сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5-84-504

Е.Х.Христов

О Λ-ОПЕРАТОРАХ ДЛЯ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ.

Конечно-зонные потенциалы и метод фурье-разложения по квадратам для уравнения Кортевега–де Вриза в периодическом случае

1984

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа является непосредственным продолжением статьи /1/. Обозначения, если это не указано особо, те же, что и в указанной работе.

В §1 получены некоторые формулы для разности и суммы потенциалов уравнения $y'' + (\lambda - q_j(x))y = 0$ в случае конечно-зонных потенциалов. Сходные задачи ранее рассматривались Б.М.Левитаном /2/. В §2 на основе симплектических разложений, полученных в теореме 3.2, решается задача Коши для волнового уравнения $q_t(x,t) - q_x(x,t) = 0$ с периодическими условиями $q(0,t) = q(\pi, t)$, $0 \le x \le \pi$, $t \in R$, что приводит, в частности, к известным уравнениям Дубровина /3/ и Трубовица /4/ соответственно для конечно-зонных и бесконечно-зонных потенциалов. Далее, в §3, на основании результатов развитой в /1/ спектральной теории для оператора Λ^* и известных тождеств следов для периодических задач Штурма-Лиувилля показано, как метод фурье-разложения по квадратам собственных функций оператора Шредингера, с помощью которого линеаризуется уравнение Кортевега-де Вриза на всей оси в пространстве данных рассеяния /см., например, /5/, §6/, можно обобщить на случай периодической задачи Коши

$$q_t(x,t) = 6q(x,t)\,q_x(x,t) - q_{xxx}(x,t), \quad q(x,t) = q(x+\pi, t), -\infty < x < \infty .$$

Изложенная здесь схема стимулирована развитым в работе Флашки и Маклафлина /6/ гамильтоновым формализмом для этой задачи. Следует отметить, что развитие методов решения периодической задачи Коши для уравнения КдВ обязано в первую очередь фундаментальным работам Новикова, Итса, Матвеева и Дубровина /см., например, /7/, гл.II/. Весьма существенную роль здесь сыграла, ставшая уже классической, работа Н.И.Ахиезера /8/. Ряд важных результатов в этой области получен В.А.Марченко /9/.

§1. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ $\Delta(x) = q_1(x) - q_2(x)$ И $w(x) = s_x(x) + \Delta(x) \int_0^x \Delta(y)\,dy$ В СЛУЧАЕ КОНЕЧНО-ЗОННЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Рассмотрим вместе с краевыми задачами $/0.1/_1^*$ краевые задачи с периодическими граничными условиями

---

*Здесь и всюду в дальнейшем ссылки на формулы с индексом 1 внизу относятся к работе /1/.

$$y'' + (\lambda - q_j(x))y = 0,\quad y(0) = y(\pi),\quad y'(0) = y'(\pi),\quad j = 1,2 \qquad /1.1/$$

и с антипериодическими граничными условиями

$$y'' + (\lambda - q_j(x))y = 0,\quad y(0) = -y(\pi),\quad y'(0) = -y'(\pi), \qquad /1.2/$$

где $q_j \in C^1$. Обозначим через

$$\Delta_j(\lambda) = \phi_j'(\pi,\lambda) + \theta_j(\pi,\lambda) = \phi_j'(\pi,\lambda) + \psi_j'(0,\lambda) \qquad /1.3/$$

их дискриминанты Хилла, где $\theta_j(x,\lambda)$: $\theta_j(0,\lambda) = 1$, $\theta_j'(0,\lambda) = 0$ - решение уравнения $\ell_j y = \lambda y$. Второе равенство в /4.3/ следует из равенства $\psi'(0,\lambda) = \theta(\pi,\lambda)$, так как

$$\psi(x,\lambda) = \theta(\pi,\lambda)\,\phi(x,\lambda) - \phi(\pi,\lambda)\,\theta(x,\lambda). \qquad /1.4/$$

Хорошо известно /см., например, /9//, что спектр краевой задачи /1.1/ определяют нули уравнения $\Delta_j(\lambda) = 2$: $\mu_0^{(j)}$, $\mu_{2n+1}^{(j)}$, $\mu_{2n+2}^{(j)}$ $(n = 1,3,\dots)$, а спектр задачи /1.2/ - нули уравнения $\Delta_j(\lambda) = -2$; $\mu_{2n+1}^{(j)}$, $\mu_{2n+2}^{(j)}$ $(n = 0,2,\dots)$. Справедливы неравенства

$$\mu_0^{(j)} < \mu_1^{(j)} \le \lambda_0^{(j)} \le \mu_2^{(j)} < \mu_3^{(j)} \le \lambda_1^{(j)} \le \mu_4^{(j)} < \dots, \qquad /1.5/$$

где $\{\lambda_n^{(j)} = \lambda_{2n+j}\}_{n=0}^{\infty}$ - собственные значения задачи $/0.1/_1$. Потенциал $q_j(x)$ называется N-зонным, если выполняются равенства

$$\mu_{2n+1}^{(j)} = \lambda_n^{(j)} = \mu_{2n+2}^{(j)},\quad n = N, N+1, \dots, \qquad /1.6/$$

которые эквивалентны условиям

$$\dot\Delta_j(\lambda_{2n+j}) = 0,\quad C_{2n+j} = (-1)^{n-1},\quad n \ge N. \qquad /1.7/$$

где C_{2n+j} определяются из $/2.7/_1$. Обозначим через $\alpha_{2n+j}^{-1} = \|\phi_j(\lambda_{2n+j})\|^2_{L_2}$, $\beta_{2n+j}^{-1} = \|\psi_j(\lambda_{2n+j})\|^2_{L_2}$ квадраты норм собственных функций краевых задач $/0.1/_1$. Справедливы представления

$$\alpha_{2n+j} = C_{2n+j}^{-1}\,\dot\omega_j^{-1}(\lambda_{2n+j}),\quad \beta_{2n+j} = C_{2n+j}\,\dot\omega_j^{-1}(\lambda_{2n+j}), \qquad /1.8/$$

где $\omega_j(\lambda)$ - характеристическая функция $/0.3/_1$.

