9/IV-84

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

1694/84

Р5-84-47

С.И.Сердюкова

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ИССЛЕДОВАНИИ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Направлено на конференцию по численным методам и приложениям /София, 27 августа - 2 сентября 1984 г./

1984

Метод конечных разностей широко используется в прикладных расчетах, связанных с решением дифференциальных уравнений. Этот метод прост и экономичен в реализации на ЭВМ. Основная трудность состоит в устранении различного рода неустойчивых явлений, наблюдаемых при счете. Прикладные задачи, как правило, слишком сложны, чтобы заранее можно было исследовать устойчивость используемых численных алгоритмов. Обычно численные алгоритмы корректируются в процессе счета. При этом важную роль играет моделирование наблюдаемых явлений неустойчивости на простейших уравнениях. Там, где на модельных задачах удается понять механизм возникновения неустойчивости, как правило, удается найти пути ее устранения в реальном счете. Речь идет об асимптотических методах исследования устойчивости задачи Коши и краевых задач для систем линейных разностных уравнений. Рассматриваемому классу принадлежит широкий круг известных модельных задач. Асимптотические методы позволили до конца понять механизм возникновения неустойчивости разностных уравнений. При этом были решены задачи, представляющие самостоятельный интерес. Остановимся подробнее на результатах, полученных в теории устойчивости разностных уравнений с помощью асимптотических методов.

Получены необходимые и достаточные условия устойчивости задачи Коши в равномерной метрике для систем линейных разностных уравнений /1/. Задача сводится к исследованию условий ограниченности в L_1 полугруппы аналитических матриц: $\|\mathfrak{M}^n(e^{i\phi})\| \leq c$, $n \geq 0$. В случае неустойчивости получены точные по порядку оценки скорости роста степеней оператора перехода от слоя к слою. Если задача Коши устойчива в L_2, порядок неустойчивости в C определяется параметрами разложения собственных значений характеристической матрицы в окрестности определяющих точек.

Построена асимптотика численного решения в окрестности изолированного разрыва - /асимптотика "разностной ступеньки"/ /2/. Задача сводится к построению асимптотик интегралов с точками перевала, падающими на полюс:

$$\int\limits_{|z|=1+\rho} \frac{f^n(z)}{(z-1)} z^{\nu} dz, \quad n \to \infty, \quad \nu = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots .$$

$f(z)$ - произвольная аналитическая функция, не превосходящая по модулю I на единичной окружности: $|f(z)| \leq 1$, $|z| = 1$. Из полученных результатов, в частности следует, что для простейшего гиперболического уравнения $u_t = u_x$ все схемы нечетного порядка точности, имеющие единственную определяющую точку $z = 1$, устойчивы в C и пригодны для счета разрывных решений. Все схемы четного порядка точности неустойчивы в C и приводят к сильным "паразитическим осцилляциям" в окрестности разрывов. Получены точные по порядку оценки уклонения "разностной ступеньки" от ступеньки в метрике L_1. "Паразитические осцилляции" локализуются в окрестности характеристики дифференциального уравнения и в окрестности "ложных характеристик". Величина уклонения "разностной ступеньки" от ступеньки, наклон "ложных характеристик" и ширина зоны размывания изолированного разрыва зависят от параметров разложения характеристической функции в окрестности определяющих точек.

Получены необходимые и достаточные условия устойчивости в L_2 полубесконечных разностных краевых задач /3/. Получены точные по порядку оценки неустойчивости - оценки норм степеней оператора перехода от слоя к слою. В процессе доказательства исследованы свойства резольвентной матрицы, получена ее нормальная форма. Построены аналитические краевые матрицы, зависящие от исходных краевых условий и блоков нормальной формы резольвентной матрицы. Если оператор перехода от слоя к слою разностной краевой задачи не имеет точек спектра вне единичного круга, условия устойчивости формулируются в виде ограничений на порядки особенностей элементов краевых матриц в точках единичной окружности. Степень неустойчивости зависит от порядков особенностей элементов краевых матриц и параметров разложения собственных значений резольвентной матрицы в окрестности определяющих точек. Доказательство связано с построением асимптотик интегралов

$$\int\limits_{|z|=1+\rho} (z-1)^{-\xi}\, \mathfrak{M}^{\nu}(z)\, z^n\, dz, \quad n \to \infty, \quad \nu \geq 1.$$

В отличие от предыдущего здесь ξ -произвольное положительное, $\mathfrak{M}(z)$ - произвольная аналитическая матрица.

