объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р5-84-449

Ву Суан Минь, Е.П.Жидков, В.Г.Кадышевский

О РЕШЕНИЯХ РЕЛЯТИВИСТСКИХ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНЫХ РАДИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Направлено в журнал
"Теоретическая и математическая физика"

1984

ВВЕДЕНИЕ

В последние 20 лет после пионерской работы А.А.Логунова и А.Н.Тавхелидзе /1/ в литературе широко обсуждаются трехмерные релятивистские уравнения квазипотенциального типа /2-10/. Нас будут интересовать здесь одномерные радиальные уравнения, к которым в релятивистском конфигурационном пространстве /4/ сводятся квазипотенциальные уравнения для двух частиц одинаковых масс, полученные в /1-5/.

$$[-(\frac{H_0^{rad}}{2})^2 + E_q^2 - V(r;E_q)]\psi_\ell(q,r) = 0\,, \qquad /1/$$

$$[-\frac{H_0^{rad}}{2}(\frac{H_0^{rad}}{2} - E_q) - \frac{1}{2}V(r;E_q)]\psi_\ell(q,r) = 0\,, \qquad /2/$$

$$[-H_0^{rad} + 2E_q - V(r;E_q)]\psi_\ell(q,r) = 0\,. \qquad /3/$$

Фигурирующий здесь оператор

$$H_0^{rad} = 2mc^2 \operatorname{ch}(\frac{i\hbar}{mc}\frac{d}{dr}) + \frac{\hbar^2\ell(\ell+1)}{mr(r+\frac{i\hbar}{mc})}\exp(\frac{i\hbar}{mc}\frac{d}{dr}) \qquad /4/$$

представляет собой радиальную часть релятивистского гамильтониана,

$$E_q = c\sqrt{m^2c^2 + q^2} \qquad /5/$$

– энергия одной частицы в системе центра масс, а $V(r;E_q)$ – квазипотенциал.

При определенном выборе квазипотенциала для рассматриваемых уравнений были найдены как точные /2-14/, так и приближенные решения /15,16/.

Квазипотенциальные уравнения /1/-/2/ и /3/ можно трактовать либо как линейные уравнения в конечных разностях четвертого и второго порядка соответственно, либо как дифференциальные уравнения бесконечного порядка /17/. При втором подходе, которого мы здесь будем придерживаться, приходится иметь дело с бесконечным числом линейно-независимых решений. Если рассматривать в качестве приближения к /1/-/3/ дифференциальные уравнения конечного порядка, то число их линейно-независимых решений все равно будет достаточно велико. Заметим, что в обоих этих случаях естественно опираться на множество фундаментальных решений.

В предлагаемой работе для изучения квазипотенциальных радиальных уравнений применен известный подход[18], развитый при исследовании систем дифференциальных уравнений конечного порядка. Чтобы лучше разъяснить его суть, мы ограничимся рассмотрением уравнения /3/ при $\ell = 0$ /S -волна/ в системе единиц $m = \hbar = 1$

$$L(\psi, q) = [2c\sqrt{q^2 + c^2} - 2c^2 \operatorname{ch}(\frac{i}{c}\frac{d}{dr})]\psi(q, r) = V(r; E_q)\psi(q, r) . \qquad /6/$$

При этом будем считать, что квазипотенциал $V(r; E_q)$ удовлетворяет условиям

$$\int_0^r t|V(t; E_q)|dt < \infty , \qquad /7/$$

$$\int_r^\infty \exp(\kappa t)\,|V(t; E_q)|dt < \infty \qquad /8/$$

для любого $r > 0$ и $\kappa > 0$.

1. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

При $V(r; E_q) = 0$ уравнение /6/ становится свободным. Его характеристический многочлен имеет вид

$$\ell(\mu, q) = 2c\sqrt{q^2 + c^2} - 2c^2 \cos(\frac{\mu}{c}). \qquad /9/$$

Вводя замену

$$\mu = c\xi , \qquad /10/$$

получим

$$\ell(\xi, q) = 2c\sqrt{q^2 + c^2} - 2c^2 \cos\xi . \qquad /11/$$

Если a является кратным корнем многочлена $\ell(\xi, q)$, то

$$2c\sqrt{q^2 + c^2} - 2c^2\cos a = 0, \qquad \frac{d\ell(\xi, q)}{d\xi}\Big|_{\xi = a} = 2c^2 \sin a = 0 .$$

Отсюда вытекает, что для $q \neq 0$ $\ell(\xi, q)$ не имеет кратных корней, а при $q = 0$ все корни $\ell(\mu, 0)$ имеют кратность, равную двум.

Из /11/ следует, что при $q \neq 0$ основной корень многочлена $\ell(\xi, q)$ является мнимым числом, которое мы обозначим через $ia(q)$:

$$ia(q) = \arccos\sqrt{(\frac{q}{c})^2 + 1} . \qquad /12/$$

Далее, учитывая /10/ и четность многочлена $\ell(\mu, q)$, получим лемму.

Лемма 1. Для любого $q \neq 0$ корни характеристического многочлена $\ell(\mu, q)$ являются невырожденными и образуют последовательность

$$\pm ia(q)c, \quad \pm (ia(q) \pm 2\pi)c, \ \ldots, \pm (ia(q) \pm 2k\pi)c, \ \ldots , \qquad /13/$$

при $q = 0$ все корни $\ell(\mu, 0)$ имеют кратность, равную двум, и образуют последовательность

$$0, \pm 2\pi c, \ \ldots, \pm 2k\pi c, \ \ldots . \qquad /14/$$

Следовательно, множество фундаментальных решений свободного уравнения $L(\psi, q) = 0$ при $q \neq 0$ составляет последовательность

$$\exp(\pm ia(q)cr), \ \exp(\pm(ia(q) \pm 2\pi)cr), \ldots, \exp(\pm(ia(q) \pm 2k\pi)cr), \ldots , \qquad /15/$$

а при $q = 0$

$$1, r, \exp(\pm 2\pi cr), \ r\exp(\pm 2\pi cr), \ldots, \exp(\pm 2k\pi cr), \ r\exp(\pm 2k\pi cr), \ \ldots . \qquad /16/$$

В[15,16] для получения приближенного дифференциального уравнения конечного порядка отбрасываются члены высших порядков уравнения /6/. Однако при этом требуется определить корни характеристического многочлена приближенного уравнения, что весьма нелегко. Ниже будет разработан новый метод построения приближенного дифференциального уравнения с помощью многочлена, корни которого совпадают с первыми членами ряда /13/ для $q \neq 0$.

