сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P5-84-503

Е.Х.Христов

О Λ-ОПЕРАТОРАХ ДЛЯ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ.

Спектральная теория

1984

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим две самосопряженные задачи Штурма-Лиувилля

$$\ell_j y = (-D^2 + q_j(x))\, y = \lambda y \,(\, 0 \le x \le \pi),\quad y(0) = y(\pi) = 0, \quad j = 1,2, \qquad /0.1/$$

где вещественные потенциалы $q_j \in C^1 = C^1[0,\pi]$, $D = d/dx$. Обозначим через ϕ_j и ψ_j решения уравнения $\ell_j y = \lambda y$, для которых

$$\phi_j(0,\lambda) = \psi_j(\pi,\lambda) = 0, \quad \phi_j'(0,\lambda) = \psi_j'(\pi,\lambda) = 1 \quad (\,' = \frac{d}{dx}), \qquad /0.2/$$

и пусть

$$\omega_j(\lambda) = \phi_j(\pi,\lambda) = -\psi_j(0,\lambda) = W(\phi_j, \psi_j) \overset{\mathrm{def}}{=} \phi_j \psi_j' - \phi_j' \psi_j . \qquad /0.3/$$

Характеристические функции краевых задач /0.1/, множество нулей которых определяют их спектры, равны

$$\sigma_j = \{\lambda_n^{(j)} = \lambda_{2n+j} \mid \omega_j(\lambda_n^{(j)}) = 0\}_{n=0}^{\infty}, \ \lambda_n^{(j)} \underset{n\to\infty}{=} n^2 + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} q_j(x)\,dx + o(1) \qquad /0.4/$$

Известно /см.разд.1/, что функции

$$\Phi(x,\lambda) = \phi_1(x,\lambda)\,\phi_2(x,\lambda), \quad \Psi(x,\lambda) = \psi_1(x,\lambda)\,\psi_2(x,\lambda) \qquad /0.5/$$

удовлетворяют при любом $\lambda \in \mathbf{C}$ уравнениям

$$\Lambda_0 \Phi \overset{\mathrm{def}}{=} \tilde{\Lambda}^*_{\pi} D\Phi = \lambda D\Phi, \quad \Lambda_{\pi}\Psi \overset{\mathrm{def}}{=} \tilde{\Lambda}^*_0 D\Psi = \lambda D\Psi \qquad /0.6/$$

с оператором

$$\tilde{\Lambda}^*_{0(\pi)} = \tilde{\Lambda}^*_{x_0=0(\pi)} = \frac{1}{4}\{-D^2 + 2s(x) + s_x(x)\int_{x_0}^{x} dy - \Delta(x)\int_{x_0}^{x}\Delta(y)\,dy\int_{x_0}^{y} dz\}, \qquad /0.7/$$

где $s(x) = q_1(x) + q_2(x)$, $\Delta(x) = q_1(x) - q_2(x)$.

В настоящей работе центральное место занимает построение в пространстве $L_2 = L_2(0,\pi)$; $(f,g) = \int_0^{\pi} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx$ спектральной теории краевых задач

$$\tilde{\Lambda}^*_0 \tilde{Z}(x,\lambda) = \lambda \tilde{Z}(x,\lambda) \quad 0 \le x \le \pi, \quad \int_0^{\pi} \tilde{Z}(x,\lambda)\,dx = 0, \quad \tilde{Z}(\pi,\lambda) = 0, \qquad /0.8/$$

$$\tilde{\Lambda}^*_{\pi} \tilde{Z}(x,\lambda) = \lambda \tilde{Z}(x,\lambda) \quad 0 \le x \le \pi, \quad \int_0^{\pi} \tilde{Z}(x,\lambda)\,dx = 0, \quad \tilde{Z}(0,\lambda) = 0 \qquad /0.9/$$

и на этой основе - спектральной теории задачи

$$\tilde{\Lambda}^* \tilde{Z} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\tilde{\Lambda}^*_0 + \tilde{\Lambda}^*_\pi)\tilde{Z} = \lambda \tilde{Z}, \quad \int_0^\pi \tilde{Z}(x,\lambda)\,dx = 0, \quad \tilde{Z}(0,\lambda) = \tilde{Z}(\pi,\lambda). \qquad /0.10/$$

В §1 описана конструкция функции Грина для этих задач. В §2 методом контурного интегрирования получены формулы разложения по произведениям решений краевых задач /0.1/. Доказано, что они являются разложениями единицы для операторов $\tilde{\Lambda}^*_0$ и $\tilde{\Lambda}^*_\pi$ в

$$L_2^{(0)} = \{f(x) \mid f \in L_2, \ \int_0^\pi f(x)\,dx = 0\}. \qquad /0.11/$$

В разделе 3 сначала предложена схема, позволяющая по функциям порождающих разложений единицы для краевых задач /0.8/ и /0.9/ построить новые полные и минимальные в $L_1 = L_1(0,\pi)$ системы, которые в предельных случаях $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$ и $\sigma_1 = \sigma_2$ порождают симплектические относительно билинейной формы

$$[f, g] = (f, Dg) \qquad /0.12/$$

базисы в $L_2^{(0)}$. Далее показано, что при $\sigma_1 = \sigma_2$ соответствующее разложение дает искомое спектральное представление для оператора $\tilde{\Lambda}^*$.

Интерес к операторам, связанным с произведениями решений двух линейных спектральных задач и обычно называемым Λ-операторами, обусловлен, главным образом, их применениями в методе обратной задачи решения нелинейных эволюционных уравнений. Начало развития теории и приложений Λ-операторов было положено в известных работах Абловица, Каупа, Ньюэла, Сегюра, Колоджеро, Дегаспериса /см., например, [1]/, в дальнейшем эти исследования были продолжены, в частности, в работах [2-5]. Здесь рассматривались задачи на всей оси, в предположении, что соответствующие потенциалы достаточно быстро убывают при $x \to \pm\infty$. Для случая двух уравнений Шредингера соответствующий оператор $\Lambda = \tilde{\Lambda}^*_{x_0 = \pm\infty}$ и его спектральная теория изложены в [3].

Необходимые для этой работы сведения о краевой задаче /0.1/, которыми в дальнейшем пользуемся без ссылки, имеются в книге Марченко[6]. Ниже сохраняются все обозначения, введенные в этом пункте.

