объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р5-83-771

Е.П.Жидков, И.Д.Илиев, К.П.Кирчев

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ ВИДА "УЕДИНЕННОЙ ВОЛНЫ" ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА СО СТЕПЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Направлено в журнал
"Математические заметки"

1983

1. ВВЕДЕНИЕ

Нелинейное уравнение Шредингера, встречающееся в ряде различных задач, описывает многие явления, такие как поведение неидеального бозе-газа со слабым взаимодействием между частицами, распространение теплового импульса в твердом теле, ленгмюровские волны в плазме и т.п. /см., например, [1,2] /. Интерес к нелинейному уравнению Шредингера увеличился после того, как выяснилось, что оно имеет универсальный характер, как и уравнение Кортевега-де Фриза, и в случае кубической нелинейности может быть проинтегрировано методом обратной задачи [1].

В настоящей работе мы докажем устойчивость решения вида уединенной волны для одномерного уравнения Шредингера со степенной нелинейностью:

$$iu_t = -u_{xx} + u(a - |u|^{2p}), \quad 0 < 2p \le 3, \quad a \in R. \qquad /1/$$

Уравнение /1/ имеет двупараметрическое семейство решений

$$\phi(x,t) = r(x - 2\omega t)e^{i\omega x + i(\alpha - \omega^2)t}, \qquad /2/$$

где

$$r(y) = ((p+1)(a+\alpha))^{1/2p} \left(\operatorname{ch} py\sqrt{a+\alpha}\right)^{-1/p}, \quad \alpha, \omega \in R,\ a + \alpha > 0. \qquad /3/$$

В частности, при $\omega = 0$ имеем решение вида стационарной волны, а при $p = 1$, $a = 0$, $\alpha = \xi^2$ получаем односолитонное решение Захарова и Шабата [1].

Для случая $\omega = 0$ в [3] доказана "орбитальная устойчивость" стационарного решения многомерного уравнения Шредингера с более общим видом нелинейности. При этом границей, отделяющей устойчивые решения от неустойчивых, является в одномерном случае нелинейность $V(|u|)u$, где нелинейная функция $V(|u|)$ имеет степенной рост $2p = 4$. Отметим, что впервые на этот факт указал В.Г.Маханьков [4,5]. Можно предположить, что и в случае $\omega \ne 0$ устойчивость решения /2/ должна иметь место при $0 < 2p < 4$.

Хорошо известно [6-8], что задача Коши для уравнения /1/ с начальными данными

$$u(x,0) = u_0(x) \in H^1(R) \qquad /4/$$

имеет единственное глобальное решение /в смысле распределений/ $u(x,t)$, при этом $u(\cdot,t) \in C([0,\infty); H^1(R))$. Здесь $H^1(R)$ - пространство Соболева со стандартной нормой

$$\|f\|_1^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx + \int |df/dx|^2 dx .$$

Введем псевдометрику

$$d(u,\phi) = \inf_{(\eta,\zeta)\in R^2} \|u(x,t) - e^{i\eta}\phi(x-\zeta,t)\|_1 . \qquad /5/$$

Основным результатом настоящей работы является

Теорема. Для каждого $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $u(x,t)$ является решением задачи /1/, /4/ и $d(u,\phi)|_{t=0} < \delta$, то $d(u,\phi) < \epsilon$ для всех $t \in [0,\infty)$.

Устойчивость решения вида стационарной волны относительно псевдометрики /5/ в [3] называется "орбитальной устойчивостью", так как она отражает устойчивость решения с точностью до сдвига и вращения /в действительном случае это устойчивость "формы", то есть устойчивость с точностью до сдвига, см., напр., уравнения Кортевега-де Фриза [9]/.

Устойчивость относительно псевдометрики /5/ является естественной для уравнения /1/, так как решения /1/ инвариантны относительно сдвига и вращения в том смысле, что если $u(x,t)$ - решение /1/, то $e^{i\eta}u(x-\zeta,t)$ тоже является его решением. Можно легко показать, что решение $\phi(x,t)$ неустойчиво в более сильной метрике $\|\phi - u\|_1 = d_1(u,\phi)$.

При доказательстве теоремы мы развиваем идеи метода, предложенного Бенжаменом [9,10] /другую модификацию см. в [11]/.

