84-217

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P5-84-217

В.И.Иноземцев, Д.В.Мещеряков

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

1984

В настоящей работе мы рассмотрим динамические системы с гамильтонианом

$$H = \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j^2}{2} + U(q_1, \ldots, q_N) \qquad /1/$$

и установим новые случаи существования пар Лакса для потенциалов $U(q_1, \ldots, q_N)$ вида

$$U = \sum_{\{\alpha\} \in R_+} g_\alpha^2 V_\alpha(\vec{\alpha}\vec{q}). \qquad /2/$$

Здесь $\{\vec{\alpha}\}$ - совокупность корней какой-либо из классических корневых систем полупростых алгебр Ли; $\vec{q} = \{q_1, \ldots, q_N\}$; R_+ - множество положительных корней, g_α, V_α зависят только от длины корневого вектора $\vec{\alpha}$, так что U является инвариантом преобразований из соответствующей группы Вейля. Системы с потенциалом /2/ были впервые введены в работах Ольшанецкого и Переломова /1/, рассмотревших наиболее простой случай $V_\alpha(\xi) \equiv V(\xi)$.

Для всех трех классических корневых систем (B_N, C_N, BC_N), имеющих подсистемы корней различной длины, явное выражение для U имеет вид /2/

$$U(q_1, \ldots, q_N) = g^2 \sum_{j<n}^{N} [V(q_j + q_n) + V(q_j - q_N)] + \sum_{j=1}^{N} W(q_j), \qquad /3/$$

где функции $V(\xi)$, $W(\xi)$ необходимо выбрать таким образом, чтобы существовали матрицы Лакса L, M /3/, удовлетворяющие условию

$$\frac{dL}{dt} = \{H, L\}_P = [L, M] \qquad /4/$$

/ $\{\ldots\}_P$ - скобка Пуассона/.

В работах /1/ был указан способ, позволяющий найти анзацы для матриц L и M - они должны быть построены из операторов неприводимого представления алгебры, обладающей системой корней, используемой в /2/.

Для системы корней BC_N такой алгеброй является алгебра, соответствующая группе $SU(N+1, N)$ /1/, и наиболее общий анзац для L, M имеет вид

$$L = \begin{pmatrix} \ell & \alpha & w \\ \alpha^{+} & 0 & -\alpha \\ w^{+} & -\alpha & -\ell \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} m & \alpha' & s \\ -\alpha'^{+} & \mu & -\alpha'^{+} \\ -s^{+} & \alpha' & m \end{pmatrix}, \qquad /5/$$

где ℓ, w, m, s — матрицы $N \times N$:

$$\ell_{jn} = p_j \delta_{jn} + i(1-\delta_{jn})\, x(q_j - q_n);$$
$$w_{jn} = i\nu(q_j)\delta_{jn} + i(1-\delta_{jn})\, y(q_j + q_n);$$
$$m_{jn} = m_j \delta_{jn} + i(1-\delta_{jn})\, x'(q_j - q_n); \qquad /6/$$
$$s_{jn} = \frac{i\nu'(q_j)}{2}\delta_{jn} + i(1-\delta_{jn})\, y'(q_j + q_n);$$

$$m_j = i\Big[r(q_j) - \sum_{n\neq j}^{N} \big(z(q_j+q_n) + z(q_j - q_n)\big)\Big];$$

$$y(\xi) = \epsilon x(\xi), \quad \epsilon = \pm 1.$$

Отметим, что должно выполняться условие $\ell^{+} = \ell$, и, таким образом, функция $x(\xi)$ является нечетной. Далее, α, α' - матрицы размером $1 \times N$ /столбцы/:

$$\alpha_j = i\alpha(q_j), \quad \alpha'_j = i\alpha'(q_j); \quad \mu = i\sum_{j=1}^{N} \kappa(q_j). \qquad /7/$$

Матрицы /5/ зависят, согласно /6/, /7/, от подлежащих определению функций одного аргумента x, y, z, ν, r, α, κ. Гамильтониан /1/ с потенциалом /3/ связан с матрицей L соотношением

$$H = \frac{1}{4}\,\mathrm{tr}L^2. \qquad /8/$$

Согласно /6-8/, функции x, α, ν однозначно определяют потенциал U:

$$g^2 V(\xi) = x^2(\xi); \qquad W(\xi) = \alpha^2(\xi) + \frac{\nu^2(\xi)}{2}. \qquad /9/$$