§1. ОПЕРАТОРЫ $(\tilde{\Lambda}^*_{0(\pi)} - \lambda I)^{-1}$, $(\tilde{\Lambda}^* - \lambda I)^{-1}$

Введем, наряду с оператором $\tilde{\Lambda}^*_{x_0}$, оператор

$$\tilde{\Lambda}_{x_0} = \frac{1}{4}\{-D^2 + 2s(x) - \int_{x_0}^x s_y(y)\,dy - \int_{x_0}^x \Delta(y)\,dy \int_{x_0}^y \Lambda(z)\,dz\}.$$

<u>Лемма 1.1.</u> /см., например, [7] /. При любом x_0 произведение $Y(x,\lambda) = y_1(x,\lambda)\, y_2(x,\lambda)$ любых двух решений уравнений $\ell_j y = \lambda y$ удовлетворяет уравнению

$$\tilde{\Lambda}_{x_0} Y(x,\lambda) = \lambda Y(x,\lambda) + B(x_0, x, \lambda),$$

где

$$B(x_0, x, \lambda) = -\frac{1}{4}\{W(y_1(x_0,\lambda), y_2(x_0,\lambda)) \int_{x_0}^x \Delta(y)\,dy +$$

$$+(2\lambda - s(x_0))Y(x_0,\lambda) + 2y_1'(x_0,\lambda)\, y_2'(x_0,\lambda)\}.$$

Положим здесь $Y = \Phi(x,\lambda)\,(\Psi(x,\lambda))$, $x_0 = 0(\pi)$. Вследствие /0.2/ имеем

$$\tilde{\Lambda}_0 \Phi(x,\lambda) = \lambda\Phi(x,\lambda) - \frac{1}{2}, \quad \tilde{\Lambda}_\pi \Psi(x,\lambda) = \lambda\Psi(x,\lambda) - \frac{1}{2}. \qquad /1.1/$$

Уравнения /0.6/ получаем с $\Phi(x,\lambda) = \int_0^x \Phi'(y,\lambda)\,dy$, $\Psi(x,\lambda) = -\int_x^\pi \Psi(y,\lambda)\,dy$.

<u>Замечание</u>. Если $q_1 = q_2$, уравнения /0.6/ являются прямым следствием того известного факта, что произведение $Y(x,\lambda)$ любых двух решений уравнения $\ell y = \lambda y$ является решением уравнения

$$LY \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{4}\{-D^3 + 4q(x)D + 2q_x(x)\}\, Y = \lambda DY. \qquad /1.2/$$

В дальнейшем операторы $\tilde{\Lambda}^*_{0(\pi)}$ будем рассматривать в пространстве L_2 с областями определения

$$\mathfrak{D}(\tilde{\Lambda}^*_{0(\pi)}) = \{f(x) \mid f \in C^2, \ \int_0^\pi f(x)\,dx = 0, \ f(\pi) = 0 \ (f(0) = 0)\}.$$

Вместе с $\tilde{\Lambda}^*_{0(\pi)}$ будем рассматривать и операторы Λ_0, Λ_π,

$$\mathfrak{D}(\Lambda_{0(\pi)}) = \{f(x) \mid f \in C^3, \ f(0) = f'(0) = f(\pi) = 0 \ (f(0) = f(\pi) = f'(\pi) = 0)\}.$$

Отметим, что из $f \in \mathfrak{D}(\tilde{\Lambda}^*_0)$ имеем $F(x) = -\int_x^\pi f(y)\,dy \in \mathfrak{D}(\Lambda_\pi)$, и, если $f \in \mathfrak{D}(\Lambda_\pi)$, то $f' \in \mathfrak{D}(\tilde{\Lambda}^*_0)$. При этом

$$\Lambda_\pi f = \tilde{\Lambda}^*_0 Df, \quad \Lambda_0 g = \tilde{\Lambda}^*_\pi Dg, \ \forall f, g \in C^3, \ f(\pi) = g(0) = 0, \qquad /1.3/$$

и для любых $f \in \mathfrak{D}(\Lambda_0)$, $g \in \mathfrak{D}(\Lambda_\pi)$

$$(\Lambda_0 f, g) = -(f, \Lambda_\pi g), \quad [\bar{\Lambda}_0 f, g] = [f, \bar{\Lambda}_\pi g] \qquad /1.4/$$

и

$$(\tilde{\Lambda}_{0(\pi)} f, g) = (f, \bar{\Lambda}_{0(\pi)} g), \quad f \in \mathfrak{D}(\tilde{\Lambda}^*_{0(\pi)}), \quad g \in \mathfrak{D}(\Lambda_{0(\pi)}). \qquad /1.5/$$

Рассмотрим теперь краевую задачу

$$\Lambda_\pi Y(x,\lambda) = \lambda D Y(x,\lambda), \quad Y(0) = Y(\pi) = Y'(\pi) = 0, \tag{/1.6/}$$

которая эквивалентна /0.8/ в том смысле, что, если при некотором λ функция $Y(x,\lambda)$ является решением задачи /1.6/, то функция $\tilde{Z}(x,\lambda) = Y'(x,\lambda)$ будет решением /0.8/ и наоборот, если $\tilde{Z}(x,\lambda)$ - решение /0.8/, то $Y(x,\lambda) = -\int_x^\pi Z(x,\lambda)dy$ - решение задачи /1.6/.

Введем функцию

$$C_\pi(x,y,\lambda) = -2\Omega^{-1}(\lambda)\{\Psi(x,\lambda)\Phi(y,\lambda)\theta(x-y) +$$
$$+ [\sum_{j=1,2} U_j(x,\lambda)U_{3-j}(y,\lambda) - \Phi(x,\lambda)\Psi(y,\lambda)]\theta(y-x)\}, \tag{/1.7/}$$

где $U_j(x,\lambda) = \phi_j(x,\lambda)\psi_{3-j}(x,\lambda)$, $\Omega(\lambda) = \omega_1(\lambda)\omega_2(\lambda)$.

<u>Теорема 1.1</u>. Интегральный оператор

$$R_\pi(\lambda, f)(x) = \int_0^\pi G_\pi(x,y,\lambda) f(y)\, dy \tag{/1.8/}$$

является при любом $\lambda \in \rho(\Lambda_\pi) = C \setminus \bigcup_{j=1,2} \sigma_j$ резольвентой оператора $\Lambda_\pi - \lambda D$, т.е.

$$R_\pi(\lambda,f)(x) \in \mathfrak{D}(\Lambda_\pi), \quad (\Lambda_\pi - \lambda D) R_\pi(\lambda,f)(x) = f(x), \quad \forall f \in C, \tag{/1.9/}$$

$$R_\pi(\lambda, (\Lambda_\pi - \lambda D) f)(x) = f(x), \quad \forall f \in \mathfrak{D}(\Lambda_\pi). \tag{/1.10/}$$

<u>Доказательство</u>. Из построения ядра G вытекает сразу, что при любом x $R_\pi(\lambda, f)(x)$ является регулярной функцией от $\lambda \in \rho(\Lambda_\pi)$, имеющей полюсы не выше второго порядка в точках $\lambda_n^{(j)} \in \sigma_j$, $j = 1,2$. При этом, вследствие /0.2/, $R_\pi(\lambda,f)(x)$ удовлетворяет краевым условиям в /1.6/ для любой $f \in L_1$. Заметим теперь, что из тождества

$$\frac{d}{dx} W(y_2(x,\lambda),\ y_1(x,\lambda)) = \Delta(x) y_1(x,\lambda) y_2(x,\lambda) \tag{/1.11/}$$

следует равенство

$$\int_x^\pi R_\pi(\lambda,f)(y)\Delta(y)\,dy = -2\Omega^{-1}(\lambda)\{\int_0^x \Phi(y)f(y)\,dy \int_x^\pi \Delta(y)\Psi(y)\,dy +$$
$$+ \sum_{j=1,2} \int_x^\pi U_j(y)f(y)\,dy \int_x^\pi \Delta(y)U_{3-j}(y)\,dy - \int_x^\pi \Psi(y)f(y)\,dy \int_x^\pi \Delta(y)\Phi(y)\,dy +$$
$$+ \sum_{j=1,2} (-1)^{3-j}\phi_j(\pi,\lambda)\int_x^\pi U_{3-j}(y)f(y)\,dy - W(\phi_1(\pi,\lambda),\phi_2(\pi,\lambda))\int_x^\pi \Psi(y)f(y)\,dy\}.$$