Теорема 1.1. Пусть потенциалы $q_j(x)$ - N-зонные, и

$$\Delta_1(\lambda) \equiv \Delta_2(\lambda) = \Delta(\lambda). \qquad /1.9/$$

Тогда: А/ Если $\lambda_{2n+1} \ne \lambda_{2n+2}$ при $n = 0,1,\dots,N-1$, то

$$\Delta(x) = \sum_{n=0}^{N-1}\{2\beta_{2n+1}\Psi'_{2n+1}(x) - 2\alpha_{2n+1}\Phi'_{2n+1}(x)\}, \qquad /1.10/$$

$$w(x) = \sum_{n=0}^{N-1}\{4\beta_{2n+1}\,\omega_2^{-1}(\lambda_{2n+1})(C_{2n+1}^{-1} - \phi_2'(\pi,\lambda_{2n+1}))\Psi'_{2n+1}(x) - 4\alpha_{2n+1}\,\omega_2^{-1}(\lambda_{2n+1})(\psi_2'(0,\lambda_{2n+1}) - C_{2n+1})\Phi'_{2n+1}(x)\}. \qquad /1.11/$$

Б/ При $\lambda_{2n+1} = \lambda_{2n+2} = \lambda_{(n)}$, $n = 0,1,\dots,N-1$,

$$\Delta(x) = \sum_{n=0}^{N-1} 2\dot\omega^{-1}(\lambda_{(n)})(C_{2n+1} - C_{2n+2})P_n'(x), \qquad /1.12/$$

$$w(x) = \sum_{n=0}^{N-1}\{2\dot\omega^{-2}(\lambda_{(n)})(C_{2n+1}^{-1}C_{2n+2}^{-1} - 1)Q_n'(x) - [\sum_{j=1,2} C_{2n+j}(\dot\phi'_{3-j}(\pi,\lambda_{(n)}) + \dot\psi_j'(0,\lambda_{(n)}))]P_n'(x)\}, \qquad /1.13/$$

где $\Psi_{2n+1}(x) = \Psi(x,\lambda_{2n+1})$, $\Phi_{2n+1}(x) = \Phi(x,\lambda_{2n+1})$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, функции $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ определяются формулами /3.2/ и /3.3/.

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующая, в основном хорошо известная,

Лемма 1.1. При $\lambda_{2n+j} \in \sigma'$ справедливы равенства

$$(\Delta,\Phi_{2n+j}) = (-1)^{3-j}\,\dot\Omega(\lambda_{2n+j})\,\alpha_{2n+j},\quad (\Delta,\Psi_{2n+j}) = (-1)^{3-j}\,\dot\Omega(\lambda_{2n+j})\,\beta_{2n+j}, \qquad /1.14/$$

$$(w,\Phi_{2n+j}) = 2(1 - C_{2n+j}\,\phi'_{3-j}(\pi,\lambda_{2n+j})), \qquad /1.15/$$

$$(w,\Psi_{2n+j}) = 2(C_{2n+j}^{-1}\,\psi'_{3-j}(0,\lambda_{2n+j}) - 1), \qquad /1.16/$$

а при $\lambda_{2n+j} = \lambda_{(n)} \in \sigma_n''$ - равенства

$$(\Delta,\Psi(\lambda_{(n)})) = (\Delta,\Phi(\lambda_{(n)})) = 0, \qquad /1.17/$$

$$(\Delta,\dot\Phi_{(n)}) = 2^{-1}\ddot\Omega(\lambda_{(n)})(\beta_{2n+1} - \beta_{2n+2}),\quad (\Delta,\dot\Psi_{(n)}) = 2^{-1}\ddot\Omega(\lambda_{(n)})(\alpha_{2n+1} - \alpha_{2n+2}), \qquad /1.18/$$

$$(w,\Phi_{(n)}) = C_{2n+1}C_{2n+2}(w,\Psi_{(n)}) = 2(1 - C_{2n+1}C_{2n+2}), \qquad /1.19/$$

$$(w,\dot\Phi_{(n)}) = -2(\dot\phi_1'(\pi,\lambda_{(n)})C_{2n+2} + \dot\phi'(\pi,\lambda_{(n)})C_{2n+1}), \qquad /1.20/$$

$$(w,\dot\Psi_{(n)}) = 2(\dot\psi_1'(0,\lambda_{(n)})C_{2n+2}^{-1} + \dot\psi_2'(0,\lambda_{(n)})C_{2n+1}^{-1}), \qquad /1.21/$$

где $\Omega(\lambda) = \omega_1(\lambda)\,\omega_2(\lambda)$.

Доказательство равенств /1.14/, /1.17/ и /1.18/ получается из тождества $/1.11/_1$ и представлений /1. 8/. Для того, чтобы вывести остальные равенства, следует воспользоваться тождеством

$$Y(x,\lambda)(2\lambda - s(x)) + 2y_1'(x,\lambda)\,y_2'(x,\lambda) + W(y_2(x,\lambda), y_1(x,\lambda)) \int_{x_0}^{x} \Delta(y)\,dy -$$

$$- Y(x_0,\lambda)(2\lambda - s(x_0)) - 2y_1'(x_0,\lambda)\,y_2'(x_0,\lambda) = - \int_{x_0}^{x} w(y)\,Y(y,\lambda)\,dy,$$

справедливым для любых двух решений y_j уравнений $\ell_j y = \lambda y$.

