объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р5-83-520

Н.Ф.Трускова

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ПОЛИСФЕРОИДАЛЬНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Направлено в журнал "Ядерная физика"

1983

1. ВВЕДЕНИЕ

Полисфероидальные периодические функции введены в работе [1]. Они возникают при решении уравнения Гельмгольца в системах координат N-мерных ($N \geq 4$) вытянутых или сжатых эллипсоидов или гиперболоидов вращения и удовлетворяют уравнениям

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial v^2} + \frac{2(\mu - \nu + (\nu + \mu + 1)\cos 2v)}{\sin 2v} \frac{\partial}{\partial v} - \right.$$
$$\left. - 2q\cos 2v + \lambda_n^{(\nu,\mu)}(q)\right] ps_n^{(\nu,\mu)}(v, q) = 0\ , \tag{1.1a}$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{2(\mu - \nu + (\nu + \mu + 1)\,\mathrm{ch}2u)}{\mathrm{sh}2u} \frac{\partial}{\partial u} + \right.$$
$$\left. + 2q\,\mathrm{ch}2u - \lambda_n^{(\nu,\mu)}(q)\right] Ps_n^{(\nu,\mu)}(u, q) = 0\ , \tag{1.1б}$$

где

$$\nu > -1,\ \mu > -1,\ n = 0, 1, 2, \ldots,\ 0 \leq v \leq \pi,\ \ 0 \leq u < \infty,\ 0 \leq q^2 < \infty .$$

Функции $ps_n^{(\nu,\mu)}(v, q)$ являются целыми четными функциями переменной v, реальны и периодичны с периодом π. Каждая из них имеет n нулей на отрезке $0 < v < \pi/2$ и не равна нулю в точках $v = \ell\pi/2$, где $\ell = 0, 1, 2, \ldots$ На интервале $[0, \pi/2]$ эти функции образуют полную ортонормированную систему в классе квадратично-интегрируемых функций с весовым множителем $(\cos v)^{2\nu+1}(\sin v)^{2\mu+1}$. В случае замены $q \to -q$ справедливы равенства:

$$\lambda_n^{(\nu,\mu)}(-q) = \lambda_n^{(\mu,\nu)}(q),\ \ ps_n^{(\nu,\mu)}(v, -q) = (-1)^n\, ps_n^{(\mu,\nu)}(-v + \pi/2, q)\ .$$

Функции $Ps_n^{(\nu,\mu)}(u, q)$ являются аналитическим продолжением $ps_n^{(\nu,\mu)}(v, q)$ в область чисто мнимых значений $v = iu$ и называются модифицированными полисфероидальными периодическими функциями. Они образуют на луче $[0, \infty)$ полную ортогональную систему в классе квадратично-интегрируемых функций с весовым множителем $(\mathrm{ch}\,u)^{2\nu+1}(\mathrm{sh}\,u)^{2\mu+1}$.

Различные частные случаи полисфероидальных периодических функций используются при решении многих физических задач: задачи двух центров квантовой механики [2-4], задачи трех тел с кулоновским взаимодействием[4,5], задачи рассеяния и дифракции скалярных и электромагнитных волн на вытянутых или сжатых эллипсоидах вращения[6-8], задачи на собственные колебания применяемых в лазерах открытых резонаторов [4,9,10] и других [4,11,12]. Более подробно физические приложения названных функций, а также их основные свойства, разложения, асимптотики рассмотрены в работе [1].

Там, в частности, также установлено, что в случае $\nu = \pm 1/2$ или $\mu = \pm 1/2$ функции $Ps_n^{(\nu,\mu)}(u, q)$, $ps_n^{(\nu,\mu)}(v, q)$ выражаются через вытянутые или сплюснутые сфероидальные функции [4,6,11,13], в случае $\mu = 0$ - через гиперсфероидальные /или обобщенные сфероидальные/ функции [9,10,14,15], в случае $\nu = 0,1,2,\dots$ - через обобщенные гиперсфероидальные функции [16,17], в случае $\nu = \mu = 0,1,2,\dots$ - через угловую и радиальную волновые функции водородоподобного атома с энергией $E = 0$ в сфероидальной системе координат, в случае $q = 0$ - через полиномы Якоби. Другие частные случаи этих функций приведены в [1]. Алгоритм их вычисления на ЭВМ и результаты численных расчетов представлены в [18].