Далее, применяя оператор D^3 к функции $R_\pi = R_\pi(\lambda,f)(x)$, получаем с учетом уравнений /0.1/ и определения функций $\omega_j(\lambda)$ /0.3/, что

$$D^3 R_\pi = s_x(x)R_\pi + 2s(x)DR_\pi - 4\lambda DR_\pi - 4f(x) +$$
$$+ 2\Omega^{-1}(\lambda)\{W(\psi_1(x),\psi_2(x))\int_0^x \Phi(y)f(y)\,dy +$$
$$+ \sum_{j=1,2}(-1)^{3-j} W(\psi_j(x),\phi_{3-j}(x))\int_x^\pi U_j(y)f(y)\,dy - W(\phi_1(x),\phi_2(x))\int_x^\pi \Psi(y)f(y)\,dy\}.$$

Аналогично проверяется равенство /1.10/. Теорема доказана.

<u>Замечание 1</u>. Из этого доказательства следует, что $R_\pi(\lambda) = \overline{(\Lambda_\pi - \lambda D)^{-1}}$ и в случае произвольных комплекснозначных потенциалов $q_j(x) \in C^1$.

<u>Замечание 2</u>. Если $q_1 = q_2$, оператор $\Lambda_\pi = L$, и построение функций Грина для краевой задачи /1.6/ можно провести стандартным образом /см., например, [8] гл.VIII/. В работе Барселона [9] таким путем была построена функция Грина для задачи $LY = \lambda Dy$, $0 \le x \le \pi$, $Y(0) = Y'(0) = Y'(\pi) = 0$.

<u>Следствие</u>. Оператор $\tilde{R}_0^*(\lambda)$ определяется

$$\tilde{R}_0^*(\lambda) \overset{def.}{=} DR_\pi(\lambda) = (\tilde{\Lambda}_0^* - \lambda I)^{-1}, \quad \lambda \in \rho(\Lambda_\pi). \tag{/1.12/}$$

Аналогично устанавливается следующая

<u>Теорема 1.2</u>. При любом $\lambda \in \rho(\Lambda_\pi)$ оператор

$$R_0(\lambda,f)(x) = \int_0^\pi G_0(x,y,\lambda)f(y)\,dy, \quad G_0(x,y,\lambda) = -G_\pi(y,x,\lambda), \tag{/1.13/}$$

определяет резольвенту краевой задачи

$$\Lambda_0 Y(x,\lambda) = \lambda DY(x,\lambda), \quad Y(0) = Y'(0) = Y(\pi) = 0. \tag{/1.14/}$$

При этом

$$\tilde{R}_\pi^*(\lambda) \overset{def}{=} DR(\lambda) = (\tilde{\Lambda}_\pi^* - \lambda I)^{-1}, \quad \lambda \in \rho(\Lambda_\pi). \tag{/1.15/}$$

Введем теперь, наряду с оператором $\tilde{\Lambda}^*$, оператор

$$\Lambda = \frac{1}{2}(\Lambda_0 + \Lambda_\pi), \quad \mathfrak{D}(\Lambda) = \{f(x) \mid f \in C^3,\ f(0) = f(\pi) = 0,\ f'(0) = f'(\pi)\}. \tag{/1.16/}$$

Очевидно, если

$$f \in \mathfrak{D}(\tilde{\Lambda}^*) = \{f(x) \mid f \in C^2, \ \int_0^\pi f(x)\,dx = 0, \ f(0) = f(\pi)\}, \qquad /1.17/$$

то $F(x) = -\int_x^\pi f(y)\,dy \in \mathfrak{D}(\Lambda)$, и из $f \in \mathfrak{D}(\Lambda)$ имеем $f' \in \mathfrak{D}(\tilde{\Lambda}^*)$.
Отметим, что

$$\Lambda = \frac{1}{4}\{-D^3 + 2s(x)D + s_x(x) + \frac{1}{2}\Delta(x)(\int_x^\pi \Delta(y)\,dy - \int_0^x \Delta(y)\,dy\}, \qquad /1.18/$$

$$\tilde{\Lambda}^* = \frac{1}{4}\{-D^2 + 2s(x) + \frac{1}{2}s_x(x)(\int_0^x dy - \int_x^\pi dy) - \frac{1}{2}\Delta(x)(\int_0^x \Delta(y)\,dy \int_0^y dz + \int_x^\pi \Delta(y)\,dy \int_y^\pi dz)\}. \qquad /1.19/$$

Отсюда вытекают следующие равенства

$$\Lambda f = \tilde{\Lambda}^* Df, \quad \forall f \in C^3, \ f(0) = f(\pi) = 0, \quad (\Lambda f, g) = -(f, \Lambda g), \ \forall f, g \in \mathfrak{D}(\Lambda),$$

последнее из которых показывает, что Λ является антисимметрическим оператором. Отметим также соотношения

$$[\tilde{\Lambda} f, g] = [f, \tilde{\Lambda} g], \quad \tilde{\Lambda} = \frac{1}{2}(\tilde{\Lambda}_0 + \tilde{\Lambda}_\pi), \quad f, g \in \mathfrak{D}(\Lambda),$$

$$(\tilde{\Lambda}^* f, g) = (f, \tilde{\Lambda} g), \quad f \in \mathfrak{D}(\tilde{\Lambda}^*), \quad g \in \mathfrak{D}(\Lambda).$$

Теорема 1.3. Если краевые задачи /6.1/ изоспектральны, т.е. $\sigma_1 = \sigma_2$, то оператор

$$R(\lambda) = \frac{1}{2}(R_\pi(\lambda) + R_0(\lambda)), \quad \lambda \in \rho(\Lambda) = \mathbf{C} \setminus \sigma_1, \qquad /1.20/$$

является резольвентой краевой задачи

$$\Lambda Y(x, \lambda) = \lambda DY(x, \lambda), \quad Y(0) = Y(\pi) = 0, \quad Y'(0) = Y'(\pi), \qquad /1.21/$$

а оператор

$$\tilde{R}^*(\lambda) \overset{\text{def}}{=} DR(\lambda) = (\tilde{\Lambda}^* - \lambda I)^{-1}. \qquad /1.22/$$

Доказательство. Для того, чтобы получить эти утверждения, достаточно заметить, что условие $\sigma_1 = \sigma_2$ эквивалентно равенству $\omega_1(\lambda) = \omega_2(\lambda)$, $\lambda \in \mathbf{C}$, так как

$$\omega_j(\lambda) \equiv \phi_j(\pi, \lambda) = \pi(\lambda_0^{(j)} - \lambda) \prod_{n \geq 1} \frac{\lambda_n^{(j)} - \lambda}{n^2}, \qquad /1.23/$$

и далее применить схему доказательства теоремы 1.1.