Определим искомый многочлен $\ell_N(\mu, q)$ выражением

$$\ell_N(\mu, q) = \frac{\lambda(q)}{a^2 c^{2+4N} \prod_{k=1}^{N} (4k^2\pi^2 + a^2)^2} (\mu^2 + a^2 c^2) \times$$
$$\times \prod_{k=1}^{N} (\mu^4 - 2c^2(4k^2\pi^2 - a^2)\mu^2 + c^4(4k^2\pi^2 + a^2)^2), \qquad /17/$$

где N - целое положительное число, $a = a(q)$,

$$\lambda(q) = 2c\sqrt{q^2 + c^2} - 2c^2 \qquad /18/$$

/свободный член в многочлене /9//; при $N = 0$

$$\ell_0(\mu, q) = \frac{\lambda(q)}{a^2 c^2}\mu^2 + \lambda(q). \qquad /19/$$

Теорема 1. При $N \to \infty$ коэффициенты многочлена $\ell_N(\mu, q)$ стремятся к коэффициентам многочлена $\ell(\mu, q)$, а коэффициенты дифференциального уравнения $L_N(\mu, q) = V(r; E_q)\psi(q,r)$ с характеристическим многочленом $\ell_N(\mu, q)$ стремятся к коэффициентам уравнения $L(\psi, q) = V(r; E_q)\psi(q, r)$.

Доказательство. Многочлен /17/ можно представить в виде

$$\ell_N(\mu, q) = \frac{\lambda(q)}{a^2 c^{2+4N}\prod\limits_{k=1}^{N}(4k^2\pi^2 + a^2)}(\mu + iac)(\mu - iac)\prod_{k=1}^{N}\sigma_k(\mu, a), \qquad /20/$$

где $\sigma_k(q, N) = (\mu + (ia + 2k\pi)c)(\mu - (ia + 2k\pi)c)(\mu + (ia - 2k\pi)c)(\mu - (ia - 2k\pi)c)$.

Соответственно вместо /19/ будем иметь

$$\ell_0(\mu, q) = \frac{\lambda(q)}{a^2 c^2}(\mu + ia(\mu - ia). \qquad /21/$$

Таким образом, корни многочлена $\ell_N(\mu, q)$ совпадают с первыми $(2 + 4N)$ членами ряда /13/ для всех $N = 0, 1, 2, \ldots$

Выражая многочлен $\ell_{N+1}(\mu, q)$ через $\ell_N(\mu, q)$

$$\ell_{N+1}(\mu, q) = \ell_N(\mu, q)\left[\frac{1}{c^4(4(N+1)^2\pi^2 + a^2)^2}\mu^4 - \frac{2(4(N+1)^2\pi^2 - a^2)}{c^2(4(N+1)^2\pi^2 + a^2)^2}\mu^2 + 1\right] \qquad /22/$$

и обозначая посредством $a_k(N)$ коэффициент при степени μ^{2k} в многочлене $\ell_N(\mu, q)$, получим $a_0(q, N) = \lambda(q)$ для всех $N = 0, 1, 2, \ldots$

$$a_k(N+1) = \frac{1}{c^4(4(N+1)^2\pi^2 + a^2)^2}a_{k-2}(N) - \frac{2(4(N+1)^2\pi^2 - a^2)}{c^2(4(N+1)^2\pi^2 + a^2)^2}a_{k-1}(N) + a_k(N). \qquad /23/$$

Далее, совершая индукцию по N, находим

$$a_1(N) = -\lambda(q)\sum_{j=1}^{N}\frac{2(4j^2\pi^2 - a^2)}{c^2(4j^2\pi^2 + a^2)^2} + \frac{\lambda(q)}{a^2 c^2},$$

$$|a_1(N)| < \frac{\lambda(q)}{a^2 c^2} + \lambda(q)\sum_{j=1}^{N}\frac{2|4j^2\pi^2 - a^2|}{c^2(4j^2\pi^2 + a^2)^2} < \frac{\lambda(q)}{a^2 c^2} + \lambda(q)\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2c^2\pi^2 j^2},$$

$$\lim_{N\to\infty}|a_1(N)| < \frac{\lambda(q)}{a^2 c^2} + \lambda(q)\frac{1}{12c^2} = \frac{\lambda(q)}{c^2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{12}\right).$$

Отсюда вытекает, что последовательность $a_1(N)$ имеет предел при $N \to \infty$.

Для $k > 1$ из рекуррентной формулы /23/ с учетом $a_k(0) = 0$ получим

$$a_k(N) = \sum_{j=1}^{N}\frac{1}{c^4(4j^2\pi^2 + a^2)^2}a_{k-2}(j-1) - \sum_{j=1}^{N}\frac{2(4j^2\pi^2 - a^2)}{c^2(4j^2\pi^2 + a^2)^2}a_{k-1}(j-1). \qquad /24/$$

Ряды

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{c^4(4j^2\pi^2 + a^2)^2} \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{\infty}\frac{2(4j^2\pi^2 - a^2)}{a^2(4j^2\pi^2 + a^2)^2}a_{k-1}(j-1)$$

являются сходящимися. Отсюда с помощью индукции по k находим, что последовательности $a_k(N)$ сходятся при $N \to \infty$ для всех $k = 0, 1, 2, \ldots$. С другой стороны, $\ell(\mu, q) = \lim\limits_{N\to\infty}\ell_N(\mu, q)$. Следовательно, при $N \to \infty$ коэффициенты многочлена $\ell_N(\mu, q)$ стремятся к коэффициентам многочлена $\ell(\mu, q)$.

Теорема доказана.

Теорема 1 позволяет аппроксимировать исходное дифференциальное уравнение бесконечного порядка $L(\psi, q) = V(r; E\;)\psi(q, r)$ дифференциальным уравнением конечного порядка $L_N(\psi, q) = V(r; E_q)\psi(q, r)$. При этом фундаментальные решения свободного уравнения $L_N(\psi, q) = 0$ совпадают с $(2 + 4N)$ первыми фундаментальными решениями свободного уравнения $L(\psi, q) = 0$, т.е. с функциями $\exp(\pm iacr)$, $\exp(\pm(ia \pm 2\pi)cr), \ldots, \exp(\pm(ia \pm 2N\pi)cr)$. Аналогичное приближенное уравнение можно построить и для случая $q = 0$.

2. СИСТЕМНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОГО КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОГО РАДИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

В этом параграфе уравнения $L_N(\psi, q) = V(r; E_q)\psi(q, r)$ будут представлены в виде специальных систем, которые в литературе называются билинейными динамическими системами [19-21]. При переходе к пределу $N \to \infty$ мы получим представление уравнения $L(\psi, q) = V(r; E_q)\psi(q, r)$.

Предварительно рассмотрим линейное дифференциальное уравнение вида

$$\mathfrak{L}(\phi) = \phi^{(n)} + b_1\phi^{(n-1)} + \ldots + b_n\phi = v(r)\phi, \qquad /25/$$

где $b_1, b_2, \ldots, b_n$ - постоянные коэффициенты.