Существенную роль в дальнейшем будут играть следующие три функционала:

$$Q = i\int \bar{u}_x u\,dx \quad /\text{заряд}/, \qquad P = \int |u|^2 dx \quad /\text{масса}/,$$

$$E = \int (|u_x|^2 + a|u|^2 - (|u|^{2(p+1)})/(p+1))dx \qquad /\text{энергия}/,$$

инвариантные по времени, когда решение /1/ $u(x,t)$ принадлежит $C([0,\infty); H^1(R))$.

Положим $M = E + (\alpha+\omega^2)P - 2\omega Q$, то есть

$$M(u) = \int_{-\infty}^{\infty} [|u_x|^2 + (a+\alpha+\omega^2)|u|^2 - \frac{|u|^{2(p+1)}}{p+1} - 2i\omega\bar{u}_x u]dx .$$

Введем для фиксированного $q > 0$ обозначения:

$$d_q^2(u,\phi) = \inf_{(\eta,\zeta)\in R^2} (\|u_x(x,t) - e^{i\eta}\phi_x(x-\zeta,t)\|^2 + q\|u(x,t) - e^{i\eta}\phi(x-\zeta,t)\|^2). \qquad /6/$$

Утверждение теоремы получим как следствие следующего предложения.

Предложение. Существуют положительные константы K, q, δ_0 такие, что если u - решение /1/, /4/, $P(u) = P(\phi)$ и $d_q(u,\phi) < \delta_0$, то $M(u) - M(\phi) \geq K d_q^2(u,\phi)$.

Доказательство этого утверждения получим, оценивая снизу вторую вариацию $M(\phi)$ при помощи подходящих спектральных задач.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Лемма. Пусть а/ $d_q^2(u,\phi) < 2q\|\phi\|^2$ - тогда inf в /6/ достигается в конечной точке (η,ζ); б/ $d_q(u,\phi)$ является непрерывной функцией от $t \in [0,\infty)$.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству лемм 1,2 в [10].

Зафиксируем $t \in [0,\infty)$ и предположим, что минимум в /6/ достигается в точке $(\eta,\zeta) = (\eta(t), \zeta(t))$. Чтобы оценить $\Delta M = M(u) - M(\phi)$, положим $u(x,t) = e^{i\eta}\phi(x-\zeta,t) + h(x,t)$ и введем обозначения:

$$F(s) = -\frac{1}{p+1}|e^{i\eta}\phi + hs|^{2(p+1)}, \quad \xi = \omega(x-\zeta) + (\alpha+\omega^2)t + \eta .$$

Тогда

$$\frac{1}{p+1}(-|u|^{2(p+1)} + |\phi|^{2(p+1)}) =$$

$$= F(1) - F(0) = F'(0) + \frac{F''(0)}{2} + F''(s) - F''(0) ,$$

где

$$0 \leq s \leq 1, \quad F'(0) = -2|\phi|^{2p}\operatorname{Re}(e^{i\eta}\phi\bar{h}),$$

$$\frac{1}{2}F''(0) = -|\phi|^{2p}[p\operatorname{Re}(h^2 e^{-2i\xi}) + (p+1)|h|^2].$$

Подставляя и интегрируя по частям в слагаемых, содержащих h_x и $\bar{h}_x$, получаем

$$\Delta M = 2\operatorname{Re}\int e^{i\eta}\bar{h}[-\phi_{xx} + (a+\alpha+\omega^2 - |\phi|^{2p})\phi + 2i\omega\phi_x]dx +$$

$$+ \int [|h_x|^2 + (a+\alpha+\omega^2 - (p+1)|\phi|^{2p})|h|^2 - 2i\omega\bar{h}_x h -$$

$$- p|\phi|^{2p}\operatorname{Re}(h^2 e^{-2i\xi})]dx + \int\frac{F''(s) - F''(0)}{2} = I_1 + I_2 + I_3 .$$

Дифференцируя два раза по x в /2/ и используя тот факт, что r удовлетворяет уравнениям

$$r'' = (a+\alpha)r - r^{2p+1}, \quad (r')^2 = (a+\alpha)r^2 - \frac{r^{2p+2}}{p+1}, \qquad /7/$$

получим, что $I_1 = 0$.

