объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P5-83-785

Е.П.Жидков, А.С.Андреев, В.А.Попов

ЭФФЕКТ ГИББСА ДЛЯ СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИИ И ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ СПЛАЙН-КОЛЛОКАЦИИ

Направлено в Болгарский математический журнал "Сердика"

1983

В этой работе рассматривается эффект Гиббса для параболической сплайн-интерполяции и для численного решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода методом параболической и кубической сплайн-коллокации.

1. Эффект Гиббса для кубической сплайн-интерполяции рассмотрен в [1]. Напомним, в чем он состоит. Пусть σ_a - функция, заданная через

$$\sigma_a(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < a, \\ 1, & a \le x \le 1. \end{cases}$$

Рассмотрим кубические интерполяционные сплайны для σ_a. Пусть $x_i = ih$, $h = 1/n$, $i = 0,1,\dots,n$ и g_n - кубический сплайн с узлами x_i, $i = 0,1,\dots,n$, интерполирующий σ_a в точках x_i, то есть $g_n \in C^2_{[0,1]}$; в каждом интервале $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0,1,\dots,n-1$, g_n является алгебраическим многочленом третьей степени, удовлетворяющим краевым условиям $g'_n(0) = g'_n(1) = 0$ или $g''_n(0) = g''_n(1) = 0$ и $g_n(x_i) = \sigma_a(x_i)$, $i = 0,1,\dots,n$. Тогда в окрестности точки a имеет место эффект Гиббса. Точнее,

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\sup_{x\in[0,1]} g_n(x) - 1\Big) = -\lim_{n\to\infty} \inf_{x\in[0,a)} g_n(x) = 0,106984\dots \qquad /1/$$

Теорема А.[1] Для $x \in [0,1]$ существует неравенство

$$|\sigma_a(x) - g_n(x)| \le \frac{3}{2(2-\sqrt{3})}(2-\sqrt{3})^{|a-x|\cdot n}.$$

Следствие. Для $1 \le p < \infty$ имеем $\|\sigma_a - g_n\|_{L_p} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Рассмотрим теперь эффект Гиббса для параболической сплайн-интерполяции с равноотстоящими узлами. Пусть S_n определяется через:

1/ $S_n(x_i) = \sigma_a(x_i)$, $i = 0,1,\dots,n$, $x_i = i/n$;

2/ $S_n \in C^2_{[0,1]}$;

3/ в каждом интервале $[\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}]$, $i = 0,1,\dots,n$, $\bar{x}_i = (x_{i-1}+x_i)/2$, $i = 1,2,\dots,n$, $\bar{x}_0 = 0$, $\bar{x}_{n+1} = 1$, S_n является алгебраическим многочленом второй степени;

4/ $S''_n(0) = S''_n(1) = 0$.

Хорошо известно, что такой параболический интерполяционный сплайн существует и определяется единственным образом из условий 1/-4/ /см., например, [2]/.

Для удобства вычислений в дальнейшем изменим индексацию точек x_i в зависимости от точки a, полагая:

$0 = x_{-k} < x_{-k+1} < \dots < x_0 < a \le x_1 < x_2 < \dots < x_\ell = 1,\ k+\ell = n,$

$x_{i+1} - x_i = h = 1/n.\ \bar{x}_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2},\ \bar{x}_{-k}=0,\ \bar{x}_{\ell+1}=1,\ -k+1\le i\le \ell.$

В интервале $[x_i, x_{i+1}]$ S_n имеет вид /см.[2], стр.35/:

$$S_n(x) = \sigma_a(x_i) + m_i(x-x_i) + c_i(x-x_i)^2 + d_i(x-\bar{x}_{i+1})_+^2, \qquad /2/$$

где $a_+^2 = \begin{cases} 0, & a\le 0 \\ a^2, & a>0 \end{cases}$.

