12/III-84

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р5-83-812

Е.И.Жидков, И.Д.Илиев, К.П.Кирчев

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ ВИДА УЕДИНЕННОЙ ВОЛНЫ НЕЛИНЕЙНОГО МОДИФИЦИРОВАННОГО КОМПЛЕКСНОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА

Направлено в "Сибирский математический журнал"

1983

Для описания волн в средах со слабой дисперсией в случае, если преобладает кубичная нелинейность, кроме нелинейного уравнения Шредингера встречается и нелинейное модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза /МКдФ/:

$$u_t + 6|u|^2 u_x + u_{xxx} = 0, \quad x \in R, \ t \geq 0, \qquad /1/$$

которое, как отмечает В.Е.Захаров [1,2], тоже имеет универсальный характер. Комплексное уравнение /1/ рассматривалось и в [3-5]. В частности, для вещественных u оно было проинтегрировано методом обратной задачи /см., например, [6] /. Отметим, что на основе рассуждений, изложенных в параграфах 8-10 книги [2], комплексный аналог /1/ уравнения МКдФ также может быть проинтегрирован методом обратной задачи.

В настоящей работе мы докажем устойчивость двухпараметрического решения вида уединенной волны:

$$\phi(x, t) = e^{i\omega(x + (\omega^2 - 3a^2)t} r(x + (3\omega^2 - a^2)t), \qquad /2/$$

где $r(\xi) = a\,\mathrm{ch}^{-1} a\xi$, , $a > 0$ и ω - вещественные параметры.

В § 1 покажем, используя теорию квазилинейных эволюционных уравнений [7,8], что задача Коши для уравнения /1/ с начальными данными

$$u(x, 0) = g(x) \in H^s(R), \quad s \geq 2 \qquad /3/$$

имеет единственное глобальное решение $u(x, t)$, при этом $u(\cdot, t) \in C([0, \infty); H^s)$.

Здесь $H^s(R)$ - пространство Соболева со стандартной нормой $\|f\|^2 = \sum_{k=0}^{s} \int_{-\infty}^{\infty} |f^{(k)}(x)|^2 dx$, где $f^{(k)} = d^k f / dx^k$.

Введем псевдометрику

$$d(u, \phi) = \inf_{(\eta, \zeta) \in R^2} \| u(x, t) - e^{i\omega\eta} \phi(x - \zeta, t) \|_1 . \qquad /4/$$

Основным результатом настоящей работы является

Теорема 1. Для каждого $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что если $u(x,t)$ является решением задачи /1/, /3/ и $d(u, \phi)|_{t=0} < \delta$, то $d(u, \phi) < \epsilon$ для всех $t \in [0, \infty)$.

Устойчивость относительно псевдометрики /4/ называется "орбитальной устойчивостью" [9,10], так как мы имеем устойчивость решения с точностью до сдвига и вращения /в частности, в действительном случае при $\omega = 0$ получается хорошо известная метрика из работ [11-13] /. Устойчивость относительно псевдометрики /4/ является естественной для уравнения /1/, так как решения /1/ инвариантны относительно сдвига и вращения. Можно легко показать, что $\phi(x,t)$ неустойчиво в более сильной метрике $d_1(u,\phi) = \|\phi - u\|_1$.

При доказательстве теоремы 1 используем следующие три функционала: $Q = i\int_{-\infty}^{\infty} \bar u_x u\,dx$, , $P = \int_{-\infty}^{\infty} |u|^2\,dx$, , $E = \int_{-\infty}^{\infty} (|u_x|^2 - |u|^4)\,dx$, инвариантные по времени, когда $u(x,t)$ является решением задачи Коши /1/, /3/.