В I_2 положим $h = (h_1 + ih_2)e^{i\xi}$. Тогда

$$|h|^2 = h_1^2 + h_2^2,$$

$$|h_x|^2 = h_{1x}^2 + h_{2x}^2 + 2\omega(h_1 h_{2x} - h_2 h_{1x}) + \omega^2(h_1^2 + h_2^2),$$

$$\mathrm{Re}(h^2 e^{-2i\xi}) = h_1^2 - h_2^2,$$

$$\int \bar{h}_x h\,dx = i\int [h_2 h_{1x} - h_1 h_{2x} - \omega(h_1^2 + h_2^2)]\,dx.$$

Таким образом, для I_2 находим

$$I_2 = \int [h_{1x}^2 + (a + \alpha - (2p+1)r^{2p})h_1^2]\,dx + \int [h_{2x}^2 + (a + \alpha - r^{2p})h_2^2]\,dx = M_1 + M_2.$$

Рассмотрим самосопряженные в $L_2(R)$ операторы L_1 и L_2, порожденные дифференциальными выражениями

$$L_1 = -\frac{d^2}{dx^2} + a + \alpha - (2p+1)r^{2p}, \quad L_2 = -\frac{d^2}{dx^2} + a + \alpha - r^{2p}.$$

Непрерывный спектр L_1 и L_2 совпадает с множеством $[a+\alpha, \infty)$. Используя /7/, нетрудно проверить, что L_1 имеет собственные числа $\lambda_0 = -p(p+2)(a+\alpha)$ и $\lambda_1 = 0$ с собственными функциями $\phi_0 = r^{p+1}$ и $\phi_1 = r'$. L_2 имеет собственное число нуль с собственной функцией r. Если $p \geq 1$, то у операторов L_1 и L_2 нет других собственных чисел. Если $0 < p < 1$, кроме того, существует конечное число положительных собственных чисел операторов L_1 и L_2. Самым маленьким из них является $p(2-p)(a+\alpha)$ /с собственными функциями

$$r^{p+1} - \frac{2(a+\alpha)(p+1)}{p+2} r^{1-p}$$

для L_1 и $r^{-p}r'$ для L_2 /. В дальнейшем, применяя спектральное разложение операторов L_1 и L_2, получим оценку снизу для M_1 и M_2. Оценка M_1 является более сложной из-за существования отрицательного собственного числа λ_0 у оператора L_1.

А. Оценка для M_2

Теперь воспользуемся тем, что минимум правой части /6/ достигается в точке (η, ζ) и, следовательно, производная по η в этой точке равна нулю. Отсюда мы получим дополнительное условие, связывающее h_2 и собственную функцию r:

$$\begin{aligned} 0 &= i\int [h_x e^{-i\eta}\bar{\phi}_x - \bar{h}_x e^{i\eta}\phi_x + q(he^{-i\eta}\bar{\phi} - \bar{h}e^{i\eta}\phi)]\,dx = \\ &= 2\,\mathrm{Im}\int(-\phi_{xx} + q\phi)e^{i\eta}\bar{h}\,dx = \\ &= 2\,\mathrm{Im}\int [(r^{2p} + \omega^2 - a - \alpha + q)r - 2i\omega r'](h_1 - ih_2)\,dx, \end{aligned} \qquad /8/$$

$$\int [(r^{2p} + \omega^2 - a - \alpha + q)rh_2 + 2\omega r' h_1]\,dx = 0.$$

Полагая в /8/ $h_2 = \beta r + \Theta$, где $\beta = \mathrm{const}$, $\int r\Theta\,dx = 0$, получаем

$$\beta\left(\frac{p(a+\alpha)}{p+2} + \omega^2 + q\right)||r||^2 + \int (r^{2p+1}\Theta + 2\omega r' h_1)\,dx = 0,$$

следовательно

$$|\beta|\,||r|| \leq \frac{||r^{2p+1}||\,||\Theta|| + 2\omega||r'||\,||h_1||}{[p(a+\alpha)(p+2)^{-1} + \omega^2 + q]\,||r||} \leq K_0(||\Theta|| + ||h_1||), \qquad /9/$$

здесь $K_0 = K_0(q) \to 0$ при $q \to \infty$.

