объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р5-84-489

В.П.Гердт, А.Ю.Жарков, А.Б.Швачка

КЛАССИФИКАЦИЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ ТИПА УРАВНЕНИЙ КОРТЕВЕГА-ДЕ ВРИЗА

Направлено в "Letters in Mathematical Physics"

1984

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе получен полный, с точностью до преобразований $u = au$, $a \in c$, список интегрируемых уравнений 7-го и 9-го порядков типа уравнений Кортевега-де Вриза (KdV). Уравнением типа KdV n-го порядка будем называть уравнение вида

$$u_t = P(u, u_1, \ldots, u_n), \quad u_i \equiv D^i(u), \; D \equiv \frac{d}{dx} . \qquad /1/$$

где P - полином, такой, что $P \to \lambda^{n+2} P$ при $u \to \lambda^2 u$, $x \to \lambda x$.

При $n = 3$ существует только одно нелинейное интегрируемое уравнение вида /1/ - собственно уравнение KdV

$$u_t = u_3 + 3uu_1. \qquad /2/$$

В случае $n = 5$ кроме уравнения

$$u_t = u_5 + 5uu_3 + 10u_1u_2 + \frac{15}{2} u^2 u_1 , \qquad /3/$$

правая часть которого является симметрией уравнения /2/, известны еще два нелинейных интегрируемых уравнения типа KdV [1-3]

$$u_t = u_5 + 5uu_3 + 5u_1u_2 + 5u^2u_1, \qquad /4/$$

$$u_t = u_5 + 5uu_3 + \frac{25}{2} u_1u_2 + 5u^2u_1 . \qquad /5/$$

Уравнения /3/, /4/, /5/ обладают бесконечной серией нетривиальных законов сохранения и бесконечным набором симметрий. Известно также, что они не сводятся друг к другу преобразованиями Бэклунда

$$v = \phi(u, u_1, \ldots, u_m), \quad m \geq 1 \qquad /6/$$

и каждое из них в результате преобразований /6/ порождает свое семейство интегрируемых уравнений 5-го порядка общего вида. Поэтому классификацию эволюционных уравнений высших порядков естественно начать с исследования уравнений типа KdV. В настоящей работе мы рассматриваем только нечетные порядки уравнений / $n = 7,9$/ как наиболее интересный случай, поскольку не существует уравнений четного порядка, обладающих бесконечной серией нетривиальных законов сохранения [4].

2. МЕТОД КЛАССИФИКАЦИИ

Следуя [5], мы исходим из определения интегрируемости эволюционных уравнений. Назовем уравнение

$$u_t = F(u, u_1, \ldots, u_n) \qquad /7/$$

формально интегрируемым, если для него существует формальный ряд

$$L = \sum_{i=-\infty}^{1} a_i D^i, \quad a_i \equiv a_i(u, u_1, \ldots, u_{k_i}), \qquad /8/$$

удовлетворяющий операторному соотношению

$$\left[\frac{d}{dt} - F_*, L\right] = 0, \qquad /9/$$

где $F_* \equiv \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial F}{\partial u_i} D^i$, $\frac{d}{dt} \equiv \sum_{i=0}^{\infty} (D^i F) \frac{\partial}{\partial u_i}$.

В [4,5] показано, что класс формально интегрируемых уравнений включает все уравнения, обладающие бесконечной серией нетривиальных законов сохранения и бесконечным набором симметрий /напомним, что законом сохранения для уравнения /7/ называется соотношение $\frac{d}{dt} p(u, u_1, \ldots, u_k) = Dq(u, u_1, \ldots, u_{k+n-1})$, а симметрией называется функция $H(u, u_1, \ldots, u_m)$, такая, что $H_*(F) - F_*(H) = 0$/. Для формально интегрируемых уравнений оператор L порождает бесконечную серию законов сохранения вида [5]:

$$\frac{d}{dt} R_m = DQ_m, \quad R_m = \mathrm{Res}(L^m), \quad m = 1, 2, 3, \ldots, \qquad /10/$$

где $\mathrm{Res}(\sum a_i D^i) \equiv a_{-1}$.