Из $S_n(x_{i+1}) = \sigma_a(x_{i+1}) = \sigma_{i+1}$, $S_n'(x_{i+1}) = m_{i+1}$ следует /см.[2], стр.37/:

$$m_{i-1} + 6m_i + m_{i+1} = 4\frac{\sigma_{i+1}-\sigma_i}{h} + 4\frac{\sigma_i-\sigma_{i-1}}{h}. \qquad /3/$$

В дальнейшем будем считать, что n столь велико, что $1/n < a < 1-1/n$, т.е. $k\ge 1$, $\ell\ge 2$.

Из /3/ следует, что

$$m_i = A_1\alpha_1^{i-1} + A_2\alpha_2^{i-1}, \quad i=1,2,\dots,\ell$$
$$m_{-i} = B_1\alpha_1^{i} + B_2\alpha_2^{i}, \quad i=0,1,\dots,k, \qquad /4/$$

где $\alpha_1 = -3+2\sqrt{2}$ и $\alpha_2 = -3-2\sqrt{2}$ являются нулями уравнения $\alpha^2+6\alpha+1=0$.

Из условия $S_n''(0)=S_n''(1)=0$ получаем /см.[2], стр.38/:

$$3m_{-k}+m_{-k+1}=0, \quad m_{\ell-1}+3m_\ell=0.$$

Из этих равенств и из /4/ имеем:

$$A_2 = -\frac{1+3\alpha_1}{1+3\alpha_2}\alpha_1^{2\ell-4}A_1,$$
$$B_2 = -\frac{1+3\alpha_1}{1+3\alpha_2}\alpha_1^{2k-2}B_1. \qquad /5/$$

Равенства /4/ и /5/ дают:

$$m_i = A_1\alpha_1^{i-1}(1+c\alpha_1^{2\ell-2i-2}), \quad i=1,2,\dots,\ell,$$
$$m_{-i} = B_1\alpha_1^{i}(1+c\alpha_1^{2k-2i-2}), \quad i=0,1,\dots,k, \qquad /6/$$

где $c = -(1+3\alpha_1)/(1+3\alpha_2)$.

Определим теперь A_1 и B_1. Из /3/ получаем:

$$m_0+6m_1+m_2 = 4/h, \quad m_{-1}+6m_0+m_1 = 4/h. \qquad /7/$$

Ввиду /4/, /5/ система /7/ эквивалентна системе

$$A_1(6+\alpha_1+6c\alpha_1^{2\ell-4}+c\alpha_1^{2\ell-3}) + B_1(1+c\alpha_1^{2k-2}) = 4/h,$$
$$A_1(1+c\alpha_1^{2\ell-4}) + B_1(6+\alpha_1+c\alpha_1^{2k-3}+6c\alpha_1^{2k-2}) = 4/h, \qquad /8/$$

из которой получаем:

$$A_1 = \frac{1}{h}\cdot\frac{20+4\alpha_1+t_1}{34+6\alpha_1+t}, \quad B_1 = \frac{1}{h}\cdot\frac{20+4\alpha_1+t_2}{34+6\alpha_1+t}, \qquad /9/$$

где $t = 6s+\alpha_1 s+6r+\alpha_1 r+rs-p-q-pq$, $t_1 = 4s-4p$, $t_2 = 4r-4q$,

$$r = 6c\alpha_1^{2\ell-4}+c\alpha_1^{2\ell-3},\ p = c\alpha_1^{2k-2},\ q = c\alpha_1^{2\ell-4},\ s = c\alpha_1^{2k-3}+6c\alpha_1^{2k-2}. \qquad /10/$$

Функция S_n' обращается в нуль только в одной точке $\tilde{x}_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i=1,\dots,\ell-1$. Пусть $S_n'(\tilde{x}_i)=0$. Есть два случая:
а/ $\tilde{x}_i \in [x_i, \bar{x}_{i+1}]$, $\bar{x}_{i+1} = (x_i+x_{i+1})/2$,
б/ $\tilde{x}_i \in [\bar{x}_{i+1}, x_{i+1}]$.