Так как Θ ортогональна к собственной функции r, то из спектрального разложения оператора L_2 вытекает, что $M_2(h_2) = M_2(\Theta) \geq \lambda\,||\Theta||^2$, где $\lambda = \lambda(p)$ $(\lambda(p) = p(2-p)(a+\alpha)$ при $0 < p < 1$, $\lambda(p) = a + \alpha$ при $1 \leq p \leq 3/2)$. Тогда в силу /9/ получаем нужную оценку

$$M_2 \geq \frac{\lambda}{2(K_0+1)^2}||h_2||^2 - \lambda\left(\frac{K_0}{K_0+1}\right)^2 ||h_1||^2. \qquad /10/$$

Б. Оценка для M_1

Положим

$$h_1 = \beta r^{p+1} + \gamma r' + \Theta_1, \quad r = \nu r^{p+1} + \psi, \qquad /11/$$

где $\int r^{p+1}\Theta_1\,dx = \int r'\Theta_1\,dx = \int r^{p+1}\psi\,dx = 0$, $\beta, \gamma, \nu = \mathrm{const}$.

В силу ортогональности Θ_1 к собственным функциям $\phi_0 = r^{p+1}$ и $\phi_1 = r'$ имеем

$$M_1(h_1) = \lambda_0\beta^2||r^{p+1}||^2 + M_1(\Theta_1) \geq \lambda_0\beta^2||r^{p+1}||^2 + \lambda||\Theta_1||^2. \qquad /12/$$

Основной трудностью при оценке M_1 является появление отрицательного члена $\lambda_0\beta^2||r^{p+1}||^2$. Воспользуемся условием

$$P(u) = \int |h + e^{i\eta}\phi|^2 dx = \int |\phi|^2 dx = P(u) \qquad \text{или}$$

$$\operatorname{Re}\int e^{i\eta}\phi\bar{h}\,dx + \frac{1}{2}\|h\|^2 = 0, \qquad \int r h_1 dx + \frac{1}{2}\|h\|^2 = 0,$$

$$\nu\beta\|r^{p+1}\|^2 + \int \psi\Theta_1 dx + \frac{1}{2}\|h\|^2 = 0,$$

$$\beta\|r^{p+1}\| = -(\nu\|r^{p+1}\|)^{-1}\left(\frac{1}{2}\|h\|^2 + \int\psi\Theta_1 dx\right).$$

Теперь мы докажем, что существует число σ, $0<\sigma<1$, такое, чтобы при $0<p<3/2$ имело место неравенство

$$\frac{|\lambda_0|\,\|\psi\|^2}{\lambda\nu^2\|r^{p+1}\|^2} < 1-\sigma. \qquad /13/$$

Из /13/ вытекает

$$|\lambda_0|\beta^2\|r^{p+1}\| \le \frac{|\lambda_0|\frac{\sigma+1}{4\sigma}\|h\|^4 + |\lambda_0|(1+\sigma)\|\psi\|^2\,\|\Theta_1\|^2}{\nu^2\|r^{p+1}\|^2} \le \qquad /14/$$

$$\le c_0\|h\|^4 + \lambda(1-\sigma^2)\|\Theta_1\|^2.$$

Отсюда в силу /12/ имеем

$$M_1(h_1) \ge \lambda\sigma^2\|\Theta_1\|^2 - c_0\|h\|^4. \qquad /15/$$

Докажем /13/. Так как $\|\psi\|^2 = \|r\|^2 - \nu^2\|r^{p+1}\|^2$, имеем

$$\frac{\|\psi\|^2}{\nu^2\|r^{p+1}\|^2} = \frac{\|r\|^2}{\nu^2\|r^{p+1}\|^2} - 1 = \frac{\|r\|^2\,\|r^{p+1}\|^2}{(\int r^{p+2}dx)^2} - 1 =$$

$$= \frac{2}{p+2}\left(\int (\operatorname{ch} y)^{-2/p} dy\right)^2 \left(\int (\operatorname{ch} y)^{-1-2/p} dy\right)^{-2} - 1.$$

В силу равенства

$$\int (\operatorname{ch} y)^{-\mu} dy = \sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\left(\Gamma\left(\frac{\mu+2}{2}\right)\right)^{-1}$$

/13/ можно переписать в виде

$$\frac{|\lambda_0|}{\lambda}\left[\frac{2}{p+2}\left(\frac{\Gamma(1/p)}{\sqrt{p}\,\Gamma(1/p+1/2)}\right)^4 - 1\right] \le 1-\sigma.$$