Условия /10/ накладывают сильные ограничения на вид функции F. Выражая несколько первых плотностей R_m в терминах F и удовлетворяя условиям /10/, можно получить переопределенную систему уравнений на F и, решив ее, найти список эволюционных уравнений заданного порядка, включающий все формально интегрируемые уравнения.

Описанный метод классификации приводит к громоздким вычислениям, поэтому для их выполнения целесообразно использовать системы аналитических вычислений на ЭВМ [6]. В [7] были развиты соответствующие алгоритмы и реализованы в системе REDUCE-2 [8]. В настоящей работе мы использовали программу FORMINT [9] на языке системы аналитических вычислений PL/1-FORMAC [10], представляющей собой значительно более совершенную реализацию с точки зрения требуемой памяти и быстродействия. Программа FORMINT позволяет для заданного уравнения /7/ проверять условия формальной интегрируемости /10/, получать эквивалентные этим условиям уравнения на функцию F, находить симметрии и плотности законов сохранения.

3. КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ТИПА KdV 7-ГО ПОРЯДКА

Уравнения типа KdV 7-го порядка имеют следующий общий вид:

$$u_t = u_7 + \lambda_1 u u_5 + \lambda_2 u_1 u_4 + \lambda_3 u_2 u_3 + \lambda_4 u^2 u_3 + \lambda_5 u u_1 u_2 + \lambda_6 u_1^3 + \lambda_7 u^3 u_1, \quad \lambda_i \in C. \qquad /11/$$

С помощью программы FORMINT мы вычислили для уравнения /11/ плотности R_m при $m = 1, 3, 5, 7$:

$$R_1 = \lambda_1 u,$$

$$R_3 = \left(\frac{2}{7}\lambda_1^2 - \lambda_4\right) u^2,$$

$$R_5 = a_1 u_1^2 + a_2 u^3,$$

$$a_1 = -2\lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_1\lambda_3 - \lambda_2^2 - 7\lambda_5 + 21\lambda_6,$$

$$a_2 = 7\lambda_7 - 2\lambda_1\lambda_4 + \frac{3}{7}\lambda_1^3,$$

$$R_7 = b_1 u_2^2 + b_2 u u_1^2 + b_3 u^4,$$

$$b_1 = \lambda_1(5\lambda_1 - 3\lambda_2 + \lambda_3),$$

$$b_2 = \lambda_1(2\lambda_6 - 4\lambda_4),$$

$$b_3 = \lambda_1\lambda_7/2,$$

а также получили систему из 13 нелинейных алгебраических уравнений на константы λ_i, эквивалентную условиям /10/ с номерами $m = 1, 3, 5, 7$ /условия с четными номерами для уравнений /1/ выполняются автоматически/:

$$\lambda_1(\lambda_4 - \lambda_5/2 + \lambda_6) = 0,$$

$$\left(\frac{2}{7}\lambda_1^2 - \lambda_4\right)(-10\lambda_1 + 5\lambda_2 - \lambda_3) = 0,$$

$$\left(\frac{2}{7}\lambda_1^2 - \lambda_4\right)(3\lambda_4 - \lambda_5 + \lambda_6) = 0,$$

$$a_1(-3\lambda_1 + 2\lambda_2) + 21a_2 = 0, \qquad /12/$$

$$a_1(2\lambda_4 - 2\lambda_5) + a_2(-45\lambda_1 + 15\lambda_2 - 3\lambda_3) = 0,$$

$$2a_1\lambda_7 + a_2(12\lambda_4 - 3\lambda_5 + 2\lambda_6) = 0,$$

$$b_1(2\lambda_2 - \lambda_1) + 7b_2 = 0,$$

$b_1\lambda_3 + 7b_2 = 0\,,$

$b_1(-2\lambda_4 - 2\lambda_5) + b_2(2\lambda_2 - 8\lambda_1) + 84b_3 = 0\,,$

$b_1(\frac{8}{3}\lambda_5 + 6\lambda_6) + b_2(11\lambda_1 - \frac{17}{3}\lambda_2 + \frac{5}{3}\lambda_3) - 168b_3 = 0\,,$

$15b_1\lambda_7 + b_2(5\lambda_4 - 2\lambda_5) + b_3(-120\lambda_1 + 30\lambda_2 - 6\lambda_3) = 0\,,$