Из /2/ в случае а/ получаем:

$$S_n'(\tilde{x}_i) = m_i + 2c_i(\tilde{x}_i - x_i) = 0, \qquad /11/$$

в случае б/ /обозначая тогда соответствующий нуль через $\tilde{\tilde{x}}_i$ /

$$S_n'(\tilde{\tilde{x}}_i) = m_i + 2c_i(\tilde{\tilde{x}}_i - x_i) + 2d_i(\tilde{\tilde{x}}_i - x_{i+1}) = 0. \qquad /12/$$

Из[2], стр.35,36 следует, что для функции σ_a имеют место равенства:

$$c_i = -\frac{3m_i+m_{i+1}}{2h}, \quad c_i+d_i = c_{i+1}, \quad d_i = \frac{2(m_i+m_{i+1})}{h}. \qquad /13/$$

Из /11/ и /13/ получаем

$$\tilde{x}_i = x_i + \frac{m_i}{3m_i+m_{i+1}}h, \qquad /14/$$

а из /12/ и /13/:

$$\tilde{\tilde{x}}_i = \bar{x}_{i+1} - \frac{m_{i+1}+m_i}{3m_{i+1}-m_{i+2}}\cdot\frac{h}{2}. \qquad /15/$$

Из представления m_i в /6/ имеем:

$$0 < \frac{m_i}{3m_i+m_{i+1}} < \frac{1}{2}, \quad -\frac{m_i+m_{i+1}}{3m_{i+1}-m_{i+2}} > 1,$$

а /14/, /15/ дают нам $\tilde{x}_i \in [x_i, \bar{x}_{i+1}]$, $\tilde{x}_i \bar{\in} [\bar{x}_{i+1}, x_{i+1}]$. Следовательно, б/ не может иметь места, и $\tilde{x}_i = x_i + (m_i/(3m_i + m_{i+1}))h$. Из /13/, /6/ и /9/ явствует $\operatorname{sign} c_i = -\operatorname{sign} m_i = (-1)^i$, $i = 1,2,\dots,\ell$. Ввиду $\operatorname{sign} S_n''(\tilde{x}_i) = \operatorname{sign} c_i = (-1)^i$ получаем, что S_n имеет последовательные локальные минимумы и максимумы в интервалах $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1,2,\dots,\ell-1$. В интервале $[x_i, x_{i+1}]$ из /6/, /9/ и /14/ находим:

$$S_n(\tilde{x}_i) = 1 + m_i \frac{m_i}{3m_i + m_{i+1}} h - \frac{3m_i + m_{i+1}}{2h} \cdot \frac{h^2 m_i^2}{(3m_i + m_{i+1})^2} = 1 + \frac{3m_i^2 h}{2(3m_i + m_{i+1})} =$$

$$= 1 + a_1^{i-1} \frac{(20 + 4a_1 + t_1)(1 + a a_1^{2\ell - 2i - 2})^2}{2(34 + 6a_1 + t)(3 + a_1 + 3a a^{2\ell - 2i - 2} + a a_1^{2\ell - 2i - 3})} = 1 + C(i)\, a_1^{i-1}. \qquad /16/$$

В интервале $[x_1, x_2]$ при $n \to \infty$ /т.е. при $k \to \infty$, $\ell \to \infty$, $i = 1$ / имеем:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(\tilde{x}_1) = 1 + \frac{20 + 4a_1}{2(34 + 6a_1)(3 + a_1)} = 1 + \frac{\sqrt{2} - 1}{4}. \qquad /17/$$

Из приведенных выше рассуждений следует, что в интервале $[x_0, x_1]$ функция S_n' не обращается в нуль, т.е.

$$0 \le S_n(x) \le 1 \quad \text{для } x \in [x_0, x_1] \ (S_n(x_0) = 0,\ S_n(x_1) = 1). \qquad /18/$$

Из /16/ следует, что для $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 1,2,\dots,\ell-1$ имеем:

$$|S_n(x) - \sigma_a(x)| \le |a_1|^{i-1} C(i) \le c|a_1|^{i-1}, \qquad /19/$$

где c - абсолютная постоянная. Можем считать, что $c \ge 1$.