Если положим для удобства $s = 1/p$, $s \ge 2/3$, $\mu(s) = (\mu(s) = 2^{-1/4}$ при $s>1$ и $\mu(s) = (2s)^{1/4}(s+1)^{-1/2}$ при $2/3 \le s \le 1)$, то верхнее неравенство сводится к

$$f(s) \equiv \mu(s)\sqrt{s}\,\Gamma(s)\,(\Gamma(s+1/2))^{-1} \le 1-\sigma, \quad s \ge 2/3$$

/с каким-то другим σ, $0<\sigma<1$ /. Теперь применим формулу Стирлинга:

$$\Gamma(s) = e^{-s}s^{s-1/2}(2\pi)^{1/2}\left(1 + \frac{1}{12s} + \frac{1}{288s^2} - \frac{139}{51840s^3} + s_1\right), \ |s_1| < \frac{139}{51840s^3},$$

$$f(s) \le e^{1/2}\mu(s)\left(1+\frac{1}{2s}\right)^{-s}\left(1+\frac{1}{12s}+\frac{1}{288s^2}\right)\Bigg(1 + \frac{1}{12(s+1/2)} +$$

$$+ \frac{1}{288(s+1/2)^2} - \frac{278}{51840(s+1/2)^3}\Bigg)^{-1} =$$

$$= e^{1/2}\mu(s)\left(1+\frac{1}{2s}\right)^{-s}\left(1 + \frac{12s^2 + 14\frac{49}{90}s^2 + 3\frac{3}{4}s + \frac{1}{8}}{288s^5 + 456s^4 + 241s^3 + 40\frac{43}{45}s^2}\right) \equiv$$

$$\equiv e^{1/2}\mu(s)\left(1+\frac{1}{2s}\right)^{-s} f_1(s).$$

Исследуя знак производных функций $f_1(s)$ и $f_2(s) = \mu(s)(1+1/2s)^{-s}$, можно проверить, что f_1 и f_2 являются монотонно невозрастающими функциями при $s \ge 2/3$, следовательно,

$$f(s) \le e^{1/2} f_2(2/3)\,f_1(2/3) = 0{,}999912\ldots = 1-\sigma.$$

Тем самым неравенство /13/ доказано. Чтобы получить окончательную оценку для M_1, необходимо в /15/ выразить $\|\Theta_1\|$ через $\|h_1\|$. Обозначим Θ через $h_1 - \gamma r'$. Тогда из /11/ и /14/ вытекает

$$\|\Theta\|^2 = \beta^2\|r^{p+1}\|^2 + \|\Theta_1\|^2 \le \frac{c_0}{|\lambda_0|}\|h\|^4 + \left(\frac{\lambda(1-\sigma^2)}{|\lambda_0|} + 1\right)\|\Theta_1\|^2.$$

Отсюда, используя /15/, получаем

$$M_1(h_1) \ge \frac{\lambda\sigma^2}{2}\|\Theta\|^2 - 2c_0\|h\|^4. \qquad /16/$$

Далее проведем анализ, аналогичный изложенному при получении оценки для M_2. Приравнивая к нулю производную по η $d_q^2(u,\phi)$ в точке минимума, находим

$$0 = 2\operatorname{Re}\int e^{i\eta}(\bar{h}_x\phi_{xx} + q\bar{h}\phi_x)dx = 2\operatorname{Re}\int e^{i\eta}(-\phi_{xxx} + q\phi_x)\bar{h}\,dx =$$

$$= \int [(5\omega^2 - a - \alpha + (2p+1)r^{2p} + q)r'h_1 + \omega(3(\omega^2 - a - \alpha + r^{2p}) + q)rh_2]dx.$$

Определяя $\int qrh_2dx$ из /8/ и подставляя его во вторую часть последнего равенства, получим

$$\int[(3\omega^2 - a - \alpha + (2p+1)r^{2p} + q)r'h_1 + 2\omega(\omega^2 - a - \alpha + r^{2p})rh_2]dx = 0.$$

Отсюда, так как $h_1 = \gamma r' + \Theta$, $\int r'\Theta dx = 0$ /в силу /11//, вытекает условие

$$\gamma\left(\frac{4p^2+3p}{3p+2}(a+\alpha)+3\omega^2+q\right)||r||^2 + \int[(2p+1)r^{2p}r'\Theta + 2\omega(\omega^2 - a - \alpha + r^{2p})rh_2]dx = 0.$$