Покажем, что $\phi(x,t)$ минимизирует функционал $M = E + (a^2 + \omega^2)P - 2\omega Q$, т.е. $M(u) = \int [\,|u_x|^2 - |u|^4 + (a^2+\omega^2)|u|^2 - 2i\omega \bar u_x u]\,dx$. Обозначим для фиксированного $q > 0$

$$d_q^2(u,\phi) = \inf_{(\eta,\zeta)\in R^2} (\|u(x,t) - e^{i\omega\eta}\phi_x(x-\zeta,t)\|^2 + q\|u(x,t) - e^{i\omega\eta}\phi(x-\zeta,t)\|^2). \qquad /5/$$

Утверждение теоремы 1 получим как следствие следующего предложения:

Предложение. Существуют положительные константы K, q, δ_0 такие, что если u - решение /1/, /3/, $P(u) = P(\phi)$ и $d_q(u,\phi) < \delta_0$, то $M(u) - M(\phi) \geq K d_q^2(u,\phi)$.

В § 2 получим доказательство этого утверждения, оценивая снизу вторую вариацию $M(\phi)$ при помощи подходящих спектральных задач. В § 3 изложим доказательство теоремы 1.

§1. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ

Для того чтобы применить теорию абстрактных квазилинейных уравнений к доказательству теоремы, запишем уравнение /1/ в векторной форме:

$$w_t + 6(w{*}w)w_x + w_{xxx} = 0, \quad w = (\mathrm{Re}\,u, \mathrm{Im}\,u). \qquad /6/$$

Введем пространство $Z^s = H_R^s \oplus H_R^s$, где H_R^s - вещественное пространство Соболева, и обозначим через $P(t) = \exp[-tD^3] \oplus + \oplus \exp[-tD^3]$, $D = d/dx$ сильно непрерывную унитарную группу операторов, действующих в пространстве Z^s. Тогда, подставляя в /6/ $w = P(t)v(t)$, получим квазилинейное эволюционное уравнение [7,8]:

$$dv/dt + A(t,v)v = 0, \quad v(0) = (\mathrm{Re}\,g, \mathrm{Im}\,g), \qquad /7/$$

где $A(t,y)$ - линейный оператор, зависящий от t, $y \in Z^s$ и $A(t,y) = P(-t)a(P(t)y)DP(t)$. Здесь $a(P(t)y)$ - оператор умножения на функцию $x \to a((P(t)y)(x)) = [(P(t)y){*}(P(t)y)](x)$. Если выбрать в качестве $X = Z^0$ и $Y = Z^s$ /в терминологии [7] /, то условия абстрактной теоремы существования [7] для /7/ проверяются так же, как в [7]. Сформулируем результат, который получается относительно уравнения /1/.

Теорема 2. /а/ Пусть $s > 3/2$. Для каждого $g(x) \in H^s$ существует единственное решение $u(x,t)$, $u(x,0) = g$ уравнения /1/, которое принадлежит классу

$$u \in C([0,T); H^s) \cap C^1([0,T); H^{s-3}), \qquad /8/$$

где T зависит только от $\|g\|_s$.

/б/ отображение $g \to u$ непрерывно в H^s-норме в том смысле, что если $g_n \to g$ в H^s при $n \to \infty$ и $T' < T$, то решение /1/ $u_n(x,t)$, $u_n(x,0) = g_n$ существует при $t \in [0,T']$ для достаточно больших n, и $\|u_n - u\|_s \to 0$ равномерно по $t \in [0,T']$.

/в/ T может быть выбрано независимо от s в том смысле, что если u удовлетворяет /8/ и $u(x,0) = g \in H^s$ для некоторого $s' \neq s$, $s' > 3/2$, то u удовлетворяет /8/ и при s' вместо s.

Условие /г/. Существуют вещественные числа $s_1 \geq s_0 > 3/2$ и неубывающая функция α, такие, что для каждого $T > 0$ и для каждой функции $u \in C([0,T); H^{s_1})$, удовлетворяющей /1/, имеет место $\|u(\cdot,t)\|_{s_0} \leq \alpha(\|u(\cdot,0)\|_{s_0})$, $t \in [0,T)$.