Так как для $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 1,2,\dots,\ell-1$ выполнено $a + i/n \le x$ и, следовательно, $i - 1 < (x - a)n - 1$, из /19/ получаем

$$|S_n(x) - \sigma_a(x)| \le \frac{c}{|a_1|} |a_1|^{|x-a|n}. \qquad /20/$$

Аналогично, неравенство /20/ имеет место и для $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = -k, -k+1, \dots, -1$. Из /18/ и /20/ следует

Теорема 1. Параболический интерполяционный сплайн S_n для функции σ_a, удовлетворяющий условиям /1-4/, удовлетворяет

$$|S_n(x) - \sigma_a(x)| \le c q^{|x-a|n}, \quad x \in [0, 1], \quad \text{где } q = 3 - 2\sqrt{2},$$

а c - абсолютная постоянная. Равенство /17/ дает нам

Теорему 2. Для параболического интерполяционного сплайна функции σ_a имеет место эффект Гиббса величиной $100(\sqrt{2}-1)/4$ % от величины скачка.

Из теоремы 1 сразу получаем

Следствие. $\|S_n - \sigma_a\|_{L_p} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $1 \le p < \infty$.

Обозначим через Q класс функций f, кусочно-непрерывных на отрезке $[0,1]$, которые имеют на отрезке $[0,1]$ только конечное число разрывов первого рода $f(x+0) = f(x)$. Для любой функции $f \in Q$ существует представление $f = g + \sum_{i=1}^{n} a_i \sigma a_i$, $n < \infty$, $g \in C_{[0,1]}$, где $\sigma_a(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ 1, & x \ge a \end{cases}$.

Так как интерполяционный оператор является линейным, то из сходимости интерполяционных параболических и кубических сплайнов при равномерной сетке для любой непрерывной функции /см., например, [2]/, теорем А,1,2 и следствия получаем

Теорему 3. Пусть $f \in Q$. Тогда для параболической и кубической сплайн-интерполяции при равномерной сетке и при нулевых краевых условиях для вторых производных сплайна в концах интервала имеем сходимость интерполяционных сплайнов к функции f в L_p, $1 \le p < \infty$, при $n \to \infty$ /n - число узлов интерполяции/. В точках разрывов функции f существует эффект Гиббса величиной $100(\sqrt{2}-1)/4\ \% \approx 10\%$ от скачка для параболической сплайн-интерполяции и $\approx 10{,}698\%$ - для кубической.

2. Рассмотрим теперь интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$y(x) - \lambda \int_0^1 K(x,t)\, y(t)\, dt = f(x). \qquad /21/$$

В дальнейшем будем считать, что $f \in Q$, $K \in Q$ /по обеим переменным/. Как следствие, y тоже принадлежит классу Q.

Будем решать уравнение /21/ методом сплайн-коллокации/см.[2], стр.213/. Точнее, пусть n - натуральное число, $h = 1/n$, , $x_i = ih$, $i = -1, 0, \dots, n+1$. Для параболических сплайнов полагаем $S_2(x) = \sum_{k=-1}^{n+1} d_k B_k(x)$, где $B_0(x) = \frac{h^{-2}}{2} \sum_{k=0}^{3} (-1)^k \binom{3}{k} \left(x + \frac{3h}{2} - kh\right)_+^2$, $B_k(x) = B_0(x - kh)$, а для кубических: $S_3(x) = \sum_{k=-1}^{n+1} c_k D_k(x)$, где

$$D_0(x) = \frac{h^{-3}}{6} \sum_{k=0}^{4} (-1)^k \binom{4}{k} (x + 2h - kh)_+^3, \quad D_k(x) = D_0(x - kh).$$