§2. РАЗЛОЖЕНИЕ ЕДИНИЦЫ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ $\tilde{\Lambda}^*_{0(\pi)}$ И $\Lambda_{0(\pi)}$

Построим по спектрам σ_j краевых задач /0.1/ множества

$$\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2, \quad \sigma'' = \sigma_1 \cap \sigma_2, \quad \sigma' = \sigma \setminus \sigma''. \qquad /2.1/$$

Так как при $n \to \infty$ справедлива асимптотика /0.4/, будем считать, не ограничивая общности, что, если $\sigma' \neq \emptyset$, то из $\lambda_{2n+1} = \lambda_{2m+2}$ следует $n = m$. Введем системы функции $\{U_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{V_n\}_{n=1}^\infty$ следующим образом: при $\lambda_n \in \sigma'$ положим

$$U_n = \dot{\Omega}^{-1}(\lambda_n)\Phi(x, \lambda_n), \quad V_n = 2\Psi(x, \lambda_n), \qquad /2.2/$$

а при $\lambda_{(n)} = \lambda_{2n+1} = \lambda_{2n+2} \in \sigma''$ положим

$$U_{2n+1} = 2\ddot{\Omega}^{-1}(\lambda_{(n)})\Phi(x, \lambda_{(n)}), \quad U_{2n+2} = 2\ddot{\Omega}^{-1}(\Lambda_{(n)})\dot{\Phi}(x, \lambda_{(n)}), \qquad /2.3/$$

$$V_{2n+1} = 2\dot{\Psi}(x, \lambda_{(n)}) - 2\dddot{\Omega}(\lambda_{(n)})(3\ddot{\Omega}(\lambda_{(n)}))^{-1}\Psi(x, \lambda_{(n)}), \quad V_{2n+2} = 2\Psi(x, \lambda_{(n)}) \qquad /2.4/$$

где $\dot{} = \partial/\partial\lambda$. Отметим, что, так как в силу самосопряженности задач /0.1/ $\dot{\omega}_j(\lambda_{2n+j}) \neq 0$, то в /2.3/ $\dot{\Omega}(\lambda_n) \neq 0$, а в /2.3/, /2.4/ $\ddot{\Omega}(\lambda_{(n)}) \neq 0$. Напомним, что

$$W(y_1 y_2, z_1 z_2) = (\lambda - \mu)^{-1} \frac{d}{dx} \prod_{j=1,2} W(y_j, z_j), \qquad /2.5/$$

где y и z - решения уравнений $\ell_j y_j = \lambda y_j$, $\ell_j z_j = \mu z_j$. Полагая здесь $y_j = \phi_j(x, \lambda)$, $z_j = \psi_j(x, \mu)$, получаем, вследствие /0.3/, равенства

$$2[\Phi(\lambda), \Psi(\mu)] = -2[\Psi(\mu), \Phi(\lambda)] = (\lambda - \mu)^{-1}(\Omega(\lambda) - \Omega(\mu)),$$

из которых следует

Лемма 2.1. Система $\{U_n\}$ биортогонально сопряжена системе $\{V_n\}$, т.е.

$$[U_m, V_n] = -[V_n, U_m] = \delta_{m,n}, \quad n, m = 1, 2, \ldots. \qquad /2.6/$$

Далее из уравнений /0.6/, учитывая граничные условия /0.2/, и равенств

$$\phi_j(x, \lambda_{2n+j}) = C_{2n+j}\psi_j(x, \lambda_{2n+j}), \quad C_{2n+j} = \phi_j'(\pi, \lambda_{2n+j}) = (\psi_j'(0, \lambda_{2n+j}))^{-1} \qquad /2.7/$$

получаем, что справедлива

Лемма 2.2. Функции $U_n \in \mathfrak{D}(\Lambda_0)$, $V_n \in \mathfrak{D}(\Lambda_\pi)$, $U_n' \in \mathfrak{D}(\Lambda_\pi^*)$, $V_n' \in \mathfrak{D}(\tilde{\Lambda}_0^*)$. При этом, если $\lambda_n \in \sigma'$,

$$\Lambda_\pi V_n \equiv \tilde{\Lambda}_0^* V_n' = \lambda_n V_n', \quad \Lambda_0 U_n \equiv \tilde{\Lambda}_\pi^* U_n' = \lambda U_n',$$

а при $\lambda_{(n)} \in \sigma''$

$$\Lambda_\pi V_{2n+2} \equiv \tilde{\Lambda}_0^* V'_{2n+2} = \lambda_{(n)} V'_{2n+2}, \quad \Lambda_\pi V_{2n+1} \equiv \tilde{\Lambda}_0^* V'_{2n+1} = \lambda_{(n)} V'_{2n+1} + V'_{2n+2},$$

$$\Lambda_0 U_{2n+1} \equiv \Lambda_\pi^* U'_{2n+1} = \lambda_{(n)} U'_{2n+1}, \quad \Lambda_0 U_{2n+2} \equiv \Lambda_\pi^* U'_{2n+2} = \lambda_{(n)} U'_{2n+2} + U_{2n+1}.$$

Следствие. Спектр $\sigma(\Lambda_\pi) = \mathbb{C} \setminus \rho(\Lambda_\pi)$ краевой задачи /1.6/ //0.8// совпадает со спектром задачи /1.16/ //0.9// и $\sigma(\Lambda_\pi) = \sigma(\Lambda_0) = \sigma_1 \cup \sigma_2$, $\rho(\Lambda_\pi) = \rho(\Lambda_0)$ - область регулярности операторов $R_\pi(\lambda)$ $(\tilde{R}_0^*(\lambda))$ и $R_0(\lambda)(\tilde{R}_\pi^*(\lambda))$ /см. теоремы 1.1, 1.2/. Числа $\lambda_n \in \sigma'$ являются простыми собственными значениями, для которых $V_n(V'_n)$ и $U_n(U'_n)$ суть соответствующие собственные функции. Числа $\lambda_{(n)} \in \sigma''$ - двукратные собственные значения, для которых $V_{2n+2}(V'_{2n+2})$, $U_{2n+1}(U'_{2n+1})$ и $V_{2n+1}(V'_{2n+1})$, $U_{2n+2}(U'_{2n+2})$ - собственные и присоединенные функции краевых задач /1.6/ //0.8// и /1.14/ //0.9// соответственно.

Важный вопрос о базисности и полноте систем $\{U_n\}$ и $\{V_n\}$ решает следующая

Теорема 2.1 о разложении единицы для операторов $\Lambda_{0(\pi)}$, $\tilde{\Lambda}^*_{0(\pi)}$. Для любой, возможно комплекснозначной, функции $f \in L_1$ имеют место формулы разложения

$$-\int_x^\pi f(y)\,dy = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{2N} V_n(x)(f, U_n), \qquad /2.8/$$

$$\int_0^x f(y)\,dy = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{2N} -U_n(x)(f, V_n), \qquad /2.9/$$

где сходимость в /2.9/ равномерна по $x \in \Delta \subset (0,\pi]$, а в /2.10/ - при $x \in \Delta \subset [0,\pi)$. При этом, если $f \in L_2^{(0)}$, то по норме L_2

$$f(x) = \underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \sum_{n=1}^{2N} V'_n(x)(f, U_n), \qquad /2.10/$$

$$f(x) = \underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \sum_{n=1}^{2N} -U'_n(x)(f, V_n). \qquad /2.11/$$

Отсюда, учитывая лемму 2.1, получаем

Следствие. Системы $\{U_n\}$ и $\{V_n\}$ являются полными и минимальными в L_1, а системы $\{U'_n\}$ и $\{V'_n\}$ - полными и минимальными в $L_2^{(0)}$.