С учетом этого условия, так же как при оценке M_2, имеем $||h_1|| \le (K_1+1)||\Theta|| + K_1||h_2||$, где $K_1 = K_1(q) \to 0$ при $q \to \infty$. Подставляя эту оценку в /16/, выводим окончательно для M_1:

$$M_1 \ge \frac{\lambda\sigma^2}{4(K_1+1)^2}||h_1||^2 - \frac{\lambda\sigma^2K_1^2}{2(K_1+1)^2}||h_2||^2 - 2c_0||h||^4. \qquad /17/$$

B. Оценка для ΔM

После объединения /10/ и /17/ имеем

$$M_1 + M_2 \ge \lambda\left[\left(\frac{\sigma^2}{4(K_1+1)^2} - \frac{K_0^2}{(K_0+1)^2}\right)||h_1||^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{2(K_0+1)^2} - \frac{\sigma^2K_1^2}{2(K_1+1)^2}\right)||h_2||^2 - 2c_0||h||^4.\right.$$

Зафиксируем q так, чтобы $K_0 \le \sigma/4$, $K_1 \le 1/4$. Несложно показать, что, выбирая q, можно положить $q = q_0[(a+\alpha)^{3/2} + \omega^3](a+\alpha)^{-1/2}$, где q_0 является константой, зависящей только от p.

Тогда получим $M_1 + M_2 \ge \lambda\sigma^2/9\ ||h||^2 - 2c_0||h||^4$.

С другой стороны, оценивая непосредственно I_2, имеем

$$I_2 \ge ||h_x||^2 + \int[a+\alpha+\omega^2 - (2p+1)r^{2p}]|h|^2dx - 2|\omega|\int|h_x|\,|h|\,dx \ge$$

$$\ge \frac{1}{2}||h_x||^2 + \int[a+\alpha-\omega^2 - (2p+1)r^{2p}]|h|^2dx,$$

следовательно, $I_2 \ge \frac{1}{2}||h_x||^2 - c_1||h||^2$, где $c_1 = (a+\alpha)(2p^2+3p)+\omega^2$.

Пусть $0 < K < 1/2$, в этом случае

$$\Delta M \ge 2KI_2 + (1-2K)(M_1+M_2) - |I_3| \ge$$

$$\ge K||h_x||^2 + \left((1-2K)\frac{\lambda\sigma^2}{9} - 2Kc_1\right)||h||^2 - (2c_0(1-2K)||h||^4 + |I_3|).$$

Выберем K таким образом, чтобы $2qK = (1-2K)\lambda\sigma^2/9 - 2Kc_1$, то есть $K = (\tfrac{1}{2}\lambda\sigma^2(\lambda\sigma^2 + 9q + 9c_1)^{-1} > 0$. Тогда имеем оценку

$$\Delta M \ge Kd_q^2(u,\phi) + (qK||h||^2 - 2c_0(1-2K)||h||^4 - |I_3|).$$

Для того чтобы завершить доказательство предложения, покажем, что $\delta_0 > 0$ можно выбрать таким образом, чтобы при $d_q(u,\phi) < \delta_0$ слагаемое в скобках было неотрицательным /до сих пор δ_0 удовлетворяло только условию $\delta_0 \le (2q)^{1/2}||\phi||$, необходимому для леммы a/. Действительно, полагая $z = e^{i\gamma}\phi + hs$, находим

$$1/2\ |F(s) - F(0)| = ||z|^{2p}(pRe(h^2e^{-2i\arg z}) + (p+1)|h|^2) -$$

$$- |b|^{2p}(pRe(h^2e^{-2i\arg b}) + (p+1)|h|^2)| \le$$

$$\le (p+1)|h|^2\,||z|^{2p} - |b|^{2p}| + p|h|^2\,||z|^{2p}e^{-2i\arg z} - |b|^{2p}e^{-2i\arg b}|.$$

Так как $|z|^{2p}$ и $|z|^{2p}e^{-2i\arg z}$ являются непрерывными функциями, то можно выбрать δ_1 достаточно маленьким, чтобы для всех комплексных z, b, $|b| \le \max|\phi|$, $|z - b| \le \delta_1$ имело место $1/2\,|F(s) - F(0)| \le kq/2\ |h|^2$. Таким образом, если $d_q(u,\phi) \le 2^{1/2}q^{1/4}\delta_1$, то, используя неравенство Соболева, имеем

$$|z - b| \le |h| \le 2^{1/2}q^{1/4}d_q(u,\phi) \le \delta_1$$

и, следовательно, $|I_3| \le (Kq/2)\,||h||^2$. Наконец, если $d_q(u,\phi) \le (q/2)\,(K/c_0)^{1/2}$, то

$$2c_0||h||^4 \le (2c_0/q)\,d_q^2(u,\phi)\,||h||^2 \le \frac{Kq}{2}||h||^2.$$

Выбирая

$$\delta_0 = \min\left((2q)^{1/2}||\phi||,\ 2^{1/2}q^{1/4}\delta_1,\ \frac{q}{2}\left(\frac{K}{c_0}\right)^{1/2}\right),$$

