сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5-84-431

В.П.Гердт, А.Ю.Жарков

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ РАЗЛОЖЕНИИ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЧУ-ЛОУ

1984

В предыдущих работах /I-3/ нами был разработан подход к построению общего решения хорошо известных уравнений Чу-Лоу /4/, опирающийся на представление решения в виде ряда по степеням одной из произвольных функций $C(w)$, обладающей свойствами

$$C(w+1) = -C(w), \quad C(w) = C(-w). \tag{I}$$

Здесь w - униформизующая переменная $w = \frac{1}{\pi} \arcsin \nu$ / ν - энергия пиона в ед. его массы /.

Функция $C(w)$ определяет структуру общего интеграла (инвариантной кривой) уравнений Чу-Лоу

$$y = f(x, C), \tag{2}$$

где переменные x, y являются функциями w и связаны дробно-линейным преобразованием

$$x = \frac{-S_1 - S_2 + 2S_3}{S_1 + 4S_2 + 4S_3}, \qquad y = \frac{S_1 - 2S_2 + S_3}{S_1 + 4S_2 + 4S_3} \tag{3}$$

с P-волновыми матричными элементами $S_i(w)$ $(i = 1 \div 3)$ статической S-матрицы.

В терминах переменных (3) уравнения Чу-Лоу /4/ имеют хорошо известный вид системы нелинейных разностных уравнений /5/:

$$\begin{cases} x(w+1) = F(x(w), y(w)), \\ y(w+1) = -F(y(w), x(w)), \end{cases} \qquad F(x,y) = \frac{x + 2x^2 - xy - 2y^2}{1 + 3x + 3y - 2x^2 - 3xy - 2y^2} \tag{4}$$

Решение уравнений (4) в работах /I-2/ **мы искали в виде рядов**

$$x(w) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(w)\, C^i(w), \quad y(w) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(w)\, C^i(w), \tag{5}$$

и соответственно общий интеграл (2) в виде ряда

$$y = f(x, c) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(x)\, C^i. \tag{6}$$

Представления (5)-(6) опирались, во-первых, на локальный анализ общего решения, выполненный в работах /6-7/ для окрестности точки $x = y = 0$ и, во-вторых, на тот факт /7/, что $C(w) \equiv 0$ соответствует точному решению

$$x_0(w) = \frac{1}{w}, \quad y_0(w) = \frac{1}{w^2}, \quad f_0(x) = x^2,$$

к которому физически интересное решение (обладающее борновским полюсом) асимптотически стремится при $w \to \infty$ /5-7/.

При большом w (малых x, y) рядам (5)-(6) соответствуют разложения /7/

$$x(w)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda_i(C(w))}{w^{2i+1}}, \qquad y(w)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\mu_i(C(w))}{w^{2i+2}} \tag{7}$$

и

$$y=f(x,C)=\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i(c)x^{2i}, \tag{8}$$

где λ_i, μ_i и β_i полиномиально зависят от произвольной функции (I).

Аргументация, изложенная в /6-7/, приводила к заключению о сходимости рядов (7)-(8) при достаточно большом w, однако недавний анализ работы /8/ показал неаналитичность общего решения (при $C(w)\not\equiv 0$) в точке $x=y=0$ и тем самым выявил формальный характер рядов (7)-(8).

С другой стороны, простой численный анализ показывает, что не только борновская точка, но и любая точка из окрестности борновской точки под действием преобразования плоскости (x,y), генерируемого уравнениями (4), асимптотически входит в начало координат $(x\to+0,\ y\to+0)$ вдоль одной из кривых параболического типа /5-7/, соответствующей разложению (8), оборванному на некоторой степени x. Преобразование, обратное (4), имеет вид

$$\begin{cases} x(w-1)=-F(-x(w),y(w)), \\ y(w-1)=-F(y(w),-x(w)), \end{cases} \tag{9}$$

где $F(x,y)$ - та же рациональная функция, что и в (4). Последовательное применение преобразования (9) к любой точке окрестности борновского полюса также переводит эту точку в начало координат $(x\to-0,\ y\to+0)$ вдоль кривой параболического семейства (8). При этом данная точка, как при прямом (4), так и при обратном преобразовании (9), асимптотически входит в начало координат вдоль одной и той же кривой.