Мы условимся, что во всех матрицах Вандермонда степени элементов возрастают вдоль столбцов; значок T соответствует операции транспонирования.

Лемма 2. Пусть $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ – корни характеристического многочлена свободного уравнения $\mathcal{L}(\phi) = 0$, имеющие единичную кратность. Тогда уравнение /25/ может быть представлено в виде системы уравнений

$$\frac{d\vec{x}}{dr} = A\vec{x} + v(r)\,B\vec{x}\,, \qquad /26а/$$

$$\phi(r) = \sum_{k=1}^{n} x_k(r)\,. \qquad /26б/$$

Здесь $\vec{x}$ есть n-мерный вектор, x_k – его k-я компонента, A – диагональная матрица с элементами $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$; B есть $(n \times n)$-матрица с одинаковыми столбцами, элемент каждой s-строки которой равен $P_s = \dfrac{P_{\mu_s^{n-1}}}{\det P}$, где $P_{\mu_s^{n-1}}$ – алгебраическое дополнение элемента μ_s^{n-1} матрицы Вандермонда P последовательности корней $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$. При этом, если $\vec{x}(r)$ – решение уравнения /26а/, то $[P\vec{x}]^{\tau} = [\phi(r), \phi^{(1)}(r), \ldots, \phi^{(n-1)}(r)]$, где $\phi(r)$ – решение уравнения /25/.

Доказательство. Известно, что уравнение $\mathcal{L}(\phi) = 0$ может быть представлено в виде системы

$$\frac{d\vec{y}}{dr} = \Lambda\vec{y}, \quad \text{где} \quad \vec{y}^{\,\tau} = [\phi, \phi^{(1)}, \ldots, \phi^{(n-1)}]\,.$$

Уравнение /25/, учитывая вид его правой части, можно записать как

$$\frac{d\vec{y}}{dr} = \Lambda\vec{y} + v(r)\,D\vec{y}\,, \qquad /27/$$

где D – матрица размерности $n \times n$, в которой $D_{n1} = 1$, а остальные элементы равны нулю.

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что

$$P^{-1}\Lambda P = A \quad \text{и} \quad P^{-1} D P = B\,. \qquad /28/$$

Подставляя в /27/ $\vec{y} = P\vec{x}$, находим

$$P\frac{d\vec{x}}{dr} = \Lambda P\vec{x} + v(r)\,DP\vec{x}\,. \qquad /29/$$

Далее, умножая обе части /29/ слева на P^{-1} и учитывая /28/, получим /26а/. Справедливость /26б/ следует из того, что все элементы первой строки матрицы P равны единице.

Лемма доказана.

Обозначим $\beta_k = i\alpha + 2k\pi$ и $\bar{\beta}_k = -i\alpha + 2k\pi$ для всех $k = 0,1,2,\ldots$. Тогда корни характеристического многочлена /9/ составляют последовательность $\beta_0 c, -\beta_0 c, \beta_1 c, -\beta_1 c, \bar{\beta}_1 c, -\bar{\beta}_1 c, \ldots, \beta_k c, -\beta_k c, \bar{\beta}_k c, -\bar{\beta}_k c, \ldots$, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Для каждого $q \neq 0$ приближенные релятивистские квазипотенциальные радиальные уравнения $L_N(\psi, q) = V(r; E_q)\psi(q, r)$, где $N = 0,1,2,\ldots$, могут быть представлены в виде системы уравнений

$$\frac{d\vec{x}(r)}{dr} = A(q, N)\,\vec{x}(r) + V(r; E_q)\,B(q, N)\,\vec{x}(r)\,, \qquad /30а/$$

$$\psi(q, r) = \sum_{k=1}^{n} x_k(r)\,, \qquad /30б/$$

где $n = 2 + 4N$; $\vec{x}(r)$ есть n-мерный вектор; $A(q, N)$ – диагональная $(n \times n)$-матрица с элементами $\beta_0 c, -\beta_0 c, \beta_1 c, -\beta_1 c, \bar{\beta}_1 c, -\bar{\beta}_1 c, \ldots, \beta_N c, -\beta_N c, \bar{\beta}_N c, -\bar{\beta}_N c$, $B(q,N)$ есть $(n \times n)$-матрица с одинаковыми столбцами, элементы которых $B_s(q, N)$ $(s = 1,2,\ldots,n)$ определяются из соотношений

$$B_1(q, N) = \frac{\alpha}{i4(\sqrt{q^2 + c^2} - c)} \prod_{k=1}^{N} \frac{(4k^2\pi^2 + \alpha^2)^2}{16k^2\pi^2(k^2\pi^2 + \alpha^2)^2} = -B_2(q, N)\,, \qquad /31/$$

$$B_3(q, N) = \frac{N(-i\alpha + N\pi)}{(N+1)(i\alpha + (N+1)\pi)}\,B_1(q, N)\,, \qquad /32/$$

$$B_{4m}(q, N) = -B_{4m-1}(q,N)\,,\ B_{4m+1}(q,N) = \bar{B}_{4m-1}(q,N)\,,\ \bar{B}_{4m+1}(q,N) = -\bar{B}_{4m-1}(q,N)\,, \qquad /33/$$

$$B_{4m+3}(q,N) = \frac{(N-m)(-i\alpha + (N-m)\pi)}{(N+m+1)(i\alpha + (N+m+1)\pi)}\,B_{4m-1}(q, N)\,,\ m = 1,2,\ldots,N-1. \qquad /34/$$

При этом, если $\vec{x}(r)$ есть решение уравнения /36а/, то $[P(q,N)\vec{x}(r)]^{\tau} = [\psi(r), \psi^{(1)}(r), \ldots, \psi^{(n-1)}(r)]$, где $P(q,N)$ – матрица Вандермонда последовательности $\beta_0 c, -\beta_0 c, \beta_1 c, -\beta_1 c, \bar{\beta}_1 c, -\bar{\beta}_1 c, \ldots, \beta_N c, -\beta_N c, \bar{\beta}_N c, -\bar{\beta}_N c$.

Доказательство. Для преобразования уравнения $L_N(\psi, q) = V(r; E_q)\psi(q, r)$ к уравнению вида /25/ достаточно разделить обе его части на $a_{2N+2}(N)$ – коэффициент при самой высокой степени μ в многочлене $\ell_N(\mu, q)$. Из /17/ и /19/ находим

$$a_{2N+2}(N) = \frac{\lambda(q)}{\alpha^2 c^{2+4N} \prod\limits_{k=1}^{N} (4k^2\pi^2 + \alpha^2)^2}\ (N = 1,2,\ldots);\ a_2(0) = \frac{\lambda(q)}{\alpha^2 c^2}\,. \qquad /35/$$

Следовательно, уравнение

$$\mathcal{L}_N(\psi, q) = \frac{1}{a_{2N+2}(N)}\,L_N(\psi, q) = \frac{1}{a_{2N+2}(N)}\,V(r; E_q)\psi(q, r) \qquad /36/$$

имеет единичный коэффициент при члене самого высокого порядка.