Теорема 3. Пусть имеет место условие /г/. Тогда утверждения теоремы 2 выполняются при $T = \infty$.

Лемма 1. Условие /г/ выполняется при $s_0 = 2$.

Доказательство. Утверждение леммы непосредственно вытекает из того факта, что нелинейные функционалы

$$P = \int |u|^2\,dx, \quad E = \int (|u_x|^2 - |u|^4)\,dx,$$
$$I = \int \{|u_{xx}|^2 - [d/dx(|u|^2)]^2 - 6|u|^2|u_x|^2 + 2|u|^6\}\,dx \qquad /9/$$

инвариантны по времени, когда $u(x,t)$ является решением задачи Коши /1/, /3/.

Докажем инвариантность по времени P, E и I. Для этого определим регуляризацию g_ϵ на g /в дальнейшем $\hat g$ обозначает преобразование фурье-функции g /, $\hat g_\epsilon(k) = \Psi(\epsilon k)\hat g(k)$, где Ψ - четная C^∞-функция, $0 \leq \Psi \leq 1$, $\Psi(0) = 1$, причем функция $m(k) = 1 - \Psi(k)$ имеет в 0 нуль бесконечного порядка, и, кроме того, Ψ стремится экспоненциально к нулю при $k \to \pm\infty$. Например, мы можем положить $\Psi(k) = \exp[-s(k)]$, $s(k) = k^2 \exp[-1/k^2]$. Из свойства функции Ψ следует, что $g_\epsilon(x) \in H^\infty = \bigcap_s H^s$. Обозначим соответствующее решение /1/ через $u_\epsilon(x,t)$, $u_\epsilon(x,0) = g_\epsilon$.

Используя равенства Персеваля, нетрудно вывести, что $g_\epsilon \to g$ в H^s, $s \geq 2$ при $\epsilon \to 0$. Тогда, в силу теоремы 2, для каждого $T' < T$ и для достаточно малых ϵ, $u_\epsilon(x,t) \in C([0,T']; H^\infty)$ и

$$\|u_\epsilon(\cdot,t) - u(\cdot,t)\|_s \to 0 \qquad /10/$$

при $\epsilon \to 0$ равномерно по $t \in [0,T]$. Дифференцируя по времени в /9/ и учитывая, что $u_\epsilon(x,t)$ удовлетворяет /1/, в классическом смысле получим $I(u_\epsilon) = I(g_\epsilon)$ $P(u_\epsilon) = P(g_\epsilon)$, $E(u_\epsilon) = E(g_\epsilon)$. Делая предельный переход в этих равенствах, в силу /10/ получим инвариантность по времени P, E и I.

Из теоремы 3 и леммы 1 вытекает, что задача Коши /1/, /3/ имеет единственное глобальное решение u, для которого выполняются утверждения теоремы 2 при $T = \infty$.

§2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Лемма 2.а/ Пусть $d_q^2(u,\phi) < 2q\|\phi\|^2$. Тогда inf в /5/ достигается в конечной точке (η, ζ).

б/ $d_q(u,\phi)$ - непрерывная функция от $t \in [0,\infty)$.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству лемм 1,2 в [/12/].

Зафиксируем $t \in [0,\infty)$ и пусть минимум в /5/ достигается в точке $(\eta,\zeta) = (\eta(t), \zeta(t))$. Чтобы оценить $\Delta M = M(u) - M(\phi)$, положим $u(x,t) = e^{i\omega\eta}\phi(x-\zeta,t) + h(x,t)$ и проинтегрируем по частям в слагаемых, содержащих h_x и $\bar{h}_x$. Получим

$$\Delta M = M(u) - M(\phi) = 2\,\mathrm{Re}\int e^{i\omega\eta}[-\phi_{xx} + (a^2+\omega^2-2|\phi|^2)\phi + 2i\omega\phi_x]\,\bar{h}\,dx +$$

$$+ \int [|h_x|^2 + (a^2+\omega^2-4|\phi|^2)|h|^2 - 2i\omega\bar{h}_x h - 2\,\mathrm{Re}(e^{-2i\omega\eta}\bar{\phi}^2 h^2)]\,dx -$$

$$- \int |h|^2 (4\,\mathrm{Re}(e^{i\omega\eta}\phi\bar{h}) + |h|^2)\,dx = I_1 + I_2 + I_3.$$