Для гиперболических уравнений выделен класс разностных схем, обладающих свойствами, близкими к оптимальным /4/. Такими свойствами обладают разностные схемы максимального нечетного порядка точности $2k-1$, написанные по несимметричному четному набору точек. С уменьшением шага сетки порядок точности схемы должен расти по логарифмическому закону $k = O(\ln h^{-1})$. Получены асимптотические оценки разностной функции Грина и "разностной ступеньки", близкие к оптимальным. Трудность по сравнению со случаем постоянных k состоит в том, что в рассматриваемом случае асимптотика определяется совокупностью точек перевала, которые сближаются при $h \to 0$. Главные члены асимптотики получаются суммированием асимптотических вычетов по методу Абеля. Для ограниченных k асимптотика определяется двумя изолированными точками перевала.

Исследование тонких явлений неустойчивости связано с оценками функции Грина и "разностной ступеньки". В случае постоянных коэффициентов, используя преобразование Фурье, без труда получаем интегральное представление функции Грина и "разностной ступеньки":

$$\Gamma_\nu^n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1} f^n(z)\, z^\nu\, dz, \qquad G_\nu^n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1+\rho} \frac{f^n(z)}{(z-1)}\, z^\nu\, dz,$$

$f(z)$ - характеристическая функция. В случае разностных уравнений с переменными коэффициентами метод Фурье неприменим, и у нас нет столь простого интегрального представления функции Грина и "разностной ступеньки". Однако и в этом случае задача сводится к оценке интегралов. Степени оператора перехода от слоя к слою могут быть представлены в виде интеграла от резольвенты

$$G^n = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} (G - zI)^{-1}\, z^n\, dz.$$

Контур Γ охватывает все точки спектра оператора G, особые точки резольвенты $(G - zI)^{-1}$. Используя нормальную форму резольвентной матрицы, удается найти явный вид резольвенты. Резольвентная матрица имеет выделенное собственное значение $\kappa_\nu(z)$, $\kappa_\nu(1) = 1$. Выделенное собственное значение является обратной функцией характеристической функции $f(z, x)$ при $x = \nu \cdot h$. Задача об оценке функции Грина и "разностной ступеньки" сводится /5/ к оценке интегралов

$$\int\limits_{\Gamma} \kappa_\nu \kappa_{\nu-1} \cdots \kappa_1 z^n\, dz, \qquad \int\limits_{\Gamma} (\kappa_\nu + \kappa_\nu \kappa_{\nu-1} + \dots + \kappa_\nu \kappa_{\nu-1} \cdots \kappa_1)\, z^n\, dz$$

соответственно. Здесь предполагается, что $|\kappa_\nu(z)| \leq 1$, $|z| = 1$. Если $|\kappa_\nu(z)| > 1$, $|z| = 1$, вместо $\kappa_1, \dots, \kappa_\nu$ в обоих интегралах берем $\kappa_1^{-1}, \dots, \kappa_\nu^{-1}$. На таком пути удается перенести все полученные результаты на случай разностных уравнений с липшиц-непрерывными по x коэффициентами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сердюкова С.И. ДАН СССР, 1967, 173, №3, с. 526-528.
2. Сердюкова С.И. ЖВМ и МФ, 1971, 11, №2, с. 411-424.
3. Сердюкова С.И. ДАН СССР, 1973, 208, №1, с. 52-55.
4. Сердюкова С.И. Математические заметки, октябрь 1982, т. 32, вып.4, с. 517-528.
5. Сердюкова С.И. ЖВМ и МФ, 1984, №6; ОИЯИ, Р5-82-734; Р5-82-735, Дубна, 1982.

