classical integrable particle systems in an external field under certain initial conditions and solutions to the inhomogeneous Bürgers-Hopf equation, which have pole singularities. This connection allows us in some new cases to obtain solutions to the equations of motion for systems with an arbitrary number of particles.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984