Доказательство теоремы 1.1. Формулы /1.10/ и /1.11/ получим с помощью теоремы 3.1 [1], положив в разложении $/3.5/_1$ $f = \Delta(x)$ и $f = w(x)$, $n_0 = N-1$. Из /1.17/ следует, что $(\Delta, P_n) = c_n = 0$ при $n \geq N$, а из /1.18/ с учетом условий /1.7/ получаем, что и $(w, P_n) = 0$ при $n \geq N$. Из равенств /1.17/ и /1.7/ имеем $(\Delta, Q_n) = 0$, $n \geq N$. Далее, легко проверяется с помощью равенств /1.14/ $(j = 1)$, что при $m \leq N$, $n > N$

$$(\Delta, U_{2m+1})\,D_{n,2m+1} - (\Delta, V_{2m+1})\,F_{n,2m+1} = (C_{2n+1} - C_{2n+2})\frac{\dot\omega_1(\lambda_{(n)})\,\omega_2(\lambda_{2m+1})}{\dot\omega_1(\lambda_{2n+1})(\lambda_{2m+1} - \lambda_{(n)})}.$$

Тем самым мы показали, что если выполняется вторая часть равенств в /1.7/, то условия $/3.17/_1$ удовлетворяются при $n \geq N$, причем, $a_{2n+1} = (\Delta, U_{2n+1})$, $b_{2n+1} = (\Delta, V_{2n+1})$. Для получения представления /1.11/ следует дополнительно учесть, что

$$(w, U_{2m+1})\,D_{n,2m+1} - (w, V_{2m+1})\,F_{n,2m+1} = \frac{2\dot\omega_1(\lambda_{(n)})(\Delta_2(\lambda_{2m+1}) - \Delta_1(\lambda_{2m+1}))}{\dot\omega_1(\lambda_{2m+1})(\lambda_{2m+1} - \lambda_{(n)})},$$

и далее воспользоваться условием /1.9/. К представлениям /1.12/ и /1.13/ приходим непосредственно из формулы разложения $/3.19/_1$. Докажем /1.13/. Из /1.19/-/1.21/ получаем, что при любом $\lambda_{(n)} \in \sigma''$ $(\sigma' = \phi)$

$$(w, P_n) = 2\dot\omega^{-2}(\lambda_{(n)})(C_{2n+1}^{-1} C_{2n+2}^{-1} - 1), \qquad /1.22/$$

$$(w, Q_n) = \sum_{j=1,2} C_{2n+j}(\dot\phi_{3-j}'(\pi, \lambda_{(n)}) + \dot\psi_j'(0, \lambda_{(n)})). \qquad /1.23/$$

Следовательно, если выполняются условия /1.7/ и /1.9/, то $(w, Q_n) = (w, P_n) = 0$, $n \geq N$. Теорема доказана.

Замечание 1. Обозначим через $\tilde\theta(x,\lambda)$ решение уравнения $\ell y = \lambda y$, для которого $\tilde\theta(\pi,\lambda) = 1$, $\tilde\theta'(\pi,\lambda) = 0$.

Тогда справедливо равенство

$$\phi_2(x,\lambda) = \phi_2'(\pi,\lambda)\,\psi_2(x,\lambda) + \phi_2(\pi,\lambda)\,\tilde\theta_2(x,\lambda),$$

подставляя которое в /1.10/, получаем формулу Левитана [2]. Очевидно, эта формула остается справедливой, если при некоторых n $\lambda_{2n+1} = \lambda_{2n+2}$, в пределе $\lambda_{2n+1} = \lambda_{2n+2}$, $n = 0,1,\ldots,N-1$, получаем /1.12/. Как видно из изложенного доказательства, для справедливости представления /1.10/ достаточно потребовать вместо /1.9/ лишь условие $\mu_{2n+\ell}^{(1)} = \mu_{2n+\ell}^{(2)}$, $\ell = 1,2$, $n \geq N$.

Замечание 2. Если потенциалы бесконечно-зонные, то формулы /1.10/, /1.12/, /1.13/ остаются справедливыми и при $N = \infty$, что вытекает из теоремы 3.2 [1]. Условие $\sigma'' = \phi$ для разложения /1.10/ $(N = \infty)$ не является существенным, при этом представление /1.10/ можно рассматривать как полученное из соответствующего разложения с $N = \infty$ при условии конечно-зонности.

Приведем два важных для дальнейшего следствия из последней теоремы.

Следствие 1 /теорема единственности для периодических задач Штурма-Лиувилля /см., например, [2, 4, 9]//. Если выполняется условие /1.9/, то $q_1(x) = q_2(x)$, тогда и только тогда, когда

$$\lambda_n^{(1)} = \lambda_n^{(2)} = \lambda_n, \quad C_n^{(1)} = C_n^{(2)} = C_n, \quad n = 0,1,\ldots. \qquad /1.24/$$

При этом

$$2C_n = \Delta(\lambda_n) + \sqrt{\Delta^2(\lambda_n) - 4}, \quad C_n = (-1)^{n-1}|C_n|, \qquad /1.25/$$

где знак перед радикалом определяется вторым равенством, и

$$C_n + C_n^{-1} = \Delta(\lambda_n), \quad C_n - C_n^{-1} = \sqrt{\Delta^2(\lambda_n) - 4}. \qquad /1.26/$$

Замечание. В дальнейшем, следуя [6], в качестве спектральных характеристик, определяющих $q(x)$, будем рассматривать величины

$$\lambda_n(q), \quad f_n(q) = -2\ln|C_n| \quad (C_n = (-1)^{n-1}|C_n|). \qquad /1.27/$$

Тогда равенства /1.26/ можно записать в виде

$$(-1)^{n-1}\, 2\,\mathrm{ch}\frac{f_n}{2} = \Delta(\lambda_n), \quad (-1) \quad 2\,\mathrm{sh}\frac{f_n}{2} = \sqrt{\Delta^2(\lambda_n) - 4}. \qquad /1.28/$$

Следствие 2. Для того, чтобы потенциал $q \in C^1$ допускал представление

$$q_x(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \dot\omega^{-2}(\lambda_n)(C_n^{-2} - 1)\,Q_n'(x) - C_n\,\dot\Delta(\lambda_n)\,P_n'(x), \qquad /1.29/$$

необходимо и достаточно, чтобы $q(x)$ был N-зонным. При этом

$$q(x) \in \tilde C_{(0)}^{\infty} = \{ f(x) \mid f \in C^{\infty}, \ \int_0^{\pi} f(x)\,dx = 0, \ f(0) = f(\pi) \}. \qquad /1.30/$$