приходим к выводу, что если $d_q(u,\phi) < \delta_0$, $t \in [0,\infty)$, то $\Delta M \ge Kd_q^2(u,\phi)$. Предложение доказано.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Сначала мы докажем теорему при дополнительном условии $P(u) = P(\phi)$. Пусть K, q, δ_0 выбраны в соответствии с предложением. Так как ΔM не зависит от t, $t \in [0,\infty)$, то существует константа m такая, что $\Delta M \leq md^2(u,\phi)|_{t=0}$. В дальнейшем, не ограничивая общности, будем считать, что $m \geq 1$, $q \geq 1$.

Пусть $\epsilon > 0$, $\delta = \min((K/mq)^{1/2}(\delta_0/2), (K/m)^{1/2}\epsilon)$ и пусть $d(u,\phi)|_{t=0} < \delta$, тогда $d_q(u,\phi)|_{t=0} \leq q^{1/2} d(u,\phi)|_{t=0} < \delta_0/2$ и из леммы 6 вытекает, что существует число $T_0 > 0$ такое, что $d_q(u,\phi) < \delta_0$, $t \in [0, T_0)$. В этом случае в силу доказанного предложения $\Delta M \geq K d_q^2(u,\phi)$, $t \in [0, T_0)$.

Пусть T_{max} является самым большим числом, таким, что $\Delta M \geq K d_q^2(u,\phi)$, $t \in [0, T_{max})$. Допустим, что $T_{max} < \infty$, тогда при $t \in [0, T_{max}]$ имеем

$$d_q^2(u,\phi) \leq \frac{\Delta M}{K} \leq \frac{m}{K} d(u,\phi)|_{t=0} < \frac{m}{K}\delta^2 \leq \frac{\delta_0^2}{4}.$$

Применяя еще раз лемму 6, получаем, что существует число $T_1 > T_{max}$ такое, что $d_q(u,\phi) < \delta_0$, $t \in [0, T_1)$. В силу предложения это противоречит допущению $T_{max} < \infty$, следовательно, $T_{max} = \infty$ и $\Delta M \geq K d_q^2(u,\phi) \geq K d^2(u,\phi)$, $t \in [0,\infty)$. Отсюда

$$d^2(u,\phi) \leq \frac{\Delta M}{K} \leq \frac{m}{K}\delta^2 < \epsilon^2, \quad t \in [0,\infty),$$

и тем самым теорема доказана.

Теперь освободимся от ограничения $P(u) = ||u||^2 = ||\phi||^2 = P(\phi)$. Имеем $||\phi|| = c_p(a+\alpha)^{(2-p)/4p}$, где константа c_p зависит только от p. Пусть ϕ_β имеет вид /2/, /3/ с β вместо α и β выбрана так, что $a+\beta > 0$ и $||\phi_\beta|| = c_p(a+\beta)^{(2-p)/4p} = ||u||$.

Введем обозначения $r_\beta = |\phi_\beta|$. Тогда, подставляя в интеграл /минимум которого по (η,ζ) является $d^2(\phi_\beta,\phi)$/ $\eta = (\beta-\alpha)t$, $\zeta = 0$, получим неравенство $d^2(\phi_\beta,\phi) \leq (\omega^2+1)||r - r_\beta||^2 + ||r' + r'_\beta||^2$.

Ясно, что если $|\alpha - \beta|$ достаточно маленькое /например, $|\alpha-\beta| \leq (a+\alpha)/2$/, имеет место $|r - r_\beta| \leq |\alpha-\beta|\rho$, где $\rho \in L_2(R)$ и $||\rho||$ не зависит от β /эвентуально зависит от α, p и a/. Это следует из /3/ и из неравенства

$$\frac{1}{2} \leq \frac{a+\beta}{a+\alpha} \leq \frac{3}{2}. \qquad /18/$$

Аналогичное утверждение имеет место и для $|r' - r'_\beta|$. Следовательно, $d(\phi_\beta,\phi) \leq c|\beta-\alpha|$, $t \in [0,\infty)$, где c не зависит от β, t.