Уравнение Лакса /4/ эквивалентно системе функциональных уравнений

$$x'(\xi)\,x(\eta) - x'(\eta)\,x(\xi) = x(\xi+\eta)\,[z(\xi) - z(\eta)]; \qquad /10/$$

$$[r(\xi) - r(\eta)]\,x(\xi-\eta) = \epsilon[\nu(\xi)+\nu(\eta)]\,x'(\xi+\eta) + \frac{\epsilon}{2}[\nu'(\xi)+\nu'(\eta)] \times$$
$$\times\, x(\xi+\eta) + \alpha(\xi)\,\alpha'(\eta) + \alpha'(\xi)\,\alpha(\eta); \qquad /11а/$$

$$\epsilon[r(\xi) - r(\eta)]\,x(\xi+\eta) = [\nu(\xi)-\nu(\eta)]\,x'(\xi-\eta) + \frac{1}{2}[\nu'(\xi)+\nu'(\eta)] \times$$
$$\times\, x(\xi-\eta) + \alpha(\xi)\,\alpha'(\eta) - \alpha'(\xi)\,\alpha(\eta); \qquad /11б/$$

$$[x(\xi-\eta) + \epsilon x(\xi+\eta)]\,\alpha'(\eta) + [\epsilon x'(\xi+\eta) - x'(\xi-\eta)]\,\alpha(\eta) +$$
$$+ [z(\xi-\eta) + z(\xi+\eta) + \kappa(\eta)]\,\alpha(\xi) = 0; \qquad /11в/$$

$$\alpha'(\xi)\,\nu(\xi) = [r(\xi) - \frac{\nu'(\xi)}{2} - \kappa(\xi)]\,\alpha(\xi), \quad \epsilon = \pm 1. \qquad /11г/$$

Все аналитические решения уравнения /10/, для которых $x(\xi)$ является нечетной функцией, хорошо известны [1,4]:

$$x(\xi) = \Big\{\frac{g}{\xi},\ \frac{g}{\mathrm{sh}(a\xi)};\ \frac{g}{\mathrm{sn}(a\xi,k)};\ g\,\mathrm{cth}(a\xi),\ \frac{g\,\mathrm{cn}(a\xi,k)}{\mathrm{sn}(a\xi,k)},$$
$$g\,\frac{\mathrm{dn}(a\xi,k)}{\mathrm{sn}(a\xi,k)}\Big\},$$

где $\mathrm{sn}(a\xi,k)$, $\mathrm{cn}(a\xi,k)$, $\mathrm{dn}(a\xi,k)$ - эллиптические функции Якоби с модулем k. Не ограничивая общности рассмотрения, достаточно положить

$$x(\xi) = \frac{g}{\mathrm{sn}(a\xi,k)}; \qquad z(\xi) = -\frac{ag}{\mathrm{sn}^2(a\xi,k)}. \qquad /12/$$

При этом $V(\xi) = \wp(a\xi)$, $\wp$ - функция Вейерштрасса.

Нашей целью является нахождение функций $\alpha(\xi)$, $\nu(\xi)$, определяющих потенциал системы, обладающей парой Лакса, согласно /3/, /9/. Для этого необходимо найти решения системы /11а-г/, в которой $x(\xi)$, $z(\xi)$ уже определены посредством /12/.

Заметим, что достаточно рассмотреть лишь случай $\epsilon = 1$, поскольку решения при $\epsilon = -1$ могут быть получены сдвигом по аргументам (ξ, η) на 1/4 вещественного периода функции $\mathrm{sn}(a\xi, k)$. Далее, при $\epsilon = 1$ /11б/ является следствием /11а/, если α и ν - нечетные, r - четная функция.

Отметим также, что система /11/ является переопределенной: для определения всех четырех функций r, ν, α, κ достаточно найти решения двух уравнений /11б/, /11в/ и выделить среди них ту часть, которая удовлетворяет уравнению /11г/.