С помощью леммы 2 остается лишь определить элементы матрицы $B(q,N)$.

Обозначим через $W(q,N)$ матрицу Вандермонда последовательности

$$\mu_1=\beta_0,\ \mu_2=-\beta_0,\ \mu_3=\beta_1,\ \mu_4=-\beta_1,\ \mu_5=\bar\beta_1,\ \mu_6=-\bar\beta_1,\dots,\mu_{4k-1}=\beta_k,$$

$$\mu_{4k}=-\beta_k,\ \mu_{4k+1}=\bar\beta_k,\ \mu_{4k+2}=-\bar\beta_k,\dots,\mu_{4N-1}=\beta_N,\ \mu_{4N}=-\beta_N,$$

$$\mu_{4N+1}=\bar\beta_N,\ \mu_{4N+2}=-\bar\beta_N=\mu_n.$$

В силу леммы 1, формул /35/ и /36/ элемент каждой s-строки матрицы $B(q,N)$ дается выражением

$$B_s(q,N)=\frac{a^2c}{\lambda(q)}\Big(\prod_{k=1}^{N}(4k^2\pi^2+a^2)^2\Big)\times\frac{P_{\mu_s^{n-1}}(q,N)}{\det P(q,N)}=$$

$$=\frac{a^2c}{\lambda(q)}\Big(\prod_{k=1}^{N}(4k^2\pi^2+a^2)^2\Big)\times\frac{W_{\mu_s^{n-1}}(q,N)}{\det W(q,N)}, \qquad /37/$$

где $W_{\mu_s^{n-1}}(q,N)$ - алгебраическое дополнение элемента μ_s^{n-1} матрицы $W(q,N)$.

Из выражения для определителя Вандермонда следует

$$\frac{W_{\mu_s^{n-1}}(q,N)}{\det W(q,N)}=\frac{(-1)^{N+s}}{\prod\limits_{j=1}^{s-1}(\mu_s-\mu_j)\prod\limits_{j=s+1}^{n}(\mu_j-\mu_s)}=-\frac{1}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq s}}^{n}(\mu_j-\mu_s)}. \qquad /38/$$

Подставляя μ_j в /38/, при $s=1$ и $s=4m-1$ $(m=1,2,\dots,N)$ будем иметь

$$\frac{W_{\mu_1^{n-1}}(q,N)}{\det W(q,N)}=\frac{1}{2\beta_0\prod\limits_{k=1}^{N}(\beta_k-\beta_0)(\beta_k+\beta_0)(\bar\beta_k-\beta_0)(\bar\beta_k+\beta_0)}, \qquad /39/$$

$$\frac{W_{\mu_{4m-1}^{n-1}}(q,N)}{\det W(q,N)}= \qquad /40/$$

$$=\frac{1}{(\beta_0-\beta_m)(\beta_0+\beta_m)(2\beta_m)(\bar\beta_m-\beta_m)(\bar\beta_m+\beta_m)\prod\limits_{\substack{k=1\\ k\neq m}}^{N}(\beta_k-\beta_m)(\beta_k+\beta_m)(\bar\beta_k-\beta_m)(\bar\beta_k+\beta_m)}.$$

При этом справедливы равенства

$$(\beta_k-(-\beta_m))(\beta_k+(-\beta_m))(\bar\beta_k-(-\beta_m))(\bar\beta_k+(-\beta_m))=(\beta_k-\beta_m)(\beta_k+\beta_m)(\bar\beta_k-\beta_m)(\bar\beta_k+\beta_m), \qquad /41/$$

$$(\beta_k-\bar\beta_m)(\bar\beta_k+\bar\beta_m)(\bar\beta_k-\bar\beta_m)(\beta_k+\bar\beta_m)=\overline{(\beta_k-\beta_m)(\beta_k+\beta_m)(\bar\beta_k-\beta_m)(\bar\beta_k+\beta_m)}. \qquad /42/$$

Учитывая /41/, /42/ и замечая, что $\bar\beta_0=-\beta_0$, получаем из /38/-/40/:

$$\frac{W_{\mu_2^{n-1}}(q,N)}{\det W(q,N)}=-\frac{W_{\mu_1^{n-1}}(q,N)}{\det W(q,N)};\quad \frac{W_{\mu_{4m}^{n-1}}(q,N)}{\det W(q,N)}=-\frac{W_{\mu_{4m-1}^{n-1}}(q,N)}{\det W(q,N)},$$

$$\frac{W_{\mu_{4m+1}^{n-1}}(q,N)}{\det W(q,N)}=\Big(\overline{\frac{W_{\mu_{4m-1}^{n-1}}(q,N)}{\det W(q,N)}}\Big);\quad \frac{W_{\mu_{4m+2}^{n-1}}(q,N)}{\det W(q,N)}=-\frac{W_{\mu_{4m+1}^{n-1}}(q,N)}{\det W(q,N)}.$$

Эти соотношения вместе с /37/ приводят к равенству $B_2(q,N)=-B_1(q,N)$ и соотношениям /33/.

Подставляя $\beta_k=ia+2k\pi$ $(k=0,1,\dots,N)$ в /39/ и учитывая затем /37/ и /17/, получим /31/.

Из /37/ и /38/ следуют соотношения

$$\frac{B_3(q,N)}{B_1(q,N)}= \qquad /43/$$

$$=\frac{2\beta_0\prod\limits_{k=1}^{N}(\beta_k-\beta_0)(\beta_k+\beta_0)(\bar\beta_k-\beta_0)(\bar\beta_k+\beta_0)}{(\beta_0-\beta_1)(\beta_0+\beta_1)(2\beta_1)(\bar\beta_1-\beta_1)(\bar\beta_1+\beta_1)\prod\limits_{k=2}^{N}(\beta_k-\beta_1)(\beta_k+\beta_1)(\bar\beta_k-\beta_1)(\bar\beta_k+\beta_1)},$$

$$\frac{B_{4m+3}(q,N)}{B_{4m-1}(q,N)}= \qquad /44/$$

$$=\frac{(\beta_0-\beta_m)(\beta_0+\beta_m)(2\beta_m)(\bar\beta_m-\beta_m)(\bar\beta_m+\beta_m)\prod\limits_{\substack{k=1\\ k\neq m}}^{N}(\beta_k-\beta_m)(\beta_k+\beta_m)(\bar\beta_k-\beta_m)(\bar\beta_k+\beta_m)}{(\beta_0-\beta_{m+1})(\beta_0+\beta_{m+1})(2\beta_{m+1})(\bar\beta_{m+1}-\beta_{m+1})(\bar\beta_{m+1}+\beta_{m+1})\prod\limits_{\substack{k=1\\ k\neq m+1}}^{N}(\beta_k-\beta_{m+1})(\beta_k+\beta_{m+1})(\bar\beta_k-\beta_{m+1})(\bar\beta_k+\beta_{m+1})}$$

Заметим, что при $k_1-r_1=k_2-r_2$ имеют место равенства $(\beta_{k_1}-\beta_{r_1})=(\beta_{k_2}-\beta_{r_2})$ и $(\bar\beta_{k_1}-\beta_{r_1})=(\bar\beta_{k_2}-\beta_{r_2})$. Если же $k_1+r_1=k_2+r_2$, то $(\beta_{k_1}+\beta_{r_1})=(\beta_{k_2}+\beta_{r_2})$ и $(\bar\beta_{k_1}+\beta_{r_1})=(\bar\beta_{k_2}+\beta_{r_2})$.