Отмеченное свойство уравнений Чу-Лоу приводит к мысли о том, что ряд (8) и соответствующие ему ряды (7) являются асимптотическими разложениями общего решения при $\mathrm{Re}\,w\to\pm\infty$, $\mathrm{Im}\,w=const$.

Рассмотрим теперь ряды (5)-(6), которые соответствуют /I/ суммированию степенных рядов (7)-(8) в каждом порядке по $C(w)$.

При исследовании рядов (5)-(6) удобно на первом шаге рассмотреть ряд (6), описывающий общий интеграл уравнений (4).

Коэффициенты ряда (6) определяются цепочкой разностных уравнений вида /I,2/:

$$\tilde{f}_i(t)+(-1)^i\tilde{f}_i(t+1)=F_i(t), \quad (i=0,1,\dots) \tag{10}$$

где

$$t\equiv\frac{1}{x}, \quad \tilde{f}_i(t)\equiv t^4 f_i\left(\frac{1}{t}\right),$$

и неоднородная часть $F_i(t)$ является полиномом по функциям $\tilde{f}_0(t),\dots,\tilde{f}_{i-1}(t)$ и их производным. Коэффициенты полинома F_i являются рациональными функциями t, степень числителя которых меньше степени знаменателя.

Из вида уравнения (I0) следует, что если $F_i(t)$ разлагается в асимптотический ряд при $t\to+\infty$, то существует решение, также обладающее асимптотическим разложением при $t\to\infty$ $(x\to 0)$. Более того, такое решение единственно, т.к. произвольная периодическая либо антипериодическая функция, являющаяся решением уравнения (I0) с $F_i(t)\equiv 0$, не разлагается в асимптотический ряд при $t\to\infty$ $(x\to 0)$.

Рассмотрим явный вид асимптотически разлагающихся решений, соответствующих низшим степеням $C(w)$ в ряде (6). В линейном по $C(w)$ приближении глобальное (6) и локальное (8) разложения совпадают /I/, т.е. $f_0(x)=x^2$, $f_1(x)=x^4$.

Функция $f_2(x)$ дается выражением /2/

$$f_2(x)=\frac{x^6(9x^4-20x^2-1)}{3(x^2-1)^2}-\frac{2}{3}x^4\xi\left(\frac{1}{x}\right), \tag{11}$$

где $\xi(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\xi(t)+\xi(t+1)=-\frac{1}{t}+\frac{1}{t+1}. \tag{12}$$

Решением уравнения (I2), допускающим асимптотическое разложение при $t\to\infty$, является функция

$$\xi(t)=\frac{1}{t}-G(t), \tag{13}$$

где $G(t)=\Psi\left(\frac{t+1}{2}\right)-\Psi\left(\frac{t}{2}\right)$ и $\Psi(t)=\Gamma'(t)/\Gamma(t)$ - дигамма-функция.

Учитывая вышеизложенное и рассуждая по индукции, немедленно приходим к заключению о существовании решений цепочки разностных уравнений (I0), разлагающихся в асимптотический ряд при $t\to\infty$. Следовательно, ряд (8) является асимптотической формой ряда (6) при $x\to+0$.

Проводя аналогичные рассуждения для цепочки уравнений, определяющих коэффициенты $x_i(w)$ в (5) /I,2/, получим подобную связь между рядами (5) и (7). В частности, ограничиваясь порядком $C^2(w)$, получим /I,2/

$$x(w)=\frac{1}{w}+\frac{2C(w)}{w^3(w^2-1)}+\left[\frac{6w^6-11w^4+3w^2+12}{3w^5(w^2-1)^2}-\frac{4\xi(w)}{3w^3(w^2-1)}-\frac{\eta(w)}{w^2}\right]C^2(w)+\dots, \tag{14}$$

$$y(w)=\frac{1}{w^2}+\frac{w^2+3}{w^4(w^2-1)}C(w)+\left[\frac{12w^6-23w^4+10w^2+21}{3w^6(w^2-1)^2}-\frac{2(w^2+3)}{3w^4(w^2-1)}\xi(w)-\frac{2\eta(w)}{w^3}\right]C^2(w)+\dots,$$