Доказательство теоремы 2.1 получим методом контурного интегрирования, следуя[10]. Пусть $\lambda = k^2$, и $\tilde{c}_N$ - окружность в k-плоскости с радиусом $N - 1/2$, c_N - ее образ в λ-плоскости. Равномерно по $x \in [0,\pi]$ при $|k| \to \infty$, $k = \sigma + i\tau$, имеют место асимптотики

$$\phi(x, k^2) = \frac{\sin kx}{k} + O\left(\frac{e^{|\tau| x}}{k^2}\right), \quad \psi(x, k^2) = \frac{\sin k(x-\pi)}{k} + O\left(\frac{e^{|\tau|(\pi - x)}}{k^2}\right),$$

и, если $k \in \tilde{c}_N$, $\omega^{-1}(k) = k \sin^{-1} k\pi (1 + O(k^{-1}))$. Разложения /2.8/, /2.11/ получаются подсчетом контурных интегралов

$$I_N(f;x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_N} R_\pi(\lambda, f(x)\,d\lambda, \quad I'_N(f;x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_N} \tilde{R}_0^*(\lambda, f)(x)\,d\lambda$$

по теореме о вычетах с учетом /2.8/ и сравнением полученных выражений с непосредственно подсчитанным по $\tilde{c}_N$ $\lim_{N\to\infty} I_N(f;x)$ $(I'_N(f;x))$ с использованием указанных выше асимптотик. Подробности соответствующих выкладок здесь опускаем, так как аналогичные расчеты подробно изложены в[10]. Отметим лишь, что подсчеты второго интеграла по контуру $\tilde{c}_N$ приводят к равенству

$$I'_N(f,x) = \sum_{n=1}^{2N-2} v_n(x)(f, u_n) \quad (N \to \infty),$$

где

$$u_{2n-1}(x) = \cos 2nx, \quad u_{2n}(x) = x \sin 2nx,$$

$$v_{2n-1}(x) = 4\pi^{-2}(\pi - x)\cos 2nx, \quad v_{2n}(x) = 4\pi^{-2} \sin 2nx.$$

Для того, чтобы получить в пределе $N \to \infty$ функцию $f(x)$, здесь следует воспользоваться критерием базисности В.А.Ильина[11]. Теорема доказана.

С помощью этой теоремы устанавливается

Теорема 2.2 /о спектральном разложении операторов Λ_π, Λ^*, $\tilde{\Lambda}_0^*(\Lambda_0, \tilde{\Lambda}_\pi^*)$/. Для любой $f \in \mathfrak{D}(\Lambda_\pi)$

$$\int_x^\pi \Lambda_\pi f(y)\,dy = \sum_{n=0}^{\infty} \Big\{ \sum_{j=1,2} \lambda_{2n+j} V_{2n+j}(x)[f, U_{2n+j}] + \delta_n V_{2n+2}(x)[f, U_{2n+1}] \Big\}, \qquad /2.12/$$

и, если $f \in \mathfrak{D}(\tilde{\Lambda}_0^*)$, $\Lambda_0^* f \in L_2^{(0)}$, то

$$\tilde{\Lambda}_0^* f(x) = \underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \sum_{n=0}^{N} \Big\{ \sum_{j=1,2} \lambda_{2n+j} V'_{2n+j}(x)(f, U_{2n+j}) + \qquad /2.13/$$

$$+\delta_n V'_{2n+2}(x)[f, U_{2n+1}]\},$$

где $\delta_n = \begin{cases} 0, & \lambda_n \in \sigma' \\ 1, & \lambda_n \in \sigma''. \end{cases}$

Доказательство. Из леммы 2.2 с учетом равенства /1.6/ имеем при $\lambda_{2n+j} \in \sigma'$, $\lambda_{2n+1} \in \sigma''$

$$(\Lambda_\pi f, U_{2n+j}) = -(\Lambda_0 U_{2n+j}, f) = -[f, U_{2n+j}],$$

а при $\lambda_{2n+2} \in \sigma''$

$$(\Lambda_\pi f, U_{2n+2}) = -\lambda_{2n+2}[f, U_{2n+2}] - [f, U_{2n+1}].$$

Отсюда разложение /2.12/ получается заменой в /2.8/ f на $\Lambda_\pi f$. Теорема доказана.

Замечание 1. Из приведенных в лемме 2.2 уравнений для функций V'_n следует, что формулу /2.13/ можно рассматривать как полученную путем применения оператора $\tilde{\Lambda}_0^*$ и - почленно применительно к разложению /2.10/, т.е.

$$\tilde{\Lambda}_0^* f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\Lambda}_0^* V'_n(x)(f, U_n), \quad f \in \mathfrak{D}(\tilde{\Lambda}_0^*), \ \tilde{\Lambda}_0^* f \in L_2^{(0)}.$$

Аналогичное утверждение для /2.12/ имеем, если наряду с $f \in \mathfrak{D}(\Lambda_\pi)$ потребовать $\Lambda_\pi f \in L_2^{(0)}$.

Замечание 2. Подсчитав, как и в доказательстве теоремы 2.1, контурный интеграл $(2\pi i)^{-1} \oint \tilde{R}_0^*(z, f)(x)(z-\lambda)^{-1} dz$, получаем следующее спектральное представление для резольвенты

$$\tilde{R}_0^*(\lambda, f)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1,2} \left\{ \frac{V'_{2n+j}(x)(f, U_{2n+j})}{\lambda_{2n+j} - \lambda} - \frac{\delta_n}{(\lambda_{2n+j} - \lambda)^2} V'_{2n+2}(x)(f, U_{2n+1}) \right\},$$

справедливое для $f \in L_1$, $\lambda \in \rho(\tilde{\Lambda}_0^*)$. Отсюда, вследствие равенства /1.12/ и леммы 2.2, получаем сразу формулу /2.10/ для любой $f \in \mathfrak{D}(\tilde{\Lambda}_0^*)$. В этом аспекте теорема 2.1 расширяет множество допустимых f, для которых имеют место приведенные разложения.