Доказательство. Из равенств /1.22/ и /1.23/ при $q = q_1 = q_2$ имеем

$$(q_x, P_n) = \dot{\omega}^{-2}(\lambda_n)(C_n^{-2} - 1), \quad (q_x, Q_n) = C_n \dot{\Delta}(\lambda_n), \qquad /1.31/$$

и, следовательно, представление /1.27/ справедливо тогда и только тогда, когда $C_n^2 = 1$, $\dot{\Delta}(\lambda_n) = 0$ при $n \geq N$, что, вследствие /1.7/, эквивалентно N-зонности потенциала $q(x)$. Условие /1.30/ следует из того факта, что функции $P_n, Q_n \in \mathfrak{D}(\Lambda)$ и удовлетворяют уравнениям $/3.22/_1$. Отметим, что условие /1.30/ для конечнозонных потенциалов является известным фактом [9]. Условие $\int_0^\pi q(x)\,dx = 0$ эквивалентно условию $\lambda_n = n^2 + o(1)$, $n \to \infty$, вследствие асимптотики $/0.4/_1$. Следствие доказано.

§2. О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ КОШИ $q_t - q_x = 0$, $q(0,t) = q(\pi, t)$

Рассмотрим однопараметрическое семейство краевых задач

$$y'' + (\lambda - q(x,t))\,y = 0, \quad y(0) = y(\pi) = 0, \quad t \in R, \qquad /2.1/$$

где предполагаем, что существуют $q_x, q_t \in L_2^{(0)}$. Введем функции

$$\tilde{P}_n(x) = \beta_n \Psi(x, \lambda_n) = \alpha_n \Psi(x, \lambda_n), \ \tilde{Q}_n(x) = \beta_n \dot{\Psi}(x, \lambda_n) - \alpha_n \dot{\Phi}(x, \lambda_n). \qquad /2.2/$$

Так как $\tilde{P}_n(x)\tilde{Q}_n(y) = P_n(x) Q_n(y)$, где P_n и Q_n определяются равенствами $/3.2/_1$ и $/3.3/_1$, формулу разложения $/3.19/_1$ можно записать в виде

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \{\tilde{Q}_n'(x)(f, \tilde{P}_n) - \tilde{P}_n'(x)(f, \tilde{Q}_n)\}, \quad f \in L_2^{(0)}. \qquad /2.3/$$

При этом равенства $/3.18/_1$ эквивалентны равенствам

$$[\tilde{P}_n, \tilde{P}_m] = [\tilde{Q}_n, \tilde{Q}_m] = 0, \quad [\tilde{P}_n, \tilde{Q}_m] = \delta_{n,m}, \quad n,m = 0,1,\dots \qquad /2.4/$$

Лемма 2.1. В любой точке $q \in L_1$ собственные значения $\lambda_n(q)$ и нормировочные числа $\alpha_n(q)$, $\beta_n(q)$ дифференцируемы по Гато, т.е., если $f \in L_1$, то существуют производные

$$\frac{d}{d\epsilon}\lambda_n(q + \epsilon f)|_{\epsilon=0} = \left(\frac{\delta\lambda_n}{\delta q}, f\right), \quad \frac{\delta\lambda_n}{\delta q}(x) = \tilde{P}_n(x), \qquad /2.5/$$

$$\frac{d}{d\epsilon}\alpha_n(q + \epsilon f)|_{\epsilon=0} = \left(\frac{\delta\alpha_n}{\delta q}, f\right), \quad \frac{\delta\alpha_n}{\delta q}(x) = \frac{1}{\dot{\omega}^2(\lambda_n)}\{\dot{\Psi}_n(x) - \frac{\ddot{\omega}(\lambda_n)}{\dot{\omega}(\lambda_n)}\Psi_n(x)\}, \qquad /2.6/$$

$$\frac{d}{d\epsilon}\beta_n(q + \epsilon f)|_{\epsilon=0} = \left(\frac{\delta\beta_n}{\delta q}, f\right), \quad \frac{\delta\beta_n}{\delta q}(x) = \frac{1}{\dot{\omega}^2(\lambda_n)}\{\dot{\Phi}_n(x) - \frac{\ddot{\omega}(\lambda_n)}{\dot{\omega}(\lambda_n)}\Phi_n(x)\}. \qquad /2.7/$$

При этом

$$\alpha_n^{-1}\,\delta\alpha_n/\delta q(x) = -\alpha_n \dot{\Phi}_n(x) + \sum_{\substack{m=0 \\ n \neq m}}^{\infty} 2(\lambda_n - \lambda_m)^{-1}\alpha_m \Phi_m(x), \qquad /2.8/$$

$$\beta_n^{-1}\,\delta\beta_n/\delta q(x) = -\beta_n \dot{\Psi}_n(x) + \sum_{\substack{m=0 \\ n \neq m}}^{\infty} 2(\lambda_n - \lambda_m)^{-1}\beta_m \Psi_m(x). \qquad /2.9/$$

Доказательство равенств /2.5/ хорошо известно. Формулы /2.6/ и /2.7/ выводятся одинаково. Здесь докажем только /2.7/. Из интегрального уравнения

$$\phi(q+h;\, x, \lambda) = \phi(x, \lambda) + \int_0^x \{\phi(x,\lambda)\,\theta(y,\lambda) - \theta(x,\lambda)\,\phi(y,\lambda)\}\,h(y)\,\phi(q+h; y, \lambda)\,dy,$$

где ϕ и θ -решения уравнения $y'' + (\lambda - q(x))\,y = 0$, $\phi(q+h;\, x, \lambda)$ - решение уравнения $y'' + (\lambda - q(x))\,y = h(x)\,y$, получаем, что функционалы $\phi'(\pi, \lambda) = \phi'(q; \pi, \lambda)$, $\dot{\phi}(\pi, \lambda) = \dot{\phi}(q; \pi, \lambda): L_1 \to R$ дифференцируемы в любой точке $q \in L_1$, $\lambda \in \mathbf{C}$:

$$\delta\phi'(\pi,\lambda)/\delta q(x) = \phi'(\pi,\lambda)\,\theta(x,\lambda)\,\phi(x,\lambda) - \theta'(\pi,\lambda)\,\phi^2(x,\lambda),$$

$$\delta\dot{\phi}(\pi,\lambda)/\delta q(x) = \dot{\phi}(\pi,\lambda)\,\theta(x,\lambda)\,\phi(x,\lambda) - \dot{\theta}(\pi,\lambda)\,\phi^2(x,\lambda) -$$

$$- 2\theta(\pi,\lambda)\,\phi(x,\lambda)\,\dot{\phi}(x,\lambda) + \phi(\pi,\lambda)\,[\dot{\theta}(x,\lambda)\,\phi(x,\lambda) + \theta(x,\lambda)\,\dot{\phi}(x,\lambda)].$$