Так как амплитуда r удовлетворяет уравнениям

$$r'' + 2r^3 - a^2 r = 0, \quad r'^2 = r^2(a^2 - r^2), \qquad /11/$$

то нетрудно вывести, что $I_1 = 0$, т.е. ϕ является стационарной точкой функционала M. Чтобы оценить I_2, снизу представим $I_2 = \int \bar{h} L h\,dx$, где L - дифференциальный оператор, и применим его спектральное разложение. Для этого мы должны избавиться от инволюции, содержащейся в последнем члене I_2. Произведем замену переменных, полагая

$$h = (h_1 + ih_2)\exp[i\omega(-x\zeta + (\omega^2 - 3a^2)t + \eta)], \qquad /12/$$

где h_1, h_2 - вещественные функции. Тогда имеем

$$|h|^2 = h_1^2 + h_2^2,$$

$$|h_x|^2 = h_{1x}^2 + h_{2x}^2 + 2\omega(h_1 h_{2x} - h_2 h_{1x}) + \omega^2(h_1^2 + h_2^2),$$

$$\int \bar{h}_x h\,dx = i\int [h_2 h_{1x} - h_1 h_{2x} - \omega(h_1^2 + h_2^2)]\,dx,$$

$$\mathrm{Re}(h^{-2}\bar{\phi}^2 e^{-2i\omega\eta}) = (h_1^2 - h_2^2).$$

Таким образом, для I_2 получаем выражение

$$I_2 = \int [h_{1x}^2 + (a^2 - 6r^2)h_1^2 dx + \int [h_{2x}^2 + (a^2 - 2r^2)h_2^2]\,dx = M_1 + M_2.$$

Рассмотрим самосопряженные в $L_2(R)$ операторы L_1 и L_2, порожденные дифференциальными выражениями

$$L_1 = -\frac{d^2}{dx^2} + (a^2 - 6r^2), \quad L_2 = -\frac{d^2}{dx^2} + (a^2 - 2r^2).$$

Непрерывный спектр L_1 и L_2 совпадает с множеством $[a^2, \infty)$. Используя /11/, нетрудно проверить, что L_1 имеет собственные числа $\lambda_0 = -3a^2$ и $\lambda_1 = 0$ с собственными функциями $\phi_0 = r^2$ и $\phi_1 = r'$. L_2 имеет единственное собственное число нуль с собственной функцией r.

Существование нулевых собственных чисел у L_1 и L_2 является следствием инвариантности решения /1/ относительно сдвига и вращения. Благодаря тому, что метрика /4/ дает устойчивость с точностью до сдвига и вращения, удается компенсировать вклад нулевых собственных чисел /см. комментарий в [/13/]/.

Отрицательное собственное число L_1 /и соответствующая собственная функция/ отражают характер нелинейности. Например, при степенной нелинейности $|u|^p u_x$ вместо $|u|^2 u_x$ в /2/, с ростом p растут норма собственной функции и модуль собственного числа, и с данного момента их вклад нельзя компенсировать с положительными членами в разложении. Иными словами, появляется неустойчивость. Как увидим далее, нелинейность $p=2$ не дает такого эффекта.