§3. СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ И СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРА $\tilde{\Lambda}^*$

Всюду в дальнейшем, не оговаривая это особо, будем предполагать, что при некотором $n_0 \geq 0$

$$\lambda_{2n+j} \in \sigma' \ (n \leq n_0), \quad \lambda_{2n+j} = \lambda_{(n)} \in \sigma'' \ (n > n_0). \qquad /3.1/$$

Сопоставим каждому $\lambda_{(n)} \in \sigma''$ пару функций

$$P_n(x) = 2\ddot{\Omega}^{-1}(\lambda_{(n)})\Psi(x, \lambda_{(n)}) = (2A_n)^{-1} U_{2n+1} = (2B_n)^{-1} V_{2n+2}, \qquad /3.2/$$

$$Q_n(x) = C_{2n+1} C_{2n+2} \dot{\Psi}(x, \lambda_{(n)}) - \dot{\Phi}(x, \lambda_{(n)}) = A_n V_{2n+1} - B_n U_{2n+2} + D_n P_n \qquad /3.3/$$

где $U_{2n+j}(x)$, $V_{2n+j}(x)$, $j = 1,2$, определяются формулами /2.3/,/2.4/, C_{2n+j} - те же, что и в /2.7/,

$$A_n = 2^{-1} C_{2n+1} C_{2n+2}, \quad B_n = 2^{-1} \ddot{\Omega}(\lambda_{(n)}), \quad D_n = (6A_n)^{-1} \dddot{\Omega}(\lambda_{(n)}).$$

Из /2.7/ следует, что при $\lambda_{(n)} \in \sigma''$ имеет место равенство

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1,2} V_{2n+j}(x) U_{2n+j}(y) - U_{2n+j}(x) V_{2n+j}(y) = Q_n(x) P_n(y) - P_n(x) Q_n(y). \qquad /3.4/$$

Отсюда, складывая разложения /2.8/, /2.9/ и /2.10/, /2.11/ соответственно, получаем, что справедлива следующая

Лемма 3.1. Для любой функции $f \in L_1$

$$\frac{1}{2}\left\{ \int_0^x f(y)\,dy - \int_x^\pi f(y)\,dy \right\} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{n_0} \sum_{j=1,2} \{V_{2n+j}(x)(f, U_{2n+j}) - U_{2n+j}(x)(f, V_{2n+j})\} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \{Q_n(x)(f, P_n) - P_n(x)(f, Q_n)\}; \qquad /3.5/$$

при этом, если $f \in L_2^{(0)}$,

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{n_0} \sum_{j=1,2} \{V'_{2n+j}(x)(f, U_{2n+j}) - U'_{2n+j}(x)(f, V_{2n+j})\} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \{Q'_n(x)(f, P_n) - P'_n(x)(f, Q_n)\}. \qquad /3.6/$$

Замечание. Имея в виду /3.4/, разложения /3.5/ и /3.6/, можно получить, подсчитав, как в доказательстве теоремы 1.1, контурные интегралы

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \{R_0(\lambda, f)(x) + R_\pi(\lambda, f)(x)\} d\lambda, \quad \frac{1}{2\pi i} \oint \{\tilde{R}_0^*(\lambda, f)(x) + \tilde{R}_\pi^*(\lambda, f)(x)\} d\lambda,$$

где $R_\pi(\lambda, f)$, $\tilde{R}_0^*(\lambda, f)$ и $R_0(\lambda, f)$, $\tilde{R}_\pi^*(\lambda, f)$ определяются равенствами /1.8/, /1.12/ и /1.13/, /1.15/.

В общем случае $n_0 \neq 0$ система функции

$$\{V_{2n+j}, U_{2n+j}\}_{n=0,\, j=1,2}^{n_0} \quad \{P_n, Q_n\}_{n=n_0+1}^{\infty},$$

по которой строятся разложения /3.5/, /3.6/, хотя и полная в L_1, но не минимальная. Для того, чтобы найти минимальную, нам понадобятся две леммы.

Лемма 3.2. При $\lambda_{2n+j} \in \sigma'$ справедливы представления

$$V_{2n+j}(x) = \sum_{\ell \le n_0} A^{(j)}_{n,\ell} U_{2n+3-j}(x) + \sum_{\ell > n_0} \tilde{A}^{(j)}_{n,\ell} P_\ell(x), \quad j = 1,2, \qquad /3.7/$$

$$U_{2n+j}(x) = \sum_{\ell \le n_0} \bar{B}^{(j)}_{n,\ell} V_{2n+3-j}(x) + \sum_{\ell > n_0} B^{(j)}_{n,\ell} P_\ell(x), \quad j = 1,2, \qquad /3.8/$$

а при $\lambda_{(n)} \in \sigma''$

$$-B_n U_{2n+2}(x) - A_n V_{2n+1}(x) = \sum_{\ell \le n_0} \sum_{j=1,2} D_{n,2\ell+j} U_{2\ell+j}(x) + \qquad /3.9/$$

$$+ \sum_{\substack{\ell > n_0 \\ \ell \neq n}} E_{n,\ell} P_\ell(x) = \sum_{\ell \le n_0} \sum_{j=1,2} F_{n,2\ell+j} V_{2n+j}(x) + \sum_{\substack{\ell > n_0 \\ n \neq \ell}} H_{n,\ell} P_\ell(x),$$

где A_n, B_n - те же, что в /3.2/, и все остальные коэффициенты отличны от нуля. В частности,

$$D_{n,2\ell+1} = \frac{C_{2n+1}\dot{\omega}_1(\lambda_{(n)})\omega_2(\lambda_{2\ell+1})}{C_{2\ell+1}(\lambda_{2\ell+1} - \lambda_{(n)})}, \quad F_{n,2\ell+1} = \frac{\dot{\omega}_1(\lambda_{(n)}) C_{2n+2} C_{2\ell+1}}{2\dot{\omega}_1(\lambda_{2\ell+1})(\lambda_{2\ell+1} - \lambda_{(n)})}. \qquad /3.10/$$

Доказательство можно получить из формул /2.8/ и /2.9/ с $f = U'_{2n+j}$, V'_{2n+j}, где коэффициенты разложения $[U_m, U_n]$, $[V_m, V_n]$ находим с помощью тождества /2.5/. Прямой вывод, минуя теоремы 1.1, получим, подсчитав контурные интегралы

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{U_{3-j}(k,\lambda)\, d\lambda}{(\lambda - \lambda_{2n+j})\,\omega_{3-j}(\lambda)}, \quad \frac{1}{2\pi i} \oint \sum_{j=1,2} C_{2n+3-j} \frac{U_j(x,\lambda)\,\dot{\omega}_j(\lambda_{(n)})}{(\lambda - \lambda_{(n)})\,\omega_j(\lambda)}\, d\lambda. \qquad /3.11/$$

Из этой леммы, в силу соотношений биортогональности /2.6/ и равенств /3.2/, /3.3/, получаем, что справедлива следующая

Лемма 3.3. Имеют место равенства

$$[V_{2n+1}, V_{2m+1}] = [U_{2n+1}, U_{2m+1}] = 0, \quad [U_{2n+1}, V_{2m+1}] = \delta_{n,m}, \quad n, m \le n_0,$$

$$[P_n, P_m] = 0, \quad [P_n, Q_m] = \delta_{n,m}, \quad [Q_n, Q_m] = A_{n,m}(1 - \delta_{n,m}), \; n, m > n_0, \qquad /3.12/$$

где

$$A_{n,m} = \frac{\dot{\omega}_2(\lambda_{(n)})\dot{\omega}_1(\lambda_{(m)}) - \dot{\omega}_1(\lambda_{(n)})\dot{\omega}_2(\lambda_{(m)})}{2(\lambda_{(m)} - \lambda_{(n)})} (C_{2n+1}C_{2m+2} - C_{2n+2}C_{2m+1}) \qquad /3.13/$$