Рукопись поступила в издательский отдел
27 января 1984 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

	Труды VI Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1978 /2 тома/	7 р. 40 к.
	Труды VII Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц, Дубна, 1980 /2 тома/	8 р. 00 к.
Д11-80-13	Труды рабочего совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике, Дубна, 1979	3 р. 50 к.
Д4-80-271	Труды Международной конференции по проблемам нескольких тел в ядерной физике. Дубна, 1979.	3 р. 00 к.
Д4-80-385	Труды Международной школы по структуре ядра. Алушта, 1980.	5 р. 00 к.
Д2-81-543	Труды VI Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1981	2 р. 50 к.
Д10,11-81-622	Труды Международного совещания по проблемам математического моделирования в ядерно-физических исследованиях. Дубна, 1980	2 р. 50 к.
Д1,2-81-728	Труды VI Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1981.	3 р. 60 к.
Д17-81-758	Труды II Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1981.	5 р. 40 к.
Д1,2-82-27	Труды Международного симпозиума по поляризационным явлениям в физике высоких энергий. Дубна, 1981.	3 р. 20 к.
Р18-82-117	Труды IV совещания по использованию новых ядерно-физических методов для решения научно-технических и народнохозяйственных задач. Дубна, 1981.	3 р. 80 к.
Д2-82-568	Труды совещания по исследованиям в области релятивистской ядерной физики. Дубна, 1982.	1 р. 75 к.
Д9-82-664	Труды совещания по коллективным методам ускорения. Дубна, 1982.	3 р. 30 к.
Д3,4-82-704	Труды IV Международной школы по нейтронной физике. Дубна, 1982.	5 р. 00 к.
Д2,4-83-179	Труды ХУ Международной школы молодых ученых по физике высоких энергий. Дубна, 1982.	4 р. 80 к.
	Труды УШ Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Протвино, 1982 /2 тома/	11 р. 40 к.
Д11-83-511	Труды совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1982.	2 р. 50 к.
Д7-83-644	Труды Международной школы-семинара по физике тяжелых ионов. Алушта, 1983.	6 р. 55 к.
Д2,13-83-689	Труды рабочего совещания по проблемам излучения и детектирования гравитационных волн. Дубна, 1983.	2 р. 00 к.

**Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79
Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований**

Сердюкова С.И. Р5-84-47

Асимптотические методы в исследовании устойчивости разностных уравнений

На случай разностных уравнений с липшиц-непрерывными по x коэффициентами переносятся необходимые и достаточные условия устойчивости задачи Коши и краевых задач для систем линейных разностных уравнений. Для разностных уравнений с липшиц-непрерывными коэффициентами справедливы также асимптотические оценки в окрестности изолированного разрыва решения дифференциального уравнения. Степени оператора перехода от слоя к слою могут быть представлены в виде интеграла от резольвенты. Используя нормальную форму резольвентной матрицы, получаем явный вид резольвенты. Задача об оценке функции Грина и "разностной ступеньки" сводится к оценке интегралов от произведений выделенных собственных значений резольвентной матрицы, которые являются обратными функциями собственных значений характеристической матрицы при различных x.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод О.С.Виноградовой

Serdyukova S.I. P5-84-47

Asymptotic Methods in the Investigation of the Stability of Difference Equations

On the case of difference schemes with lipshitz-continuous coefficients in x there are spreaded the necessary and sufficient conditions of stability of the Cauchy problem and boundary value problem for systems of linear difference equations. For the case of lipschitz-continuous coefficients in x there are true also the asymptotic estimates of numerical solution in the vicinity of the isolated discontinuity of the solution of differential equation. The powers of the operator of transition from layer to layer can be represented by the integral of resolvent. Using the normal form of resolvent matrix, we get the explicit view of resolvent. The problem of estimates of Green's function and difference step function is reduced to estimate of the integrals of the products of distinguished eigenvalues of resolvent matrix which are the inverse functions of eigenvalues of characteristic matrix.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984