Отсюда следует с учетом представления /1.8/ и равенства /2.5/, что $\beta_n(q): L_1 \to R$ есть дифференцируемый функционал, причем

$$\frac{d}{d\epsilon}\beta_n(q+\epsilon f)|_{\epsilon=0} = \frac{d}{d\epsilon}\frac{\phi'(q+\epsilon f;\, \pi, \lambda_n(q+\epsilon f))}{\dot{\phi}(q+\epsilon f;\, \pi, \lambda_n(q+\epsilon f))}\Big|_{\epsilon=0} =$$

$$= \dot{\phi}^{-1}(\pi,\lambda_n)\left(\frac{\delta\phi'(\pi,\lambda_n)}{\delta q}, f\right) - \phi'(\pi,\lambda_n)\,\dot{\phi}^{-1}(\pi,\lambda_n)\left(\frac{\delta\dot{\phi}(\pi,\lambda_n)}{\delta q}, f\right) +$$

$$+ \{\dot{\phi}'(\pi,\lambda_n)\,\dot{\phi}^{-1}(\pi,\lambda_n) - \phi'(\pi,\lambda_n)\,\ddot{\phi}(\pi,\lambda_n)\,\dot{\phi}^{-1}(\pi,\lambda_n)\}\left(\frac{\delta\lambda_n}{\delta q}, f\right).$$

Теперь для того, чтобы получить формулу /2.8/, следует в правой части этого равенства подставить уже найденные выражения для $\delta\lambda_n/\delta q$, $\delta\phi'(\pi,\lambda_n)/\delta q$ и $\delta\dot{\phi}(\pi,\lambda_n)/\delta q$ с $\phi(\pi,\lambda_n) = 0$ и далее воспользоваться равенствами

$$\phi'(\pi,\lambda_n) = \theta^{-1}(\pi,\lambda_n), \ \dot{\phi}(\pi,\lambda_n)\,\theta(\pi,\lambda_n) + \phi'(\pi,\lambda_n)\,\dot{\theta}(\pi,\lambda_n) - \dot{\phi}(\pi,\lambda_n)\,\theta'(\pi,\lambda_n) = 0,$$

которые следуют из $W(\theta,\phi)=1$ и $\phi(\pi,\lambda_n)=0$. Представления /2.9/ и /2.10/ следуют из $/3.9/_1$ при $q_1=q_2$. Лемма доказана.

Следствие. Так как $C_n^2=\beta_n \alpha_n^{-1}$, то функционал $f_n(q)$ /1.27/ дифференцируем при любом $q\in L_1$, и

$$\delta f_n/\delta q(x) = \beta_n \dot{\Psi}(x,\lambda_n) - \alpha_n \dot{\Phi}(x,\lambda_n) = \tilde{Q}(x,\lambda_n). \qquad /2.10/$$

Замечание. В работе [6] было показано, что

$$\delta f_n/\delta q(x) = -2\phi(x,\lambda_n)\theta(x,\lambda_n) + 2\dot{\phi}^{-1}(\pi,\lambda_n)\dot{\theta}(\pi,\lambda_n)\phi^2(x,\lambda_n).$$

Отсюда получаем /2.11/, заметив, что, в силу равенства /1.4/, имеем при $\lambda=\lambda_n$

$$\dot{\psi}(x,\lambda_n) - \theta(\pi,\lambda_n)\dot{\phi}(x,\lambda_n) = \dot{\theta}(\pi,\lambda_n)\phi(x,\lambda_n) - \dot{\phi}(\pi,\lambda_n)\theta(x,\lambda_n).$$

Из соотношений /1.31/, /2.5/ и /2.10/ получаем, в силу формулы разложения /2.3/, следующую важную теорему.

Теорема 2.1. Пусть в уравнении /2.1/ производные $q_x, q_t \in L_2^{(0)}$. Тогда справедливы следующие разложения

$$q_t(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \{\lambda_{n,t}\, \tilde{Q}_n'(x,t) - f_{n,t}\, \tilde{P}'(x,t)\}, \qquad /2.11/$$

$$q_x(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{C_n^{-1}(t) - C_n(t)}{\dot{\omega}(\lambda_n(t))} \tilde{Q}_n'(x,t) - \frac{2\dot{\Delta}(\lambda_n(t))}{\dot{\omega}(\lambda_n(t))} \tilde{P}_n'(x,t) \right\}, \qquad /2.12/$$

где функции $\tilde{P}(x,t)$ и $\tilde{Q}(x,t)$ построены по формулам /2.2/ с $q=q(x,t)$; $\lambda_n(t)$ и $f_n(t)$ - отвечающие краевой задаче /2.2/ величины /1.27/, а $\Delta(\lambda)$ - дискриминант Хилла /1.3/.