А/ Оценка для M_2

Производная $d_q^2(u,\phi)$ по η в точке, в которой достигается минимум, равняется нулю. Отсюда имеем

$$0 = -i\omega\int[\bar{h}_x e^{i\omega\eta}\phi_x - h_x e^{-i\omega\eta}\bar{\phi}_x + q(\bar{h}e^{i\omega\eta}\phi - he^{-i\omega\eta}\bar{\phi})]\,dx =$$

$$= 2\omega\,\mathrm{Im}\int(-\phi_{xx} + q\phi)e^{i\omega\eta}\,\bar{h}\,dx =$$

$$= 2\omega \,\mathrm{Im} \int (q + 2r^2 + \omega^2 - a^2) r - 2i\omega r')(h_1 - ih_2)\,dx, \qquad /13/$$

$$\int [(q + 2r^2 + \omega^2 - a^2) r h_2 + 2\omega r' h_1]\,dx = 0.$$

Положим $h_2 = \alpha r + \theta$, $\int \theta r\,dx = 0$. При помощи /13/ покажем, что для больших q, $|\alpha|$ - малое, т.е. /13/ дает в каком-то смысле условие "ортогональности" между h_2 и собственной функцией r. Действительно, используя /13/, получаем

$$0 = \alpha(q + \omega^2 + \frac{1}{3}a^2)\|r\|^2 + 2\int (r^3\theta + \omega r' h_1)\,dx,$$

$$|\alpha|\,\|r\| \le 2\frac{|\int (r^3\theta + \omega r' h_1)\,dx|}{(q + \omega^2 + (a^2)/3)\|r\|} \le$$

$$\le \frac{2\|r^3\|\,\|\theta\| + 2|\omega|\,\|r'\|\,\|h_1\|}{(q + \omega^2 + (a^2)/3)\|r\|} \le K_0(\|\theta\| + \|h_1\|),$$

где $K_0 = K_0(q) \to 0$ при $q \to \infty$.

Следовательно, $\|h_2\| \le |\alpha|\,\|r\| + \|\theta\| \le (K_0 + 1)\|\theta\| + K_0\|h_1\|$. Из последнего неравенства вытекает, что

$$\|\theta\|^2 \ge \frac{\|h_2\|^2}{2(K_0 + 1)^2} - \left(\frac{K_0}{K_0 + 1}\right)^2 \|h_1\|^2. \qquad /14/$$

Так как θ ортогональна к собственной функции r оператора L_2, имеем

$$M_2 = \int [h_{2x}^2 + (a^2 - 2r^2) h_2^2]\,dx = \int [\theta_x^2 + (a^2 - 2r^2)\theta^2]\,dx \ge a^2\|\theta\|^2.$$

Отсюда, в силу /14/, окончательно получаем

$$M_2 \ge \frac{a^2}{2(K_0 + 1)^2}(\|h_2\|^2 - 2K_0^2\|h_1\|^2). \qquad /15/$$

В/ Оценка для M_1

Положим

$$h_1 = \beta r^2 + \gamma r' + \theta_1, \quad r = \nu r^2 + \psi, \qquad /16/$$

где $\int \theta_1 r^2\,dx = \int \theta_1 r'\,dx = \int \psi r^2\,dx = 0$, $\beta, \gamma, \nu = \mathrm{const}$. В силу ортогональности θ_1 к собственным функциям $\phi_0 = r^2$ и $\phi_1 = r'$ имеем

$$M_1(h_1) = \lambda_0\beta^2\|r^2\|^2 + M_1(\theta_1) \ge -3a^2\beta^2\|r^2\|^2 + a^2\|\theta_1\|^2. \qquad /17/$$