Учитывая эти равенства в соотношениях /43/ и /44/, получим

$$\frac{B_3(q,N)}{B_1(q,N)}=\frac{(\beta_N-\beta_0)(\bar\beta_N-\beta_0)}{(\beta_N+\beta_1)(\bar\beta_N+\beta_1)}=\frac{N(-ia+N\pi)}{(N+1)(ia+(N+1)\pi)}, \qquad /45/$$

$$\frac{B_{4m+3}(q,N)}{B_{4m-1}(q,N)}=\frac{(\beta_N-\beta_m)(\bar\beta_N-\beta_m)}{(\beta_N+\beta_{m+1})(\bar\beta_N+\beta_{m+1})}=\frac{(N-m)(-ia+(N-m)\pi)}{(N+m+1)(ia+(N+m+1)\pi)}. \qquad /46/$$

Отсюда вытекают равенства /32/ и /34/.

Теорема доказана.

Заметим, что в случае разрывного квазипотенциала $V(r; E_q)$ любое непрерывное решение системы /30а/ обеспечивает условие сшивания решений уравнения $L(\psi, q) = V(r; E_q)\psi(q, r)$, так как компоненты вектора $P(q, N)\vec{x}(r)$ являются $(n-1)$ первыми производными $\psi(q, r)$.

<u>Следствие.</u> Для любого $q \neq 0$ релятивистское квазипотенциальное радиальное уравнение $L(\psi, q) = V(r; E_q)\psi(q, r)$ может быть представлено в виде системы уравнений бесконечного порядка:

$$\frac{d\vec{x}(r)}{dr} = A(q)\vec{x}(r) + \gamma(q) V(r; E_q) B\vec{x}(r), \qquad /47а/$$

$$\psi(q, r) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k(r). \qquad /47б/$$

Здесь $\vec{x}(r)$ - бесконечномерный вектор; $A(q)$ - диагональная матрица бесконечного порядка с элементами /13/, т.е. $\beta_0 c, -\beta_0 c, \ldots, \beta_k c, -\beta_k c, \bar{\beta}_k c, -\bar{\beta}_k c, \ldots$; B - бесконечномерная матрица, состоящая из одинаковых столбцов, элементы которых удовлетворяют равенствам

$$1 = B_1 = -B_2 = B_{4m-1} = -B_{4m} = -B_{4m+1} = B_{4m+2}, \quad (m \ll \infty) \qquad /48/$$

$$\lim_{m\to\infty} B_m = 0 \qquad /49/$$

и, наконец,

$$\gamma(q) = \frac{\alpha}{i4(\sqrt{q^2 + c^2} - c)} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(4k^2\pi^2 + \alpha^2)^2}{16k^2\pi^2(k^2\pi^2 + \alpha^2)}. \qquad /50/$$

При этом, если $\vec{x}(r)$ - решение уравнения /47а/, то компоненты вектора $P(q)\vec{x}(r)$ состоят из производных всех порядков функции $\psi(q, r)$, где $P(q)$ - матрица Вандермонда последовательности /13/.

<u>Доказательство.</u> Заметим, что для фиксированного числа m

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(4k^2\pi^2 + \alpha^2)^2}{16k^2\pi^2(k^2\pi^2 + \alpha^2)} = \lim_{N\to\infty} \frac{N(-i\alpha + N\pi)}{(N+1)(i\alpha + (N+1)\pi)} =$$
$$= \lim_{N\to\infty} \frac{(N-m)(-i\alpha + (N-m)\pi)}{(N+m+1)(i\alpha + (N+m+1)\pi)} = 1. \qquad /51/$$

Отсюда, в силу /31/,

$$\gamma(q) = B_1(q) = \lim_{N\to\infty} B_1(q, N) < \infty. \qquad /52/$$

Из /32/-/34/ с учетом мнимости числа $B_1(q)$ получаем равенство /48/.

С другой стороны, для любой постоянной разности $(N - m) = a = \text{const}$, принимая во внимание /34/, имеем

$$\lim_{m\to\infty} \frac{B_{4m+3}(q, N)}{B_{4m-1}(q, N)} = \frac{a(-i\alpha + a\pi)}{(2m + a + 1)(i\alpha + (2m + a + 1)\pi)} = 0. \qquad /53/$$

Следствие доказано.

3. РЕШЕНИЯ С НУЛЕВЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ В ТОЧКЕ $r = 0$ И РЕШЕНИЯ ЙОСТА

В этом параграфе мы воспользуемся результатами предыдущего параграфа для нахождения решений $\psi(q, r)$ с граничным условием

$$\psi(q, r)|_{r=0} = 0 \qquad /54/$$

и решений Йоста $F^{\pm}(q, r)$, имеющих асимптотику

$$\lim_{r\to\infty} F^{\pm}(q, r)\exp(\pm i\alpha(q) cr) = 1. \qquad /55/$$

При этом предполагается, что квазипотенциал удовлетворяет условиям /7/ и /8/.