Рассмотрим задачу Коши

$$q_t(x,t) - q_x(x,t) = 0,\quad 0<x<\pi,\quad t\in R,\quad q(x,0)=q(x)\in \tilde{C}^1_{(0)}. \qquad /2.13/$$

Из теоремы 2.1 получаем

Следствие. Потенциал $q(x,t)$ удовлетворяет уравнению /2.14/ тогда и только тогда, когда

$$\frac{d}{dt}\lambda_n(t) = \frac{C_n^{-1}(t) - C_n(t)}{\dot{\omega}(\lambda_n(t))},\quad \frac{d}{dt} f_n(t) = \frac{2\dot{\Delta}(\lambda_n(t))}{\dot{\omega}(\lambda_n(t))}. \qquad /2.14/$$

Решением задачи /2.13/, очевидно, является функция $q(x+t)$ и, следовательно, уравнения /2.14/ дают эволюцию по t спектральных данных $\{\lambda_n(t), f_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ краевой задачи

$$y'' + (\lambda - g(x+t))y = 0, \qquad y(0) = y(\pi) = 0. \qquad /2.15/$$

Заметим теперь, что дискриминант Хилла $\Delta(\lambda)$ уравнения /2.15/ не зависит от t, откуда вытекает, что спектры периодической и антипериодической задач /1.1/ и /1.2/ не зависят от t; при этом выполняются неравенства

$$\mu_{2n+1} \le \lambda_n(t) \le \mu_{2n+2}, \quad n=0,1,\dots \qquad /2.16/$$

Из /1.26/ и представления $/1.23/_1$ следует, что первое из уравнений в /2.14/ можно записать в виде

$$\frac{d}{df}\lambda_n(t) = \sqrt{\Delta^2(\lambda_n(t)) - 4}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\pi(\lambda_0(t)-\lambda)\prod_{\ell\ge 1} e^{-2}(\lambda_\ell(t)-\lambda)\right)^{-1}_{\lambda=\lambda_n(t)}. \qquad /2.17/$$

Второе уравнение можно решить в предположении, что известно решение системы /2.16/. Дифференцируя по t равенство /1.25/, получаем, что решение $f_n(t)$ дается формулой

$$(-1)^n\, 2\,\mathrm{sh}\frac{f_n(t)}{2} = \sqrt{\Delta^2(\lambda_n(t)) - 4}, \quad n=0,1,\dots \qquad /2.18/$$

Из неравенств /2.16/ следует, что при любом t знак $C_n(t)$ совпадает со знаком $C_n(0)$; последний определяется из условия /1.27/. Равенства /2.18/ определяют знак радикала в /2.17/.

Замечание. В связи с решением обратной задачи для периодических потенциалов система уравнений /2.16/, где знак перед $\sqrt{\Delta^2(\lambda_n(t)-4}$ определяется описанным выше образом, была получена иным способом в работе Трубовица [4]. Там же было показано, что решение этой системы единственно и дается формулой

$$q(t) = \mu_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{2n-1} + \mu_{2n} - 2\lambda_{n-1}(t). \qquad /2.20/$$

Рассмотрим в заключение этого параграфа систему /2.14/в случае конечно-зонных потенциалов.

Напомним, что имеет место известная формула /см., например, работу [9] /

$$\Delta^2(\lambda) - 4 = 4\pi^2(\mu_0-\lambda)\prod_{n\ge 1} n^{-4}(\mu_{2n-1}-\lambda)(\mu_{2n}-\lambda).$$

Пусть при $n \geq N$ имеем равенство в /2.16/. Тогда

$$\Delta^2(\lambda) - 4 = 4\pi^2(\mu_0 - \lambda)\prod_{n=1}^{N} n^{-4}(\mu_{2n-1} - \lambda)(\mu_{2n} - \lambda)\prod_{n=N+1}^{\infty} n^{-4}(\lambda_{n-1} - \lambda)^2 \qquad /2.21/$$

и, следовательно, система /5.17/ сводится к системе

$$\frac{d\lambda_n}{dt} = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{R_N(\lambda_0(t))}}{\prod\limits_{\ell=1}^{N-1}(\lambda_\ell(t) - \lambda_0(t))}, & n = 0; \\[3ex] \dfrac{2\sqrt{R_N(\lambda_n(t))}}{(\lambda_0(t) - \lambda_n(t))\prod\limits_{\ell \neq n}(\lambda_\ell(t) - \lambda_n(t))}, & n = 1,2,\dots,N-1; \\[3ex] 0, & n = N+1,\dots, \end{cases} \qquad /2.22/$$

где $R_N(\lambda) = (\mu_0 - \lambda)\prod_{n=1}^{N} n^{-4}(\mu_{2n-1} - \lambda)(\mu_{2n} - \lambda)$, а вторая система уравнений в /2.14/ имеет следующее решение

$$(-1)^n 2\,\mathrm{sh}\frac{f_n(t)}{2} = \sqrt{\Delta^2(\lambda_n(t)) - 4}, \quad n = 0,\dots,N-1, \; f_n(t) = 0, n \geq N. \qquad /2.23/$$

Уравнения /2.22/ впервые были получены Б.А.Дубровиным[3]. Иной вывод этих уравнений, основанный на решении обратной задачи для оператора Штурма-Лиувилля в случае конечно-зонных потенциалов с помощью теоремы Рофе-Бекетова[10], имеется в работе Б.М.Левитана[11].

§3. О ГАМИЛЬТОНОВОМ ФОРМАЛИЗМЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-де ВРИЗА В ПЕРИОДИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Рассмотрим периодическую задачу Коши для уравнения КдВ

$$q_t = 6qq_x - q_{xxx}, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad q(0,t) = q(\pi,t), \quad q(x,0) \in \tilde{C}^{\infty}_{(0)}. \qquad /3.1/$$

где $\tilde{C}^{\infty}_{(0)}$ - пространство /1.30/, и вместе с ней задачу Штурма-Лиувилля

$$y'' + (\lambda - q(x,t))y = 0, \quad y(0) = y(\pi) = 0, \quad 0 \leq t < \infty. \qquad /3.2/$$

Известно, что если ввести в $\tilde{C}^{\infty}_{(0)}$ скобку Пуассона

$$\{F, G\} \stackrel{def}{=} \left[\frac{\delta F}{\delta q}, \frac{\delta G}{\delta q}\right] = \left(\frac{\delta F}{\delta q}, D\frac{\delta G}{\delta q}\right), \qquad /3.3/$$

где F и G - дифференцируемые функционалы от q, q_x и т.д., то /3.1/ имеет явно гамильтонову структуру

$$q_t = \frac{d}{dx}\frac{\delta H}{\delta q}, \quad H = \int_0^{\pi}\left(q^3(x) - \frac{1}{2}q_x^2(x)\right)dx. \qquad /3.4/$$

Введем теперь, следуя [6], новые переменные $\{\lambda_n(t), f_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$, которые, как отмечалось в следствии 1 к теореме 1.1, однозначно определяют $q(x,t)$ в /3.2/. Относительно скобки Пуассона /3.3/ величины λ_n и f_n являются каноническими переменными[6], что вытекает из равенств /2.4/, /2.5/ и /2.10/. Уравнение /3.4/ теперь принимает вид

$$\frac{d}{dt}\lambda_n = \frac{\partial H}{\partial f_n}, \quad \frac{d}{dt}f_n = -\frac{\partial H}{\partial \lambda_n}. \qquad /3.5/$$

Следующая теорема дает явный вид правых частей этих соотношений.