Основной трудностью при оценке M_1 является появление отрицательного члена $\lambda_0\beta^2\|r^2\|^2$. Воспользуемся условием $P(u) = \int |h + e^{i\omega\eta}\phi|^2 dx = \int |\phi|^2 dx = P(\phi)$ или $\|h\|^2 = -2\mathrm{Re}\int \phi\bar{h} e^{i\omega\eta} dx = -2\int r h_1 dx$. Подставляя здесь выражения r и h_1, из /16/ получим условие $\nu\beta\|r^2\|^2 + \int \psi\theta_1\,dx = -1/2\,\|h\|^2$, из которого вытекает

$$\beta\|r^2\| = -(\nu\|r^2\|)^{-1}(\frac{1}{2}\|h\|^2 + \int \psi\theta_1\,dx),$$

$$3\beta^2\|r^2\| \le (\nu\|r^2\|)^{-2}(3\|h\|^4 + 4(\int \psi\theta_1\,dx)^2] \le \qquad /18/$$

$$\le (\nu\|r^2\|)^{-2}(3\|h\|^4 + 4\|\psi\|^2\|\theta_1\|^2).$$

Покажем, что $c_0 = 4(\nu\|r^2\|)^{-2}\|\psi\|^2 < 1$. По существу, это - единственное место в доказательстве, где мы используем конкретный вид λ_0 и ϕ_0.

Вычисляя соответствующие интегралы, получим:

$$\|r\|^2 = 2a, \quad \|r^2\|^2 = 4/(3a^3), \quad \|r^{3/2}\|^2 = \pi^{(a^2)}/2,$$

$$\nu = 3\pi/8a, \quad \|\psi\|^2 = \|r\|^2 - \nu^2\|r^2\|^2 = a(2 - 3\pi^2/16),$$

$$c_0 = 128/3\pi^2 - 4 < 1/3, \quad 3(\nu\|r^2\|)^{-1} = 16/a\pi^2 < 5/3a$$

и используя /18/, получим $3\beta^2\|r^2\|^2 \le (5/3a)\|h\|^4 + (1/3)\|\theta_1\|^2$, что вместе с /17/ дает оценку

$$M_1 \ge (2a^2/3)\|\theta_1\|^2 - (5a/3)\|h\|^4. \qquad /19/$$

Обозначим $\theta = h_1 - \gamma r' = \beta r^2 + \theta_1$. Тогда

$$\|\theta\|^2 = \beta^2\|r^2\|^2 + \|\theta_1\|^2 \le (5/9a)\|h\|^4 + (10/9)\|\theta_1\|^2 \quad \text{или}$$

$$\|\theta_1\|^2 \ge (9/10)\|\theta\|^2 - (1/2a)\|h\|^4.$$

Из последнего неравенства и из /19/ вытекает

$$M_1 \ge (3/5)a^2\|\theta\|^2 - 2a\|h\|^4. \qquad /20/$$

Для того чтобы оценить снизу $\|\theta\|^2$ через $\|h_1\|^2$, опять воспользуемся тем, что inf правой части /5/ достигается в точке (η, ζ); следовательно, и производная по ζ в этой точке равна нулю.

$$0 = 2\,\mathrm{Re}\int e^{2\omega\eta}(\bar{h}_x\phi_{xx} + q\bar{h}\phi_x)\,dx =$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\int e^{i\omega\eta}\bar{h}(-\phi_{xxx} + q\phi_x)\,dx = 2\mathrm{Re}\int e^{i\omega\eta}\bar{h}(\phi_t + (6|\phi|^2 + q)\phi_x) =$$

$$2\,\mathrm{Re}\int (h_1 - ih_2)[r'(3\omega^2 - a^2 + 6r^2 + q) + i\omega(\omega - 3a^2 + 6r^2 + q)r]\,dx =$$

$$= 2\int [(3\omega^2 - a^2 + 6r^2 + q)h_1 r' + \omega(\omega^2 - 3a^2 + 6r^2 + q)\,r h_2]\,dx.$$

Определяя $\int q r h_2 dx$ из /13/ и подставляя полученное выражение в верхнее равенство, выводим условие

$$\int [(\omega^2 - a^2 + 6r^2 + q)h_1 r' + \omega(4r^2 - 2a^2)\,r h_2]\,dx = 0.$$