Предварительно заметим, что при $V(r; E_q) = 0$ матрица $\exp(A(q,N)r)$ является матрицей фундаментальных решений уравнения /30а/. Обозначим через $g[i\alpha cr]$, $g[-i\alpha cr]$, $g[(i\alpha + 2k\pi)cr]$, $g[-(i\alpha + 2k\pi)cr]$, $g[(-i\alpha + 2k\pi)cr]$ и $g[(i\alpha - 2k\pi)cr]$ векторы, совпадающие со столбцами матрицы $\exp(A(q, N))$ и содержащие

$$\exp(i\alpha cr),\ \exp(-i\alpha cr),\ \exp((i\alpha + 2k\pi)cr),\ \exp(-(i\alpha + 2k\pi)cr),$$

$$\exp((-i\alpha + 2k\pi)cr),\ \exp((i\alpha - 2k\pi)cr), \quad (k = 1, 2, \ldots, N).$$

<u>Теорема 3</u>. Для любого $q \neq 0$ и $s = 0, \pm1, \ldots, \pm N$ решение интегрального уравнения

$$\psi(q, r) = \frac{\sin \alpha cr}{\alpha c}\exp(2s\pi cr) + \int_0^r G(q, N, r, t)\, V(t; E_q)\psi(q, t)\, dt, \qquad /56/$$

где

$$G(q, N, r, t) = \gamma(q, N)[\sin\alpha c(r - t) + \sin\alpha c(r - t)\sum_{k=1}^{N} a_k(q, N)(\exp(2k\pi c(r - t)) +$$
$$+ \exp(-2k\pi c(r - t))) + \cos\alpha c(r - t)\sum_{k=1}^{N} b_k(q, N)(\exp(2k\pi c(r - t)) - \exp(-2k\pi c(r - t)))],$$

$$\gamma(q,N) = B_1(q,N)\,2i, \quad \omega_k(q,N) = \frac{B_{4k-1}(q,N)}{B_1(q,N)},$$

$$a_k(q,N) = \mathrm{Re}\,\omega(q,N), \quad b_k(q,N) = \mathrm{Im}\,\omega_k(q,N), \qquad /57/$$

с квазипотенциалом, удовлетворяющим условию /7/, является решением уравнения $L_N(\psi, q) = V(r; E_q)\psi(q,r)$ с граничным условием /54/. При этом уравнение /56/ может быть решено методом последовательных приближений.

<u>Доказательство.</u> Введем обозначения

$$h(0,r) = g[i\alpha cr] - g[-i\alpha cr], \quad h(k,r) = g[(i\alpha + 2k\pi)cr] - g[(-i\alpha + 2k\pi)cr],$$

$$h(-k,r) = g[(i\alpha - 2k\pi)cr] - g[(-i\alpha - 2k\pi)cr].$$

Легко проверить, что решение уравнения

$$\vec{x}(q,r) = \frac{h(s,r)}{2i\alpha c} + \int_0^r \exp(A(g,N)(r-t))\,B(q,N)\,V(t;E_q)\vec{x}(q,t)\,dt \qquad /58/$$

$$(s = 0, \pm 1, \dots, \pm N)$$

является решением системы /30а/. Подставляя /58/ в /30б/ и учитывая /31/-/34/, получим /56/. Следовательно, по теореме 2 решение интегрального уравнения /56/, если оно существует, одновременно является решением уравнения $L_N(\psi, q) = V(r; E_q)\psi(q,r)$. При этом $\psi(q,0) = 0$.

Теперь докажем, что уравнение /56/ имеет решение, которое может быть найдено методом последовательных приближений.

Положим

$$\psi(q,r) = r\exp(2N\pi cr). \qquad /59/$$

Тогда из /56/ следует, что

$$Z(q,r) = \frac{\sin\alpha cr}{\alpha cr}\exp(-2(N-s)\pi cr) + \int_0^r G'(q,N,r,t)\;tV(t;E_q)Z(q,t)\,dt, \qquad /60/$$

где

$$G'(q,N,r,t) = \sigma(q,N)\Big[\frac{\sin\alpha c(r-t)}{4N'\pi cr} + \frac{\sin\alpha c(r-t)}{2N'\pi cr}\sum_{k=1}^{N}\frac{a_k(q,N)}{N}(\exp(2k\pi c(r-t)) +$$

$$+ \exp(-2k\pi c(r-t))) + \cos\alpha c(r-t)\sum_{k=1}^{N}\frac{b_k(q,N)}{4N'\pi cr}(\exp(2k\pi c(r-t)) -$$

$$- \exp(-2k\pi c(r-t))\Big]\exp(-2N\pi c(r-t)), \qquad /61/$$

$$\sigma(q,N) = \gamma(q,N)\,4N'\pi c, \quad N' = \max\{N; \min\{M: 2\pi Mc \geq \alpha c\}. \qquad /62/$$

В качестве предварительных оценок используем соотношения $|a_k(q,N)| \leq 1$, $|b_k(q,N)| \leq 1$. /Это вытекает из /32/ и /34//.

$$\left|\frac{\sin\alpha c(r-t)}{4N'\pi cr}\right| \leq \left|\frac{\sin\alpha c(r-t)}{2N'\pi cr}\right| \leq \left|\frac{\sin\alpha c(r-t)}{\alpha cr}\right| \leq \left|\frac{\sin\alpha c(r-t)}{\alpha c(r-t)}\right| \leq 1,$$

так как $t \leq r$,

$$[\exp(2k\pi c(r-t)) + \exp(-2k\pi c(r-t))]\exp(-2N\pi c(r-t)) \leq 2,$$

$$\frac{1}{4N'\pi cr}[\exp(2k\pi c(r-t) - \exp(-2k\pi c(r-t))]\exp(-2N\pi c(r-t)) \leq 1,$$

поскольку $\left|\frac{\exp y - \exp(-y)}{2y}\right| \leq 1$.

При решении уравнения /60/ полагаем

$$Z_0(q,r) = \frac{\sin\alpha cr}{\alpha cr}\exp(-2(N-s)\pi cr), \qquad /63/$$

$$Z_{m+1}(q,r) = \int_0^r G'(q,N,r,t)\,tV(t;E_q)Z_m(q,t)\,dt. \qquad /64/$$

Заметим, что

$$|Z_0(q,r)| \leq 1, \quad |Z_1(q,r)| \leq (1+2N)\sigma(q,N)\int_0^r t|V(t;E_q)|dt.$$

Предположим далее, что при некотором m справедлива оценка

$$|Z_m(q,r)| \leq \frac{(1+2N)^m\sigma^m(q,N)}{m!}\Big[\int_0^r t|V(t;E_q)|dt\Big]^m. \qquad /65/$$

Тогда

$$|Z_{m+1}(q,r)| \leq \frac{(1+2N)^{m+1}\sigma^{m+1}(q,N)}{m!}\int_0^r t|V(t;E_q)|\Big[\int_0^t \tau|V(\tau;E_q)|d\tau\Big]^m dt \leq$$

$$\leq \frac{(1+2N)^{m+1}\sigma^{m+1}(q,N)}{(m+1)!}\Big[\int_0^r t|V(t;E_q)|\,dt\Big]^{m+1}.$$

Отсюда с помощью индукции по m получаем, что оценка /65/ имеет место для любого натурального числа m и что ряд

$$Z(q,r) = \sum_{m=0}^{\infty} Z_m(q,r) \qquad /66/$$

равномерно сходится в каждом конечном промежутке $0 \le r \le a$, а его сумма $Z(q,r)$ является решением уравнения /60/. Очевидно, что величина $Z(q,r)$ удовлетворяет неравенству

$$|Z(q,r)| \le \exp\{(1+2N)\sigma(q,N)\int_0^r t|V(t;E_q)|dt\}. \qquad /67/$$

Теорема доказана.