<u>Теорема 3.1</u>. Для того, чтобы функция $q(x,t) \in \tilde{C}^{\infty}_{(0)}$ являлась решением задачи Коши /3.1/, необходимо и достаточно, чтобы величины $\lambda_n(t)$ и $f_n(t)$ удовлетворяли следующей системе уравнений

$$\frac{d\lambda_n(t)}{dt} = \frac{2\sqrt{\Delta^2(\lambda_n(t) - 4)}}{\dot{\omega}(\lambda_n(t))}\{2\lambda_n(t) + \mu_0 + \sum_{\ell=1}^{\infty}(\mu_{2\ell-1} + \mu_{2\ell} - 2\lambda_{\ell-1}(t))\} \qquad /3.6/$$

$$\frac{df_n(t)}{dt} = \frac{4\dot{\Delta}(\lambda_n(t))}{\dot{\omega}(\lambda_n(t))}\{2\lambda_n(t) + \mu_0 + \sum_{\ell=1}^{\infty}\mu_{2\ell-1} + \mu_{2\ell} - 2\lambda_{\ell-1}(t)\}. \qquad /3.7/$$

где μ_n - нули уравнения $\Delta^2(\lambda) - 4 = 0$, т.е. спектры периодической и антипериодической задач /1.1/ и /1.2/ с $q = q(x,t)$, а $q(x,t)$ - решение /3.1/; $\omega(\lambda)$ определяется формулой $/1.23/_1$.

<u>Доказательство</u>. Обозначим через $\tilde{L}^*$ оператор $\tilde{\Lambda}^*$ /1.19/ при $q_1 = q_2 = q(x)$:

$$\tilde{L}^* = \frac{1}{4}\{-D^2 + 4q(x) + q_x(x)\left(\int_0^x dy - \int_x^{\pi} dy\right)\}. \qquad /3.8/$$

Применяя оператор $4\tilde{L}^*$ к обеим сторонам /2.12/, где $q_x = q_x(x,t)$, $C_n^{-1} = C_n = \sqrt{\Delta^2(\lambda_n) - 4}$, вследствие спектрального разложения $/3.23/_1$ получаем

$$4\tilde{L}^* q_x = 6q(x,t)q_x(x,t) - q_{xxx}(x,t) - 2q_x(x,t)q(0,t) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\{4\lambda_n(t)\frac{\sqrt{\Delta^2(\lambda_n(t)) - 4}}{\dot{\omega}(\lambda_n(t))}\tilde{Q}_n'(x,t) - 8\lambda_n(t)\frac{\dot{\Delta}(\lambda_n(t))}{\dot{\omega}(\lambda_n(t))}\tilde{P}_n'(x,t)\}. \qquad /3.9/$$

Отсюда, учитывая равенства /2.11/ и /2.12/, находим, что

$$q_t - 6qq_x + q_{xxx} = \sum_{n=0}^{\infty} \{[\lambda_{n,t} - \frac{\sqrt{\Delta^2(\lambda_n) - 4}}{\dot{\omega}(\lambda_n)}(4\lambda_n + 2q(0,t))]\tilde{Q}_n'(x,t) - [f_{n,t} - 2\frac{\dot{\Delta}(\lambda_n)}{\dot{\omega}(\lambda_n)}(4\lambda_n + 2q(0,t))]\tilde{P}_n'(x,t)\}. \qquad /3.10/$$

Теперь для того, чтобы получить уравнения /3.6/ и /3.7/, следует воспользоваться тождеством следов /2.19/. Теорема доказана.

Замечание. Уравнения /3.7/ решаются по формулам /2.18/, которые определяют знак перед радикалом в /3.6/. В случае N-зонного потенциала $q(x,0)$, уравнения /3.6/ сводятся к конечной системе

$$\frac{d\lambda_n}{dt} = \frac{4\sqrt{R_N(\lambda_n(t))}}{(\lambda_0(t) - \lambda_n(t)) \prod_{\ell \neq n} (\lambda_\ell(t) - \lambda_n(t))}\{\dot{\mu}_0 + \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq n+1}}^{N-1} \mu_{2\ell-1} + \mu_{2\ell} - 2\lambda_{\ell-1}(t)\}, \qquad /3.11/$$

в которой полином $R_N(\lambda)$ определяется, как в /2.22/, которая, как хорошо известно, вместе с системой /2.22/ решается в явном виде посредством θ-функции /см., например, [7], гл.2, [9], гл.4, §4/. Система уравнений /3.6/ была получена иным путем в [6]. Решая совместно системы /2.22/ $(t \to x)$ и /3.11/, получаем, как показано в [7,9], искомое N-зонное решение уравнения КдВ

$$q(x,t) = \mu_0 + \sum_{j=1}^{N} (\mu_{2n-1} + \mu_{2n} - 2\lambda_{n-1}(x,t)). \qquad /3.12/$$

В заключение отметим, что изложенная выше схема построения гамильтоновых уравнений в переменных $\{\lambda_n, f_n\}$ легко обобщается на высшие уравнения КдВ. Так, например, для следующего за $H(q)$ /6.4/ гамильтониана

$$H_2(q) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\{q_{xx}^2(x) - 5q^2(x)q_{xx}(x) + 5q^4(x)\}dx$$

имеем

$$\frac{d}{dx}\frac{\delta H_2}{\delta q} = 16\tilde{L}^{*2}q_x(x) + 8q(0)\tilde{L}^{*}q_x(x) + 8q_x(x)(-q_{xx}(0) + 3q^2(0)).$$