В последнем интеграле положим $h_1 = \gamma r' + \theta$ и воспользуемся тем, что $\int \theta r' dx = 0$. Получим

$$\gamma \int (\omega^2 - a^2 + 6r^2 + q)\,r'^2 dx + 2\int [3r^2 r'\theta + \omega(2r^2 - a^2)\,r h_2]\,dx = 0.$$

При помощи этого условия, так же как и при оценке M_2, получаем

$$||\theta||^2 \geq ||h_1||^2/2(K_1+1)^2 - (K_1/(K_1+1))^2 ||h_2||^2,$$

где $K_1 = K_1(q) \to 0$ при $q \to \infty$. С помощью /20/ выводим окончательную оценку для M_1:

$$M_1 \geq \frac{3a^2}{10(K_1+1)^2}||h_1||^2 - \frac{3}{5}a^2\left(\frac{K_1}{K_1+1}\right)^2 ||h_2||^2 - 2a||h||^4. \qquad /21/$$

C/ <u>Оценка для ΔM.</u>

Объединяя /15/ и /21/, получаем

$$M_1 + M_2 \geq a^2\left[\left(\frac{3}{10(K_1+1)^2} - \left(\frac{K_0}{K_0+1}\right)^2\right)||h_1||^2 + \left(\frac{1}{2(K_0+1)^2} - \frac{3}{5}\left(\frac{K_1}{K_1+1}\right)^2\right)||h_2||^2\right] - 2a||h||^4.$$

Зафиксируем $q = q(a, \omega)$ достаточно большое, чтобы $K_1 \leq 1/6$, $K_1 \leq 1/6$. Тогда

$$M_1 + M_2 \geq \frac{a^2}{5}(||h_1||^2 + ||h_2||^2) - 2a||h||^4 = \frac{a^2}{5}||h||^2 - 2a||h||^4.$$

Несложно показать, что, выбирая q, можно выбрать $q = 16a^2 + 2\omega^2$ /соответственно $q = 50a^2$ /.

С другой стороны, оценивая непосредственно I_2, имеем

$$I_2 \geq ||h_x||^2 + \int (a^2 + \omega^2 - 4r^2)|h|^2 dx - 2|\omega| \int |h_x|\,|h|\,dx - 2\int r^2|h|^2 dx \geq$$

$$\geq (1/2)\,||h_x||^2 - (\omega^2 + 5a^2)\,||h||^2.$$

Аналогично $|I_3| \leq \max(4a|h| + |h|^2)\,||h||^2$.

Пусть $0 < K < 1/2$. Имеем

$$\Delta M = 2KI_2 + (1 - 2K)(M_1 + M_2) + I_3 \geq$$

$$\geq K||h_x||^2 + \left[\frac{a^2}{5}(1 - 2K) - 2K(\omega^2 + 5a^2)\right]||h||^2 - [\max(4a|h| + |h|^2) +$$

$$+ 2a(1 - 2K)||h||^2]\,||h||^2.$$

Выберем K так, чтобы $2qK = (a^2/5)(1 - 2K) - 2K(\omega^2 + 5a^2)$, то есть $K = a^2/2(5q + 26a^2 + 5\omega^2)$. Наконец, из неравенства Соболева вытекает, что $\max|h|^2 \leq (4q)^{-1/2} d_q^2(u, \phi)$, кроме того, $||h||^2 \leq$ $\leq q^{-1} d_q^2(u,\phi)$. Следовательно, можем выбрать $\delta_0 > 0$ так, чтобы при $d_q(u, \phi) < \delta_0$ иметь $[\max(4a|h| + |h|^2) + 2a(1 - 2K)]\,||h||^2 \leq qK$ /до сих пор δ_0 удовлетворяло только условию $\delta_0 \leq (2q)^{1/2}||\phi||$, необходимому для леммы 2а//.