$-3b_1\lambda_7 + b_2(-\frac{\lambda_4}{2} + \frac{\lambda_5}{4} - \frac{\lambda_6}{2}) + b_3(24\lambda_1 - 6\lambda_2) = 0\,,$

$3b_2\lambda_7 + b_3(40\lambda_4 - 8\lambda_5 + 4\lambda_6) = 0\,.$

Непосредственное решение системы /12/ чрезвычайно затруднительно. Мы, однако, воспользуемся следующим методом, благодаря которому она легко решается. Будем фиксировать все возможные случаи, когда некоторые из плотностей R_m, $m = 1,3,5,7$ равны нулю с точностью до прибавления полной производной по x /соответствующие законы сохранения тривиальны/, а остальные отличны от нуля, и искать решения системы /12/ в каждом фиксированном случае. Оказывается, что при таком подходе проблема сводится, как правило, к последовательному решению простых линейных систем и в редких случаях - к решению квадратного уравнения. В таблице приведены все, с точностью до замен $u \to au$, эволюционные уравнения вида /11/, коэффициенты λ_i которых удовлетворяют системе /12/, а также соответствующие им характеристики законов сохранения /10/ для $m = 1,3,5,7$, /1 означает, что $R_m \neq 0$, 0 - что $R_m = 0$/.

Правые части уравнений /VII/,/VIII/, /IX/ являются симметриями 7-го порядка известных уравнений /2/, /4/, /5/ соответственно. С помощью программы FORMINT для уравнений /I/-/VI/ мы проверили условия /10/ с номерами $m = 9,11$. Оказалось, что уравнения /II/-/VI/ не удовлетворяют этим условиям, а уравнение /I/ удовлетворяет им только при $\alpha = \beta = \gamma = 0$, т.е. сводится к линейному уравнению $u_t = u_7$, у которого все законы сохранения /10/ тривиальны.

4. КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА KdV 9-ГО ПОРЯДКА

Уравнения типа KdV 9-го порядка имеют следующий общий вид:

$$u_t = u_9 + \lambda_1 uu_7 + \lambda_2 u_1 u_6 + \lambda_3 u_2 u_5 + \lambda_4 u_3 u_4 + \lambda_5 u^2 u_5 + \lambda_6 uu_1 u_4 + \lambda_7 uu_2 u_3 + \lambda_8 u_1^2 u_3 + \lambda_9 u_1 u_2^2 + \lambda_{10} u^3 u_3 + \lambda_{11} u^2 u_1 u_2 + \lambda_{12} uu_1^3 + \lambda_{13} u^4 u_1, \quad \lambda \in C. \qquad /13/$$

Таблица

Уравнения типа KdV 7-го порядка и характеристики их законов сохранения

	Уравнения	R_1	R_3	R_5	R_7
(I)	$u_t = u_7 + \alpha u_1 u_4 + \beta u_2 u_3 + (3\gamma - \frac{\alpha^2}{7}) uu_1 u_2 + \gamma u_1^3$	0	0	0	0
(II)	$u_t = u_7 + \alpha u_1 u_4 + 5\alpha u_2 u_3 + \beta u^2 u_3 + (\frac{\alpha^2}{14} + \frac{9\beta}{2}) uu_1 u_2 + (\frac{\alpha^2}{14} + \frac{3\beta}{2}) u_1^3, \ \beta \neq 0$	0	1	0	0
(III)	$u_t = u_7 + 7u_1 u_4 + \beta u_2 u_3 + (\beta - 35) uu_1 u_2 + \frac{(5\beta - 161)}{8} u_1^3 + \frac{7(37 - \beta)}{12} u^3 u_1$	0	0	1	0
(IV)	$u_t = u_7 + \alpha u_2 u_3 + u_1^3$				
(V)	$u_t = u_7 + 3u_1 u_4 + 15u_2 u_3 - \frac{2}{7} u^2 u_3 - \frac{2}{7} uu_1 u_2 + \frac{4}{7} u_1^3 - \frac{10}{49} u^3 u_1$	0	1	1	0
(VI)	$u_t = u_7 + u^2 u_3 + uu_1 u_2 - 2u_1^3$				
(VII)	$u_t = u_7 + 7uu_5 + 14u_1 u_4 + 21u_2 u_3 + 14u^2 u_3 + 42uu_1 u_2 + 7u_1^3 + \frac{28}{3} u^3 u_1$	1	0	1	1
(VIII)	$u_t = u_7 + 7uu_5 + \frac{49}{2} u_1 u_4 + 42u_2 u_3 + 14u^2 u_3 + 63uu_1 u_2 + \frac{35}{2} u_1^3 + \frac{28}{3} u^3 u_1$				
(IX)	$u_t = u_7 + 7uu_5 + 21u_1 u_4 + 35u_2 u_3 + \frac{35}{2} u^2 u_3 + 70uu_1 u_2 + \frac{35}{2} u_1^3 + \frac{35}{2} u^3 u_1$	1	1	1	1