Пусть $\epsilon > 0$. Из неравенства

$$\big|\, ||\phi_\beta|| - ||\phi||\,\big| = \big|\, ||u|| - ||\phi||\,\big| \leq d(u,\phi)|_{t=0} < \delta$$

вытекает

$$\left(1 - \frac{\delta}{||\phi||}\right)^{4p/(2-p)} \leq \left(\frac{||\phi_\beta||}{||\phi||}\right)^{4p/(2-p)} \leq \left(1 + \frac{\delta}{||\phi||}\right)^{4p/(2p-2)}.$$

Так как $4p/(2-p) \leq 12$, из последнего неравенства вытекает, что $1 - \delta_1 \leq (a+\beta)/(a+\alpha) \leq 1 + \delta_1$, где $\delta_1 = (1+\delta/||\phi||)^{12} - 1$. Отсюда $|\beta - \alpha| \leq \delta_1(a+\alpha)$ и, следовательно,

$$d(u,\phi_\beta)|_{t=0} \leq d(u,\phi)|_{t=0} + d(\phi_\beta,\phi)|_{t=0} < \delta + c(a+\alpha)\delta_1 = \delta_0.$$

Выберем δ достаточно маленьким и применим уже доказанную часть теоремы:

$$d(u,\phi_\beta)|_{t=0} < \delta_0 \Rightarrow d(u,\phi_\beta) < \frac{\epsilon}{2}, \quad t \in [0,\infty).$$

В силу /18/ ясно, что мы можем выбрать δ_0 независимо от β /см. доказательство предложения и выбор констант K, q, δ_0/.

Тогда, выбирая $\delta > 0$ достаточно маленьким для всех $t \in [0,\infty)$, получаем

$$d(u,\phi) \leq d(u,\phi_\beta) + d(\phi_\beta,\phi) < \frac{\epsilon}{2} + c(a+\alpha)\delta_1 < \epsilon.$$

Таким образом, теорема доказана полностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров В.Е., Шабат А.Б. ЖЭТФ, 1971, 61, № 1, с.118-134.
2. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. "Мир", М., 1977.
3. Cazenave T., Lions P.L. Comm.Math.Phys., 1982, 85, No.4, p.549-561.
4. Makhankov V. Comput.Phys.Comm., 1980, 21, p.1-49.
5. Маханьков В.Г. ЭЧАЯ, 1983, т.14, вып.1, с.124-180.
6. Ginibre J., Velo G. J.Func.Anal., 1979, 32, No.1, p.L-32.
7. Ginibre J., Velo G. Ann.Inst.H.Poincare, 1978, Sect.A28, No.3, p.287-316.
8. Strauss W. In: Proc. Int.Symp.Inst.Mat., Univ.Fed. Rio de Janeiro (Rio de Janeiro, 1977). North-Holland Math. Studies, 1978, 30, p.452-465.
9. Benjamin T.B. Proc.Roy.Soc.Lond., 1972, A328, p.153-183.
10. Bona J.L. Proc.Roy.Soc.Lond., 1975, A344, p.363-374.
11. Henry D., Perez J., Wreszinski W.F. Comm.Math.Phys., 1982, 85, No.3, p.351-361.

Рукопись поступила в издательский отдел
11 ноября 1983 года.

Жидков Е.П., Илиев И.Д., Кирчев К.П. Р5-83-771
Устойчивость решения вида "уединенной волны" для нелинейного уравнения Шредингера со степенной нелинейностью

Доказана орбитальная устойчивость решения вида "уединенной волны" для нелинейного уравнения Шредингера

$$iu_t = -u_{xx} + u(a - |u|^{2p}), \quad 0 < 2p \le 3, \quad a \in R.$$

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Zhidkov E.P., Iliev I.D., Kirchev K.P. P5-83-771
Stability of Solitary Waves for Some Nonlinear Schrödinger Equations

There are proved the orbital stability of solitary waves for nonlinear Schrödinger equations

$$iu_t = -u_{xx} + u(a - |u|^{2p}), \quad 0 < 2p \le 3, \quad a \in R.$$

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983