Таким образом, окончательно получаем: Если $d_q(u, \phi) < \delta_0$, $t \in [0, \infty)$, то $\Delta M \geq K d_q^2(u, \phi)$. Предложение доказано.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Сначала докажем теорему 1 при дополнительном условии $P(u) = P(\phi)$. Пусть K, q, δ_0 выбраны в соответствии с предложением. Так как ΔM не зависит от t, $t \in [0, \infty)$, то существует константа m такая, что $\Delta M \leq m d^2(u, \phi)|_{t=0}$. В дальнейшем, не ограничивая общности, будем считать, что $m \geq 1$, $q \geq 1$.

Пусть $\epsilon > 0$, $\delta = \min((K/mq)^{1/2}(\delta_0/2), (K/m)^{1/2}\epsilon)$ и пусть $d(u, \phi)|_{t=0} < \delta$. Тогда $d_q(u, \phi) \leq q^{1/2} d(u, \phi)|_{t=0} < \delta_0/2$ и из леммы 2б/ вытекает, что существует число $T_0 > 0$ такое, что $d_q(u, \phi) < \delta_0$, $t \in [0, T_0)$. Тогда в силу доказанного предложения $\Delta M \geq K d_q^2(u, \phi)$, $t \in [0, T_0)$.

Пусть $T\max$ является самым большим числом, таким, что $\Delta M \geq$ $> K d_q^2(u, \phi)$, $t \in [0, T\max]$.

Допустим, что $T\max < \infty$. Тогда при $t \in [0, T\max]$ имеем

$$d_q^2(u, \phi) \leq \frac{\Delta M}{K} \leq \frac{m}{K} d^2(u, \phi)|_{t=0} \leq \frac{m}{K}\delta^2 \leq \frac{\delta_0^2}{4}.$$

Применяя еще раз леммы 2б/, получаем, что существует число $T_1 > T\max$ такое, что $d_q(u, \phi) < \delta_0$, $t \in [0, T_1)$.

В силу предложения это противоречит допущенному $T\max < \infty$. Следовательно, $T\max = \infty$ и $\Delta M \geq K d_q^2(u, \phi) \geq K d^2(u, \phi)$, $t \in [0, \infty)$. Отсюда $d^2(u, \phi) \leq \Delta M/K \leq (m/K)\delta^2 < \epsilon^2$, $t \in [0, \infty)$ и тем самым теорема доказана.

Теперь освободимся от ограничения $P(u) = ||u||^2 = ||\phi||^2 = P(\phi)$. Имеем $||\phi|| = (2a)^{1/2}$. Положим $b = ||u||^2/2$ и пусть ϕ_b имеет вид /2/ и $||\phi_b|| = ||u|| = (2b)^{1/2}$.

Обозначим $r_b = |\phi_b|$. Тогда, подставляя в интеграл /минимум которого по (η, ζ) является $d^2(\phi_b, \phi)$/ $\eta = 2(a^2 - b^2)t$, $\zeta = (b^2 - a^2)t$, получаем неравенство $d^2(\phi_b, \phi) \leq (1 + \omega^2)||r_b - r||^2 + ||r'_b - r'||^2$.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Жидков Е.П., Илиев И.Д., Кирчев К.П. Р5-83-812

Устойчивость решения вида усредненной волны нелинейного модифицированного комплексного уравнения Кортевега-де Фриза

Доказана орбитальная устойчивость решения вида уединенной волны нелинейного модифицированного комплексного уравнения Кортевега-де Фриза $u_t + 6|u|^2 u_x + u_{xxx} = 0$, $x \in R$, $t \geq 0$.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Zhidkov E.P., Iliev I.D., Kirchev K.P. P5-83-812

Stability of Solving the Solitary Wave Type for the Complex Modified Korteweg-de Vries Equation

The orbital stability of solitary waves for the complex modified Korteweg-de Vries equation $u_t + 6|u|^2 u_x + u_{xxx} = 0$, $x \in R$, $t \geq 0$ has been proved.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983

Перевод О.С.Виноградовой