где $\eta(w)$ является решением уравнения /2/

$$\eta(w)-\eta(w+1)=\frac{1}{w^2}+\frac{1}{(w+1)^2}. \tag{15}$$

Требование разложимости в асимптотический ряд при $Re\,w \to \infty$ приводит к следующему решению уравнения (I5):

$$\eta(w) = \Psi'(w) + \Psi'(w+1). \qquad (I6)$$

Мы рассмотрели решение уравнений Чу-Лоу (4) вида (5), соответствующее асимптотическим разложениям (7) при $Re\,w \to +\infty$. Аналогичным образом можно построить решение, соответствующее разложениям (7) при $Re\,w \to -\infty$. В этом случае, например, в качестве решения уравнений (I2) и (I5) следует взять

$$\xi(t) = -\frac{1}{t} - G(-t),$$

$$\eta(w) = -\Psi'(-w) - \Psi'(1-w).$$

Таким образом, опираясь на представление общего решения уравнений Чу-Лоу в виде (5), мы пришли к двум классам решений, имеющих асимптотические разложения вида (7) при $Re\,w \to +\infty$ и $Re\,w \to -\infty$ соответственно. Представление общего решения по-разному в различных областях комплексной w -плоскости связано, по-видимому, с существенной особенностью решения в точке $w=\infty$, с одной стороны, и с неприменимостью представления (5) во всей w -плоскости, с другой стороны.

В заключение отметим, что несмотря на расходимость рядов (7), установленную в работе [8], их асимптотический характер сохраняет в силе оценку величины $C(0)$, полученную нами в работе [3] путем численного анализа поведения борновской точки под действием преобразования фазовой плоскости, генерируемого уравнениями (4).

Литература

1. Гердт В.П. ТМФ, 1981, 48, с.346.
2. Гердт В.П., Жарков А.Ю. ТМФ, 1982, 52, с.384.
3. Гердт В.П., Жарков А.Ю. ТМФ, 1983, 55, с.469.
4. **Chew G.F., Low F.E. Phys. Rev., 1956, 101, p.1570**
5. Журавлев В.И., Мещеряков В.А. ЭЧАЯ, 1974, 5, вып. I, с.172.
6. Мещеряков В.А. ОИЯИ, Р2-5906, Дубна, 1971;
   Мещеряков В.А. ОИЯИ, Р2-7047, Дубна, 1973.
7. Гердт В.П., Мещеряков В.А. ТМФ, 1975, 24, с.155.
8. Рерих К.В. ОИЯИ, Р2-83-459, Дубна, 1983.

Рукопись поступила в издательский отдел
21 июня 1984 года.

Гердт В.П., Жарков А.Ю. Р5-84-431

Об асимптотическом разложении общего решения уравнений Чу-Лоу

Рассмотрена связь между глобальным и локальным разложением общего решения уравнений Чу-Лоу. Использована формулировка уравнений Чу-Лоу в виде системы нелинейных разностных уравнений. Исследование свойств общего решения основано на сведении нелинейных уравнений к бесконечной цепочке линейных неоднородных разностных уравнений. Это достигается глобальным разложением общего решения по степеням одной из произвольных периодических функций c(w), определяющей структуру общего интеграла уравнений Чу-Лоу. Показано, что в каждом порядке по c(w) асимптотическое разложение глобального представления дает хорошо известное локальное разложение общего решения. Это подтверждается прямым численным исследованием асимптотического поведения физически интересных решений, обладающих борновским полюсом.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод О.С.Виноградовой

Gerdt V.P., Zharkov A.Yu. P5-84-431

On Asymptotic Expansion of General Solution of Chew-Low Equations

The connection between the global and local expansion of the general solution of the Chew-Low equations is considered. The representations of the Chew-Low equation is used in the form of a system of nonlinear-finite difference equations. The investigation of the properties of the general solution is based on reducing the nonlinear equations to the infinite chain of inhomogeneous linear finite difference equations. It is achieved by global expansion of the general solution in series over powers of one of the arbitrary periodical function c(w), determining the structure of the general integral of the Chew-Low equations. It is show that in each order in c(w) the asymptotic expansion of the global representation gives the well known local expansion of the general solution. It is confirmed by direct numerical investigation of the asymptotic behaviour of the physical interesting solutions possessing the Born pole.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984