Из приведенного доказательства следует, что для решения $\psi(q,r)$ уравнения /56/ выполняется оценка

$$|\exp(-2N\pi cr)\psi(q,r)| \le r\exp\{(1+2N)\sigma(q,N)\int_0^r t|V(t;E_q)|dt\}. \qquad /68/$$

Перед нахождением решений Йоста заметим, что условия /7/ и /8/ эквивалентны условию

$$\int_0^\infty t\exp(\kappa t)|V(t;E_q)|dt < \infty \qquad /69/$$

для любого $\kappa > 0$.

<u>Теорема 4</u>. Для любого $q \ne 0$ и $r > 0$ решения Йоста уравнения $L_N(\psi, q) = V(r;E_q)\psi(q,r)$ с потенциалом, удовлетворяющим условиям /7/ и /8/, могут быть представлены решениями интегрального уравнения

$$F^{\pm}(q,r) = \exp(\pm i\alpha cr) - \int_r^\infty G(q,N,r,t)V(t;E_q)F^{\pm}(q,t)dt, \qquad /70/$$

где $G(q,N,r,t)$ дается формулой /57/. При этом интегральное уравнение /70/ решается методом последовательных приближений.

<u>Доказательство</u>. Нетрудно проверить, что решение уравнения

$$\vec{x}^{\pm}(q,r) = g[\pm i\alpha cr] - \int_r^\infty \exp(A(q,N)(r-t))B(q,N)V(t;E_q)\vec{x}^{\pm}(q,t)dt \qquad /71/$$

является решением для /30а/. Подставляя /71/ в /30б/, с учетом /31/-/34/ получим /70/. Далее, по теореме 2 решения интегрального уравнения /70/ являются также решениями уравнения $L_N(\psi,q) = V(r;E_q)\psi(q,r)$, имеющими асимптотику /55/.

Представим /70/ в виде

$$F^{\pm}(q,r) = \exp(\pm i\alpha cr) - \int_r^\infty \bar{G}(q,N,r,t)\,tV(t;E_q)F^{\pm}(q,t)dt, \qquad /72/$$

где

$$\bar{G}(q,N,r,t) = \sigma(q,N)\Big[\frac{\sin\alpha c(r-t)}{2N'\pi ct} + \frac{\sin\alpha c(r-t)}{2N'\pi ct}\sum_{k=1}^{N}\frac{a_k(q,N)}{2}(\exp(2k\pi c(r-t)) +$$
$$+ \exp(-2k\pi c(r-t))) + \cos\alpha c(r-t)\sum_{k=1}^{N}\frac{b_k(q,N)}{4N'\pi ct}(\exp(2k\pi c(r-t)) - \exp(-2k\pi c(r-t)))\Big]. \qquad /73/$$

Заметим далее, что

$$\left|\frac{\sin\alpha c(r-t)}{4N'\pi ct}\right| \le \left|\frac{\sin\alpha c(r-t)}{2N'\pi ct}\right| \le \left|\frac{\sin\alpha c(r-t)}{\alpha ct}\right| \le \left|\frac{\sin\alpha c(r-t)}{\alpha c(r-t)}\right| \le 1,$$

так как $r \le t$. Положим теперь

$$F_0^{\pm}(q,r) = \exp(\pm i\alpha cr), \qquad /74/$$

$$F_{m+1}^{\pm}(q,r) = -\int_r^\infty \bar{G}(q,N,r,t)\,tV(t;E_q)F_m^{\pm}(q,t)dt. \qquad /75/$$

Нетрудно убедиться в справедливости оценок

$$|F_0^{\pm}(q,r)| \le 1, \quad |F_1^{\pm}(q,N)| \le (1+2N)\sigma(q,N)\int_r^\infty t\exp(2N\pi ct)|V(t;E_q)|dt.$$

Предположим, что для некоторого m

$$|F_m^{\pm}(q,N)| \le \frac{(1+2N)^m\sigma^m(q,N)}{m!}\Big[\int_r^\infty t\exp(2N\pi ct)|V(t;E_q)|dt\Big]^m. \qquad /76/$$

Тогда

$$|F_{m+1}^{\pm}(q,N)| \le \frac{(1+2N)^{m+1}\sigma^{m+1}(q,N)}{m!}\int_r^\infty t\exp(2N\pi ct)|v(t;E_q)| \times$$
$$\times\Big[\int_t^\infty \tau\exp(2N\pi c\tau)|V(\tau;E_q)|d\tau\Big]^m dt \le$$
$$\le \frac{(1+2N)^{m+1}\sigma^{m+1}(q,N)}{(m+1)!}\Big[\int_r^\infty t\exp(2N\pi ct)|V(t;E_q)|dt\Big]^{m+1}.$$

Отсюда по индуктивному предположению оценка /76/ имеет место для любого натурального числа m и ряды

$$F^{\pm}(q,r) = \sum_{m=0}^{\infty} F_m^{\pm}(q,r) \qquad /77/$$

равномерно сходятся на полуоси $[0,\infty)$, а их суммы $F^{\pm}(q,r)$ являются решениями уравнения /70/.

Теорема доказана.

Из доказательства вытекает, что для решений $F^{\pm}(q,r)$ справедлива оценка

$$|F^{\pm}(q,r)| \le \exp\{(1+2N)\sigma(q,N)\int_r^\infty t\exp(2N\pi ct)|V(t;E_q)|dt\}. \qquad /78/$$

С помощью решений Йоста физическая волновая функция $\Phi(q,r)$ релятивистского квазипотенциального радиального уравнения определяется выражением, подобным нерелятивистскому[22]:

$$\Phi(q,r) = F^{-}(q,r) - S(q)\, F^{+}(q,r)\,, \qquad /79/$$

где матрица рассеяния $S(q)$ задается выражением

$$S(q) = \frac{F^{-}(q,0)}{F^{+}(q,0)}\,. \qquad /80/$$

Очевидно, что $\Phi(q,r)|_{r=0} = 0$.

Ниже для примера мы рассмотрим простейший случай, когда потенциал имеет вид ямы конечной глубины [9]:

$$V(r;E_q) = -V_0 \quad \text{при} \quad r \leq a\,, \qquad /81/$$

$$V(r;E_q) = 0 \quad \text{при} \quad r > a\,. \qquad /82/$$

Из теоремы 4 имеем

$$F^{\pm}(q,r) = \exp(\pm i\alpha cr) + V_0 \int_0^a G(q,N,r,t)\, F^{\pm}(q,t)\, dt\,, \qquad /83/$$

где $\alpha = \alpha(q)$.