Удобно начать с поиска решений /11в/, так как это уравнение содержит наименьшее число неизвестных функций. Заметим, что при $\xi \to 0$ $\alpha(\xi)$ либо регулярна, либо имеет полюс первого порядка; разлагая левую часть /11в/ по степеням ξ, во втором случае можно сразу найти $\kappa(\eta)$:

$$\kappa(\eta) = \frac{2ga}{sn^2(a\eta, k)}, \qquad \alpha(\xi) \sim \frac{a_1}{\xi} + a_2 \xi + \dots \qquad /13/$$

В случае регулярного поведения $\alpha(\xi)$ в окрестности точки $\xi = 0$ это разложение позволяет определить $\alpha(\xi)$:

$$\alpha(\xi) = -a_1 \frac{x(\xi)}{z(\xi)} . \qquad /14/$$

Производя разложение правой части /11/ в окрестности точки $\eta = 0$ с учетом /13/, /14/ найдем общее решение /11в/:

$$\alpha(\xi) = \left\{ \frac{a_1}{sn(a\xi, k)},\ a_1 sn(a\xi, k) \right\}.$$

$$/15/$$

$$\kappa(\xi) = \left\{ \frac{2ga}{sn^2(a\xi, k)},\ 2ga\, k^2 sn^2(a\xi, k) \right\}.$$

Вследствие того, что для функции $\alpha(\xi)$ вида /15/ имеется функциональное соотношение типа /10/, представим в /11б/ функцию τ в виде двух слагаемых $\tau = \tau_1 + \tau_2$, выбрав τ_2 таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$[\tau_2(\xi) - \tau_2(\eta)]\, x(\xi + \eta) = \alpha(\xi)\, \alpha'(\eta) - \alpha'(\xi)\, \alpha(\eta) . \qquad /16/$$

Из /16/ следует, что

$$\tau_2(\xi) = \left\{ \frac{aa_1^2}{g\, sn^2(a\xi, k)};\ \frac{aa_1^2}{g} sn^2(a\xi, k) \right\} , \qquad /17/$$

и /11б/ превращается в однородное уравнение для ν, τ_1, все аналитические решения которого были найдены в[2]:

$$\tau_1(\xi) = \nu(\xi) \cdot \frac{a}{sn(2a\xi, k)} ;$$

$$/18/$$

$$\nu(\xi) = (\alpha + \beta\, sn^2(a\xi, k) + \gamma\, sn^4(a\xi, k))\, [sn(a\xi, k)\, cn(a\xi, k)\, dn(a\xi, k)]^{-1} ,$$

где α, β, γ - произвольные постоянные.

Подстановка /15/, /17-18/ в последнее из уравнений /11/ показывает, что система /11/ имеет решение лишь в следующих случаях:

I. $\alpha(\xi) = \dfrac{a_1}{sn(a\xi, k)}$; $\kappa(\xi) = \dfrac{2ga}{sn^2(a\xi, k)}$; $\tau(\xi) = \dfrac{aa_1^2}{g\, sn^2(a\xi, k)} + \nu(\xi) \dfrac{a}{sn(2a\xi, k)}$,

$$a_1^2 = 2g^2 - 2g\alpha .$$

II. $\alpha(\xi) = a_1 sn(a\xi, k)$; $\kappa(\xi) = 2ga\, k^2 sn^2(a\xi, k)$;

$$\tau(\xi) = \frac{aa_1^2}{g} sn^2(a\xi, k) + \nu(\xi) \frac{a}{sn(2a\xi, k)} ,$$

$$/19/$$

$$a_1^2 = 2g^2 k^2 + 2g\gamma .$$

$$\nu(\xi) = [\alpha + \gamma\, sn^4(a\xi, k)]\, [sn(a\xi, k)\, cn(a\xi, k)\, dn(a\xi, k)]^{-1} ,$$

α и γ - произвольные постоянные.

Таким образом, согласно /9/, /19/, парой Лакса (L, M) вида /5/ обладают системы с гамильтонианом

$$H = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{p_j^2}{2} + W(q_j) \right) + g \sum_{j>n}^{N} \left(V(q_j - q_n) + V(q_j + q_n) \right),$$

где $V(\xi) = \wp(a\xi)$,

$$W(\xi) = g_1^2 \wp(a\xi) + g_2^2 \wp\left(a\xi + \frac{\omega_1}{2}\right) + g_3^2 \wp\left(a\xi + \frac{\omega_2}{2}\right) + g_4^2 \wp\left(a\xi + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right), \qquad /20/$$

ω_1, ω_2 - периоды функции Вейерштрасса.