и

$$[V_{2m+1}, P_n] = [U_{2m+1}, P_n] = 0, \qquad m \le n_0 < n, \qquad /3.14/$$

$$[V_{2m+1}, Q_n] = D_{n,2m+1}, \quad [U_{2m+1}, Q_n] = F_{n,2m+1}.$$

Теорема 3.1. В пространстве L_1 система функции

$$S = \{V_{2n+1}, U_{2n+1}, \; n = 0,1,\dots, n_0, \; P_n, Q_n, \; n = n_0 + 1, \dots\}$$

является полной и минимальной. При этом, если $N < \infty$, функция $f \in C^{(0)} = \{f(x) \mid f \in C, \int_0^\pi f(x)\,dx = 0\}$ представима однозначно в виде

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n_0} \{a^{(N)}_{2n+1} V'_{2n+1}(x) - b^{(N)}_{2n+1} U'_{2n+1}(x)\} + \sum_{n=n_0+1}^{N} \{c_n Q'_n(x) - d^{(N)}_n P'_n(x)\} \qquad /3.15/$$

тогда и только тогда, когда при $n \le N$

$$c_n = (f, P_n), \quad a^{(N)}_{2n+1} = (f, U_{2n+1}) - \sum_{m=n_0+1}^{N} c_m F_{m,2n+1},$$

$$b^{(N)}_{2n+1} = (f, V_{2n+1}) - \sum_{m=n_0+1}^{N} c_m D_{m,2n+1}, \qquad /3.16/$$

$$d^{(N)}_n = (f, Q_n) - \sum_{\substack{m=n_0+1 \\ n \neq m}}^{N} c_m A_{m,n} + \sum_{m=0}^{n_0} \{a^{(N)}_{2m+1} D_{n,2m+1} - b^{(N)}_{2m+1} F_{n,2m+1}\},$$

и при $n > N$ $c_n = 0$, $d^{(N)}_n = 0$, т.е.

$$(f, P_n) = 0, \quad (f, Q_n) = \sum_{\substack{m \neq n_0+1 \\ n \neq m}}^{N} c_m A_{m,n} + \sum_{m=0}^{n_0} \{a^{(N)}_{2m+1} D_{n,2m+1} - b^{(N)}_{2m+1} F_{n,2m+1}\}, \qquad /3.17/$$

где $D_{n,2m+1}$, $F_{n,2m+1}$ определяются из /3.10/, $A_{n,m}$ - из /3.13/.

Доказательство. Из /3.7/ и /3.8/ следует, что, если $(f, U_{2n+1}) = (f, V_{2n+1}) = (f, P_m) = 0$ $(n \le n_0 < m)$, то (f, U_{2n+2}) 0, $(f, V_{2n+2}) = 0$, $n = 0,1,\dots, n_0$. Отсюда, вследствие разложения /3.5/, получаем, что система S полна в L_1. Так как минимальность вытекает непосредственно из /3.15/, то для завершения доказательства остается проверить эту формулу. Пусть $f(x)$ представима в виде /3.15/. Тогда из леммы 3.3 получаем, что коэффициенты в этом разложении однозначно определяются по формулам /3.16/ и выполняются условия /3.17/. Далее обозначим через $g(x)$ сумму ряда в правой части равенства /3.15/, где коэффициенты справедливы из /3.16/, /3.17/. С помощью леммы 3.3 устанавливаем,что $(g, U_{2n+1}) = (f, U_{2n+1})$, $(g, V_{2n+1}) = (f, V_{2n+1})$ $(n=0,1,\dots,n_0)$и $(g, P_n) = (f, P_n)$, $(g, Q_n) = (f, Q_n)$, $n > n_0+1$. Следовательно, в силу уже доказанной полноты системы S, получаем $f=g$. Теорема доказана.

Обозначим через $S_0 = \{P_n, Q_n\}_{n=0}^{\infty}$, $S_\infty = \{V_{2n+1}, U_{2n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ системы функций, которые получаются из S при $n_0 = 0$ и $n_0 = \infty$ соответственно, что эквивалентно условиям $\sigma' = \phi$ и $\sigma'' = \phi$. Из леммы 3.3 следует, что эти системы являются симплектическими, т.е. функции V_{2n+1}, U_{2n+1} удовлетворяют при любом $n = 0,1,\dots$ равенства /3.12/, а для P_n, Q_n имеем

$$[P_n, P_m] = [Q_n, Q_m] = 0, \; [P_n, Q_m] = \delta_{n,m} \quad (\sigma' = \phi). \qquad /3.18/$$

В этих случаях вопрос о сходимости ряда /3.15/ при $N \to \infty$ решает следующая

Теорема 3.2. Для всякой функции $f \in L_2^{(0)}$ при $\sigma' = \phi$ имеет место разложение

$$f(x) = \underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \sum_{n=0}^{N} \{Q_n'(x)(f, P_n) - P_n'(x)(f, Q_n)\}, \qquad /3.19/$$

а при $\sigma'' = \phi$ - разложение

$$f(x) = \underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \sum_{n=0}^{N} \{V_{2n+1}'(x)(f, U_{2n+1}) - U_{2n+1}'(x)(f, V_{2n+1})\}. \qquad /3.20/$$

При этом, если $f \in L_1$, справедлива и следующая формула

$$\frac{1}{2}\{\int_0^x f(y)\,dy - \int_x^\pi f(y)\,dy\} = \sum_{n=0}^{\infty} \{Q_n(x)(f, P_n) - P_n(x)(f, Q_n)\}. \qquad /3.21/$$

В /3.19/, /3.20/ ряды сходятся по норме L_2, а в /3.21/ сходимость равномерна по $x \in \Delta \subset (0, \pi)$.

Доказательство формулы /3.19/ и /3.20/ получаем из /3.6/ и /3.5/ при $n_0 = 0$. Далее обозначим через $S_N^{(0)}(f; x)$ частную сумму ряда /3.20/, и пусть

$$\sigma_N(f; x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{\pi} \cos 2nx \int_0^\pi f(y) \cos 2ny\,dy + \frac{2}{\pi} \sin 2nx \int_0^\pi f(y) \sin 2ny\,dy$$

есть частная сумма ряда Фурье для $f \in L_2^{(0)}$. Разложение /3.2/ выводится непосредственно доказательством $\lim |S_N^{(0)}(f, x) - \sigma_N(f; x)| = 0$ при $N \to \infty$. Для этого следует воспользоваться известными асимптотическими формулами для собственных значений λ_n и решением $\phi(x, \lambda)$, $\psi(x, \lambda)$ уравнения $\ell y = \lambda y$, имея в виду, что, в силу теоремы 3.1, если ряд /3.20/ сходится, то его сумма должна быть $f(x)$. Соответствующие оценки сходны изложенным в [6] /см. доказательство теоремы 1.3.2/, и здесь их опускаем. Равномерная по $0 \le x \le \pi$ сходимость частных сумм $S_N^{(\infty)}(f; x)$ ряда /3.19/ с $\sigma_N(f; x)$ следует из равенств

$$\lim_{N\to\infty} S_N^{(\infty)}(f; x) = \lim_{N\to\infty} \oint_{c_N} \vec{R}^*(\lambda, f)(x)\,d\lambda = \lim_{N\to\infty} \sigma_N(f; x),$$

которые устанавливаются методом доказательства теоремы 1.1. Теорема доказана.