С другой стороны, из уравнения /6/ и леммы 1 следует, что решения $F^{\pm}(q,r)$ на промежутке $[0,a]$ являются линейными комбинациями:

$$F^{\pm}(q,r) = (d^{\pm}(V_0,q))^{T} H^{T}(V_0,q,r)\,; \qquad /84/$$

здесь $d^{\pm}(V_0,q)$ – n-мерные векторы коэффициентов $(n = 4N+2)$,

$$H(V_0,q,r) = [\exp(i\alpha_0 cr), \exp(-i\alpha_0 cr), \ldots, \exp((i\alpha_0 + 2N\pi)cr), \exp(-(i\alpha_0 + 2N\pi)cr),$$

$$\exp((-i\alpha_0 + 2N\pi)cr), \exp((i\alpha_0 - 2N\pi)cr)]\,,$$

$$i\alpha_0 = \arccos\left(\sqrt{\left(\frac{q}{c}\right)^2 + 1} + \frac{V_0}{2c^2}\right).$$

По теореме 2 векторы $d^{\pm}(V_0,q)$ могут быть получены из уравнения

$$D(V_0,q)\, d^{\pm}(V_0,q) = G^{\pm}(q,a)\,, \qquad /85/$$

где

$$(G^{\pm}(q,a))^{T} = [1, \pm i\alpha c, (\pm i\alpha c)^2, \ldots, (\pm i\alpha c)^{n-1}]\exp(\pm i\alpha c a)\,,$$

$D(V_0,q)$ – $(n\times n)$ – матрица с элементами $D_{sj}(V_0,q) = \dfrac{d^{s-1}}{dr^{s-1}} H_j(V_0,q,r)$.

Уравнение /85/ также может быть получено из /83/ и /84/.

Из /80/ и /84/ матрица рассеяния $S(q)$ определяется соотношением

$$S(q) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} d_k^{-}(V_0,q)}{\sum\limits_{k=1}^{n} d_k^{+}(V_0,q)}\,. \qquad /86/$$

Подчеркнем, что в отличие от [9] в нашем подходе не существует проблемы сшивания решений, полученных в областях при $r \leq a$ и $r > a$ соответственно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы изложили новую схему решения релятивистского квазипотенциального радиального уравнения при $\ell = 0$, основанную на его представлении в виде системы дифференциальных уравнений. В этой схеме условие сшивания обеспечивается автоматически, и краевые условия могут быть легко заданы. Хотя мы требовали от квазипотенциала быстрого убывания при $r \to \infty$, данный метод может быть развит и при более общих предположениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Logunov A.A., Tavkhelidze A.N. Nuovo Cim., 1963, vol.29, No.2, p.380-400.
2. Kadyshevsky V.G. Nucl.Phys., 1968, vol.36, No.1, p.125-137.
3. Kadyshevsky V.G., Mateev M.D. Nuovo Cim., 1968, vol.55A, No.2, p.1332-1340.
4. Kadyshevsky V.R., Mir-Kasimov R.M., Skachkov N.B. Nuovo Cim., 1968, vol.55A, No.2, p.233-257.
5. Freeman M., Mateev M.D., Mir-Kasimov R.M. Nucl.Phys., 1969, B12, p.197-215.
6. Кадышевский В.Г., Мир-Касимов Р.М., Скачков Н.Б. ЯФ, 1969, 9, с.212.
7. Кадышевский В.Г., Мир-Касимов Р.М., Скачков Н.Б. ЯФ, 1969, 9, с.462.
8. Кадышевский В.Г., Мир-Касимов Р.М., Фриман М. ЯФ, 1969, 9, с.646-652.
9. Кадышевский В.Г., Мир-Касимов Р.М., Скачков Н.Б. ЭЧАЯ, 1972, т.2, вып.3, с.635-690.
10. Todorov I.T. Local Quasipotential Equations for the Relativistic Two-Body Problem. In: New Developments in Relativistic Quantum Field Theory and Its Applications. Wroclaw, 1972, vol.1, p.1-21.
11. Амирханов И.В., Груша В.Г., Мир-Касимов Р.М. ЭЧАЯ, 1981, т.12, вып.3, с.651-691.

12. Капшай В.Н., Скачков Н.Б. ОИЯИ, Р2-82-271, Дубна, 1982.
13. Капшай В.Н., Скачков Н.Б. ОИЯИ, Д2-82-272, Дубна, 1982.
14. Капшай В.Н., Кулешов С.П., Скачков Н.Б. ОИЯИ, Р2-82-530, Дубна, 1982.
15. Жидков Е.П., Кадышевский В.Г., Катышев Ю.В. ТМФ, 1970, т.13, №2, с.191-196.
16. Александров Л., Караджов Д. ЖВМ и МФ, 1970, т.20, №4, с.923-938.
17. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. Физматгиз, М., 1967, с.400.
18. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнения. ИИЛ, М., 1958, с.474.
19. Математические методы в теории систем. /Под ред. Ю.И.Журавлева/. "Мир", М., 1979, с.328.
20. Ву Суан Минь.ДАН СССР, 1984, т.276,№3, с.525-527.
21. Ву Суан Минь. ОИЯИ, Р5-82-658, Дубна, 1982.
23. Де Альфаро В., Редже Т. Потенциальное рассеяние. "Мир", М., 1966, с.274.

Рукопись поступила в издательский отдел
27 июня 1984 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Ву Суан Минь, Жидков Е.П., Кадышевский В.Г. Р5-84-449

О решениях релятивистских квазипотенциальных радиальных уравнений

Разработан систематический подход к исследованию релятивистских квазипотенциальных радиальных уравнений. Найдены решения с нулевым граничным значением в точке $r = 0$ и решения Йоста уравнения

$$[2c\sqrt{q^2 + m^2c^2} - H_0^{rad} - V(r; E_q)]\psi_\ell (q, r) = 0$$

на полуоси $[0, \infty)$ для случая S-волны $(\ell = 0)$, когда

$$H_0^{rad} = 2mc^2 ch(\frac{i\hbar}{mc} \frac{d}{dr}).$$

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод авторов

Vu Xuan Minh, Zhidkov E.P., Kadyshevskij V.G. P5-84-449

On Solutions of Relativistic Quasipotential Radial Equations

A systematical approach is developed for investigation of the relativistic quasipotential radial equations. The solutions with zero boundary value in the point $r = 0$ and the solutions of the Jost function are obtained for the equation

$$[2c\sqrt{q^2 + m^2c^2} - H_0^{rad} - V(r; E_q)]\psi_\ell (q, r) = 0$$

on the semi-axis $[0, \infty)$ for the case of S-wave $(\ell = 0)$, when

$$H_0^{rad} = 2mc^2 ch(\frac{i\hbar}{mc} \frac{d}{dr}).$$

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984