Отсюда, выражая величины $q(0)$ и $-q_{xx}(0) + 3q^2(0)$ при помощи известных тождеств следов /см. [7], гл.2/, выводим, как в доказательстве теоремы 3.1, соответствующую систему уравнений /3.6/, /3.7/, явный вид которой из-за громоздкости здесь опускаем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Христов Е.Х. ОИЯИ, Р5-84-503, Дубна, 1984.
2. Левитан Б.М. Изв. АН СССР, сер.матем., 1978, т.42, №1, с.185-199.
3. Дубровин Б.А. Функциональный анализ, 1975, т.9, №3, с.41-51.
4. Trubowitz E. Comm.Pure Appl.Math., 1977, vol.30, p.321-337.
5. Солитоны. Сборник статей /под ред. Р.Буллофа, Ф.Кодри/. "Мир", М., 1983.
6. Flaschka H., McLaughlin Progr.Theor.Phys., 1976, vol.55, No.2, p.438-456.
7. Теория солитонов; метод обратной задачи. /Под ред.С.П.Новикова/. "Наука", М., 1980.
8. Ахиезер Н.И. ДАН СССР, 1961, т.141, №2, с.263-266.
9. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. "Наукова думка", Киев, 1977.
10. Рофе-Бекетов Ф.С. Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 1967, т.4, с.189.
11. Левитан Б.М. Труды Моск.матем.об-ва, 1982, т.45, с.2.

Рукопись поступила в издательский отдел
12 августа 1984 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

	Труды VI Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1978 /2 тома/	7 р. 40 к.
	Труды VII Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1980 /2 тома/	8 р. 00 к.
	Труды УШ Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Протвино, 1982 /2 тома/	11 р. 40 к.
Д11-80-13	Труды рабочего совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике, Дубна, 1979	3 р. 50 к.
Д2-81-543	Труды VI Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1981	2 р. 50 к.
Д10,11-81-622	Труды Международного совещания по проблемам математического моделирования в ядерно-физических исследованиях. Дубна, 1980	2 р. 50 к.
Д17-81-758	Труды II Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1981.	5 р. 40 к.
Р18-82-117	Труды IV совещания по использованию новых ядерно-физических методов для решения научно-технических и народнохозяйственных задач. Дубна, 1981.	3 р. 80 к.
Д2-82-568	Труды совещания по исследованиям в области релятивистской ядерной физики. Дубна, 1982.	1 р. 75 к.
Д9-82-664	Труды совещания по коллективным методам ускорения. Дубна, 1982.	3 р. 30 к.
Д3,4-82-704	Труды IV Международной школы по нейтронной физике. Дубна, 1982.	5 р. 00 к.
Д11-83-511	Труды совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1982.	2 р. 50 к.
Д7-83-644	Труды Международной школы-семинара по физике тяжелых ионов. Алушта, 1983.	6 р. 55 к.
Д2,13-83-689	Труды рабочего совещания по проблемам излучения и детектирования гравитационных волн. Дубна, 1983.	2 р. 00 к.
Д13-84-63	Труды XI Международного симпозиума по ядерной электронике. Братислава, Чехословакия, 1983.	4 р. 50 к.
Д2-84-366	Труды 7 Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1984.	4 р. 30 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79
Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

В Объединенном институте ядерных исследований начал выходить сборник *"Краткие сообщения ОИЯИ"*. В нем будут помещаться статьи, содержащие оригинальные научные, научно-технические, методические и прикладные результаты, требующие срочной публикации. Будучи частью "Сообщений ОИЯИ", статьи, вошедшие в сборник, имеют, как и другие издания ОИЯИ, статус официальных публикаций.

Сборник "Краткие сообщения ОИЯИ" будет выходить регулярно.

The Joint Institute for Nuclear Research begins publishing a collection of papers entitled *JINR Rapid Communications* which is a section of the JINR Communications and is intended for the accelerated publication of important results on the following subjects:

Physics of elementary particles and atomic nuclei.
Theoretical physics.
Experimental techniques and methods.
Accelerators.
Cryogenics.
Computing mathematics and methods.
Solid state physics. Liquids.
Theory of condenced matter.
Applied researches.

Being a part of the JINR Communications, the articles of new collection like all other publications of the Joint Institute for Nuclear Research have the status of official publications.

JINR Rapid Communications will be issued regularly.

Христов Е.Х. P5-84-504

О Λ-операторах для задачи Штурма-Лиувилля на конечном интервале. Конечно-зонные потенциалы и метод фурье-разложения по квадратам для уравнения Кортевега-де Вриза в периодическом случае

Получены разложения для $q_1(x) - q_2(x)$ и $q_1(x) + q_2(x)$ по произведениям решений уравнений Штурма-Лиувилля $y'' + (\lambda - q_j(x))y = 0$, $j = 1,2$, в случае конечно-зонных потенциалов $q_j(x)$. Построена схема метода разложения по квадратам /обобщенное преобразование Фурье/ для интегрирования уравнения КдВ с периодическими граничными условиями, из которой, в частности, вытекают некоторые известные результаты Дубровина, Трубовица, Флашки и Маклафлина. Работа является непосредственным продолжением статьи /1/.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод О.С.Виноградовой

Christov E.Ch. P5-84-504

On the Λ-Operators Associated with Sturm-Liouville Problem on Finite Interval. Finite-Gap Potentials and Method of Fourier Expansion over Squares for the Korteweg-de Vries Equation in the Periodic Case

Expansions are obtained for the $q_1 - q_2$ and $q_1 + q_2$ over products of solutions of Sturm-Liouville equations $y'' + (\lambda - q_j(x))y = 0$, $j = 1,2$ for the finite-gap potentials $q_j(x)$. A scheme of method of expansion over squares (generalized Fourier transformation) for the integrating the Korteweg-de Vries equation with periodic boundary conditions from which, in particular, follow a simple proof for some well known results of Dubrovin, Trubowitz, Flashka, McLaughlin. This paper is the second part of /1/.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984