С помощью разложений /3.19/ и /3.21/ легко устанавливается следующая

Теорема 3.3 о спектральном разложении операторов $\tilde{\Lambda}^*$ и Λ. При условии $\sigma_1 = \sigma_2$ система функции $\{P_n', Q_n'\}_{n=0}^{\infty}$ является полной в $L_2^{(0)}$ системой собственных функций краевой задачи /0.10/, т.е. $P_n', Q_n' \in \mathfrak{D}(\tilde{\Lambda}^*)$,

$$\Lambda P_n = \tilde{\Lambda}^* P_n'(x) = \lambda_n, P_n'(x), \; \Lambda Q_n = \tilde{\Lambda}^* Q_n' = \lambda_n Q_n' \; (\lambda_n = \lambda_{(n)}), \qquad /3.22/$$

и, следовательно, /3.19/ - разложение единицы для оператора Λ^*. При этом

$$\tilde{\Lambda}^* f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \{Q_n'(x)(f, P_n) - P_n'(x)(f, Q_n)\}, \; f \in \mathfrak{D}(\tilde{\Lambda}^*), \tilde{\Lambda}^* f \in L_2^{(0)}. \qquad /3.23/$$

Аналогично, разложение /3.21/ дает разложение единицы оператора Λ /1.16/, и его спектральное разложение имеет следующий вид

$$\frac{1}{2}\{\int_0^x \Lambda f(y)\,dy - \int_x^\pi \Lambda f(y)\,dy\} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \{P_n(x)[f, Q_n] - Q_n(x)[f, P_n]\}, \qquad /3.24/$$
$$f \in \mathfrak{D}(\Lambda).$$

Доказательство. Уравнения /3.22/ для функции $P_n(x)$ следуют из уравнений /0.6/ и равенств /3.2/. Уравнения для Q_n проверяются непосредственно с помощью леммы 1.1 с учетом условия $\omega_1(\lambda) = \omega_2(\lambda)$ и равенства /2.7/. Равенства /3.23/ и /3.24/ выводятся, как и в теореме 2.2. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Солитоны. Сборник статей. /Под ред. Р.Буллафа, Ф.Кодри/. "Мир", М., 1983.

2. Герджиков В.С., Христов Е.Х. Болгарский физ.журн., 1980, т.7, №1, с.24-44.
3. Христов Е.Х. ОИЯИ, P5-80-831, Дубна, 1980; Дифференциальные уравнения, 1983, т.19, №9, с.1548-1557.
4. Gerdjikov V.S., Kulish P.P. Physica, 3D, 1981, p.549-564.
5. Герджиков В.С., Иванов М.И. Болгарский физ.журн., 1983, т.10, №1, с.13.
6. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. "Наукова думка", Киев, 1977.
7. Calogera F. Studies in Math.Phys. (Essays in of V.Bargman). Princeton, N.Y., 1976.
8. Коддингтон Э.А., Левенсон А. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. ИЛ, М., 1958.
9. Barcilon V. J.Math.Phys., 1974, vol.15, No.14, p.429-436.
10. Кирчев К.П., Христов Е.Х. Сибирский матем.журн., 1980, т.21, №3, с.98-109.
11. Ильин В.А. ДАН СССР, 1976, т.227, №4, с.796-799.

Рукопись поступила в издательский отдел
12 августа 1984 года.

Христов Е.Х. P5-84-503

О Λ-операторах для задачи Штурма-Лиувилля на конечном интеграле. Спектральная теория

Построена спектральная теория задач

$$\vec{\Lambda}^*_{0(\pi)} \vec{Z}(x,\lambda) = \lambda \vec{Z}(x,\lambda), \quad 0 \le x \le \pi, \quad \int_0^\pi \vec{Z}(x,\lambda)\,dx = 0, \quad \vec{Z}(\pi) = 0 \ (\vec{Z}(0) = 0),$$

где

$$\vec{\Lambda}^*_{x=0(\pi)} = -\frac{1}{4}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}s(x) + \frac{1}{4}s_x(x)\int_{x_0}^x dy - \frac{1}{4}\Delta(x)\int_{x_0}^x \Delta(y)\,dy \int_{x_0}^y dz,$$

$$s(x) = q_1(x) + q_2(x), \quad \Delta(x) = q_1(x) - q_2(x), \quad q_j(x) \in C^1[0,\pi]$$

- потенциалы самосопряженных задач Штурма-Лиувилля $y_{xx} + (\lambda - q(x))y = 0$, $y(0) = y(\pi) = 0$. На этой основе доказано, что, если задачи Штурма-Лиувилля изоспектральные, то собственные функции задачи

$$\vec{\Lambda}^* \vec{Z} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\vec{\Lambda}^*_0 + \vec{\Lambda}^*_\pi)\vec{Z} = \lambda\vec{Z}, \quad \int_0^\pi \vec{Z}(x,\lambda)\,dx = 0, \quad \vec{Z}(0) = \vec{Z}(\pi)$$

порождают симплектический базис в пространстве $L_2^{(0)} = \{f \in L_2(0,\pi), \int_0^\pi f(x)\,dx = 0\}$.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод О.С.Виноградовой

Christov E.Ch. P5-84-503

On the Λ-Operators Associated with the Sturm-Liouville Problem on the Finite Interval. Spectral Theory

The spectral theory is constructed for the following eigenvalue problems:

$$\vec{\Lambda}^*_{0(\pi)} \vec{Z}(x,\lambda) = \lambda \vec{Z}(x,\lambda), \quad 0 \le x \le \pi, \quad \int_0^\pi \vec{Z}(x,\lambda)\,dx = 0, \quad \vec{Z}(\pi) = 0 \quad (\vec{Z}(0) = 0),$$

where

$$\vec{\Lambda}_{x_0=0(\pi)} = -\frac{1}{4}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}s(x) + \frac{1}{4}s_x(x)\int_{x_0}^x dy - \frac{1}{4}\Delta(x)\int_{x_0}^x \Delta(y)\,dy \int_{x_0}^y dz,$$

$$s(x) = q_1(x) + q_2(x), \quad \Delta(x) = q_1(x) - q_2(x), \quad q_j(x) \in C^1[0,\pi]$$

are potentials in the selfadjoint Sturm-Liouville problems

$$y_{xx} + (\lambda - q_j(x))y = 0, \quad j = 1,2, \quad y(0) = y(\pi) = 0.$$

From here, we proved that the eifenfunctions of the problem

$$\vec{\Lambda}^* \vec{Z} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\vec{\Lambda}^* + \vec{\Lambda}^*)\vec{Z} = \lambda\vec{Z}, \quad \int_0^\pi \vec{Z}(x,\lambda)\,dx = 0, \quad \vec{Z}(0) = \vec{Z}(\pi)$$

are simplectic basis in the space $L_2^{(0)} = \{f \in L_2(0,\pi), \int_0^\pi f(x)\,dx = 0\}$.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984