Постоянные $g_1, \dots, g_4$ не могут быть выбраны произвольными. Из /20/ следует, что допустимые точки в 4-мерном пространстве $\{g_\gamma\}$, $(\gamma = 1, \dots, 4)$ принадлежат двумерной гиперповерхности, определяемой уравнениями

$$F(k^4 g_2^2, (1 + k^2)^2 g_3^2, g_4^2) = 0, \qquad F\left(g_1^2, g_3^2 + \frac{1 - k^2}{1 + k^2}(g_2^2 - g_4^2), 2g^2\right) = 0,$$

$$(F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz), \qquad /21/$$

либо уравнениями, получающимися из /21/ перестановками

$$\{g_1 \rightleftarrows g_2,\ g_3 \rightleftarrows g_4\},\ \{g_1 \rightleftarrows g_3,\ \ g_2 \rightleftarrows g_4\},\ \ \{g_1 \rightleftarrows g_4,\ \ g_2 \rightleftarrows g_3\}.$$

/Эти перестановки соответствуют сдвигу всех координат $q_1,\dots,q_N$ на полупериоды $\wp(a\xi)$/.

Одним из частных решений /21/ является набор

$$g_3^2 = g_4^2 = g_2^2, \quad g_1^2 = g_2^2 + 2g^2 \pm 2\sqrt{2}gg_2. \qquad /22/$$

Поскольку для функции Вейерштрасса имеет место соотношение

$$\wp(2a\xi) = \frac{1}{4}(\wp(a\xi) + \wp(a\xi + \frac{\omega_1}{2}) + \wp(a\xi + \frac{\omega_2}{2}) + \wp(a\xi + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2})),$$

то /22/ совпадает с результатом, полученным в работе /1/.

Интегралы движения $I_n = \frac{1}{4n}\,\mathrm{Tr}(L^{2n})\cdot(n = 1,\dots,N)$ находятся в инволюции, что можно установить непосредственным вычислением скобок Пуассона любых двух собственных значений L /5/. При вырождении функций Вейерштрасса, когда один или оба периода бесконечны, анзац /5/ не приводит к результатам, отличающимся от полученных в /2/.

В заключении отметим, что все рассматривавшиеся ранее /1,6,7/ интегрируемые системы с гамильтонианом вида /1/, за исключением цепочек Тода и системы осцилляторов с нелинейным взаимодействием /8/, могут быть получены предельными переходами из /20-21/ и систем, определенных в работе /2/ соотношениями /22/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Olshanetsky M.A., Perelomov A.M. Invent.Math., 1976, 37, p. 93; Phys.Reports 1981, 71, p. 314.
2. Иноземцев В.И. ОИЯИ, Р4-84-41, Дубна, 1984.
3. Flashka H. Phys.Rev.B, 1974, 9, p. 1924.
4. Calogero F. Lett.Nuovo Cim., 1975, 13, p. 411.
5. Perelomov A.M.Lett.Math.Phys., 1977, 1, p. 531.
6. Adler M. Comm.Math.Phys., 1977, 55, p. 195.
7. Иноземцев В.И. Phys.Lett., 1983, 98A, p. 316.
8. Grosse H. Acta Phys.Austr., 1980, 52, p. 101.

Рукопись поступила в издательский отдел
4 апреля 1984 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Иноземцев В.И., Мещеряков Д.В. Р5-84-217

Об одном классе конечномерных интегрируемых динамических систем

Найдены новые полностью интегрируемые классические системы с гамильтонианом $H = \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j^2}{2} + U(q_1,...,q_N)$, для которых потенциал $U(q_1,...,q_N)$ может быть построен по системе корней одной из полупростых алгебр Ли. Получено общее решение системы функциональных уравнений, определяющей элементы соответствующих матриц Лакса.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод О.С.Виноградовой.

Inozemtsev V.I., Meshcheryakov D.V. E5-84-217

About One Class of Finite-Dimensional Integrable Dynamical Systems

New completely integrable classical systems with the Hamiltonian $H = \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j^2}{2} + U(q_1,...,q_N)$ are found, for which the potential $U(q_1,...,q_N)$ can be constructed in terms of one of root systems of semisimple Lie algebras. A general solution of a set of functional equations determining the elements of corresponding Lax matrices is obtained.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984