С помощью программы FORMINT мы вычислили для уравнения /13/ плотности R_m при $m = 1,3,5,7,9$ и получили систему из 32 нелинейных алгебраических уравнений на параметры λ_i, эквивалентную соответствующим условиям /10/. Решение этой системы и дальнейшая проверка высших условий /10/ производится точно так же, как и в случае уравнений седьмого порядка. Опуская детали вычислений, приведем классификационный результат. Среди уравнений вида /13/ есть только два формально интегрируемых уравнения - линейное $u_t = u_9$ и уравнение

$$u_t = u_9 + 9uu_7 + 36u_1u_6 + 84u_2u_5 + 126u_3u_4 + \frac{63}{2}u^2u_5 + 189uu_1u_4 + 315uu_2u_3 + \frac{483}{2}u_1^2u_3 + \frac{615}{2}u_1u_2^2 + \frac{105}{2}u^3u_3 + 315u^2u_1u_2 + \frac{315}{2}uu_1^3,$$

правая часть которого является симметрией 9-го порядка уравнения /2/. Таким образом; мы получили, что интегрируемые нелинейные уравнения 7-го и 9-го порядков типа KdV исчерпываются симметриями известных уравнений /2/, /4/, /5/. Полученный результат подтверждает гипотезу о том, что это справедливо и в произвольном порядке.

Авторы выражают благодарность профессору А.Б.Шабату за предложенную тематику исследования и С.И.Свинолупову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sawada K., Kotera T. Progr.Theor.Phys., 1974, 51, p. 1355.
2. Caudrey P.J., Dodd R.K., Gibbon J.D. Proc.R.Soc.London, 1976, A351, p. 407.
3. Kaup J.D. Studies in Appl.Math., 1980, 62, p. 189.
4. Свинолупов С.И., Соколов В.В. Функциональный анализ, 1982, 16, с. 86.
5. Ибрагимов Н.Х., Шабат А.Б. Функциональный анализ, 1980, 14, с. 79.
6. Гердт В.П., Тарасов О.В., Ширков Д.В. УФН, 1980, 130, с. 113.
7. Жарков А.Ю., Швачка А.Б. ОИЯИ, Р11-83-914, Дубна, 1983.
8. Hearn A.C. REDUCE User's Manual, Second ed., Univ. of Utah, 1973.
9. Gerdt V.P., Shvachka A.B., Zharkov A.Yu. JINR, E11-84-400, Dubna, 1984.
10. Bahr K.A. FORMAC 73 User's Manual, GMD/IFV, Darmstadt, 1973.

Рукопись поступила в издательский отдел
10 июля 1984 года.

Гердт В.П., Жарков А.Ю., Швачка А.Б. Р5-84-489
Классификация интегрируемых уравнений высших порядков типа уравнений Кортевега-де Вриза

Представлены результаты классификации формально интегрируемых уравнений 7-го и 9-го порядков типа уравнений Кортевега-де Вриза. Показано, что среди уравнений указанного класса нет новых интегрируемых уравнений. Вычисления проводились с помощью программы FORMINT на языке системы аналитических вычислений PL/1-FORMAC.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод авторов

Gerdt V.P., Shvachka A.B., Zharkov A.Yu. P5-84-489
Classification of Integrable High-Order KdV-Like Equations

The results of classification of formally integrable 7-th and 9-th order Korteveg-de Vries (KdV)-like equations are presented. It is shown that there are no integrable one among the given class of equations. The calculations have been performed with the help of FORMINT code written on computer algebra systems PL/1-FORMAC language.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984