Коэффициенты d_k, c_k определяются из краевого условия $S_2''(0) = S_2''(1) = 0$, $(S_3''(0) = S_3''(1) = 0)$ и условия коллокации в точках x_i, $i = 0, 1, \dots, n$

$$S_k(x_i) = f(x_i) + \lambda \int_0^1 K(x_i, t)\, S_k(t)\, dt, \quad k = 2,3. \qquad /22/$$

Пусть $S_{n,k}$, $k = 2,3$ - интерполяционный параболический /соотв. кубический/ сплайн, интерполирующий y в точках $x_i = ih$, $i = 0, \dots, n$, $h = 1/n$, удовлетворяющий соответствующим краевым условиям $S_{n,k}''(0) = S_{n,k}''(1) = 0$, $k = 2,3$. Тогда /ср. [2], стр.214/

$$S_{n,k}(x_i) = f(x_i) + \lambda \int_0^1 K(x_i, t)\, S_{n,k}(t)\,dt + \qquad /23/$$

$$+ \lambda \int_0^1 K(x_i, t)\,(y(t) - S_{n,k}(t))\,dt.$$

Полагаем $\phi_n(x) = S_{n,k}(x) - S_k(x)$ /S_k удовлетворяет /22//, $\|\phi_n\|_c = \max\limits_{x\in[0,1]} |\phi_n(x)|$. Вычитая из /23/ равенство /22/, получаем, при условии

$$\lambda \max_{0\le x\le 1} \int_0^1 |K(x,t)|\,dt = \rho < 1/5, \qquad /24/$$

что /так как $1/5\, \|\phi_n\|_c \le \max\limits_{0\le i\le n} |\phi_n(x_i)|$ * /

$$\|\phi_n\|_c \le \frac{\lambda \|K\|_c \|y - S_{n,k}\|_{L_1}}{1/5 - \rho},$$

где $\|K\|_c = \sup\{|K(x,t)|;\ x \in [0,1],\ t \in [0,1]\}$, / $\|K\|_c < \infty$ так как $K \in Q$ /. Если $y \in Q$, то в силу теоремы 3 имеем $\|y - S_{n,k}\|_{L_1} \to 0$, $n \to \infty$, и, следовательно,

$$\|\phi_n\|_c \to 0, \quad n \to \infty. \qquad /25/$$

Так как $\|y - S_k\|_{L_p} \le \|y - S_{n,k}\|_{L_p} + \|\phi_n\|_c$, $1 \le p \| \infty$, то получаем

Теорему 4. Для численного решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода /21/ методом параболической или кубической сплайн-коллокации /22/ при предположении, что $f \in Q, K \in Q$ /по обеим переменным/ и /24/, имеем: $\|f - S_k\|_{L_p} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $k = 2,3$, $1 \le p < \infty$.

В точках разрывов решения y получаем эффект Гиббса величиной $\approx 10{,}6984\%$ от величины скачка для кубических сплайнов и $\approx 10\%$ для параболических. Вторая часть теоремы следует из /25/ и теоремы 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Andreev A.S. C.R.Acad.Bulg.Sci., 1974, 27,7, p.881-884.
2. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. "Наука", М., 1976.

Рукопись поступила в издательский отдел
23 ноября 1983 года.

---

* Норма оператора сплайн-интерполяции в рассматриваемом случае ≤ 5 /см. /2//.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Жидков Е.П., Андреев А.С., Попов В.А. Р5-83-785
Эффект Гиббса для сплайн-интерполяции и для численного решения интегральных уравнений методом сплайн-коллокации

Параболическая сплайн-интерполяция применяется для аппроксимации функций с разрывом. Изучается эффект Гиббса. Метод применяется к решению интегральных уравнений.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Zhidkov E.P., Andreev A.S., Popov V.A. P5-83-785
Gibbs Effect for Spline-Interpolation and for Solving Integral Equations by the Spline-Collocation Method

The parabolique spline-interpolation is applied to the approximation of the function with the discontinuity. Gibb's effect is considered. This method is applied to the solution of integral equations.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983

Перевод О.С.Виноградовой