В данной работе получены интегральные уравнения и соотношения для функций $Ps_n^{(\nu,\mu)}(u, q)$, $ps_n^{(\nu,\mu)}(v, q)$, а также для введенных здесь модифицированных полисфероидальных функций второго рода $Fs_n^{(\nu,\mu)}(u, q)$, отвечающих второму линейно-независимому от $Ps_n^{(\nu,\mu)}(u, q)$ решению уравнения /1.1б/. Ядра соответствующих интегральных операторов удовлетворяют четырехмерному уравнению Гельмгольца в бисфероидальной системе координат. Для ограниченных в определенных областях ядер найдены разложения в виде рядов по произведениям полисфероидальных периодических функций. Такие разложения вместе с полученным в работе разложением функции Грина четырехмерного уравнения Гельмгольца по произведениям четырех полисфероидальных функций являются формулами сложения для этих функций.

2. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ

В работе [1] получено разложение

$$\frac{Ps_n^{(\nu,\mu)}(u,q)\, ps_n^{(\nu,\mu)}(v,q)}{\kappa_n^{(\nu,\mu)}} = \sum_{r=0}^{\infty} A_{r,n}^{(\nu,\mu)} \frac{P_r^{(\nu,\mu)}(-\cos 2\theta) J_{\nu+\mu+2r+1}(kR)}{(kR)^{\nu+\mu+1}} . \qquad /2.1/$$

Здесь $P_r^{(\nu,\mu)}(-\cos 2\theta)$ - полиномы Якоби, $J_{\nu+\mu+2r+1}(kR)$ - функции Бесселя первого рода, $kR = c\cdot(\mathrm{ch}^2 u + \cos^2 v - 1)^{1/2}$, $\cos\theta = c\cdot \mathrm{ch}\, u \cos v/(kR)$,

$$\kappa_n^{(\nu,\mu)} = (ps_n^{(\nu,\mu)}(0,q)\, ps_n^{(\nu,\mu)}(\pi/2,q)\, 2^{\nu+\mu+1}\Gamma(\nu+\mu+2))/A_{0,n}^{(\nu,\mu)}$$

$$c = 2\sqrt{q} .$$

Коэффициенты $A_{r,n}^{(\nu,\mu)}$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\alpha_r A_{r+1,n}^{(\nu,\mu)} + \beta_r A_{r,n}^{(\nu,\mu)} + \gamma_r A_{r-1,n}^{(\nu,\mu)} = 0, \quad A_{-1,r}^{(\nu,\mu)} = 0, \quad r = 0,1,2,\dots,$$

где α_r, β_r, γ_r являются известными функциями от r, ν, μ, q, $\lambda_n^{(\nu,\mu)}(q)$. Разложение /2.1/ абсолютно сходится при всех $\nu > -1$, $\mu > -1$, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le |kR| \le \infty$, $0 \le q^2 < \infty$.

В случае $v = 0$ из /2.1/ получаем

$$Ps_n^{(\nu,\mu)}(u,q) = \frac{\kappa_n^{(\nu,\mu)}}{ps_n^{(\nu,\mu)}(0,q)(c\cdot \mathrm{ch}\, u)^{\nu+\mu+1}} \times \qquad /2.2/$$

$$\times \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{r,n}^{(\nu,\mu)} \frac{\Gamma(r+\mu+1)}{r!\,\Gamma(\mu+1)} J_{\nu+\mu+2r+1}(c\cdot \mathrm{ch}\, u) .$$

В случае $v = \pi/2$ соответственно имеем

$$Ps_n^{(\nu,\mu)}(u,q) = \frac{\kappa_n^{(\nu,\mu)}}{ps_n^{(\nu,\mu)}(\pi/2,q)(c\cdot \mathrm{sh}\, u)^{\nu+\mu+1}} \times \qquad /2.3/$$

$$\times \sum_{r=0}^{\infty} A_{r,n}^{(\nu,\mu)} \frac{\Gamma(r+\nu+1)}{r!\,\Gamma(\nu+1)} J_{\nu+\mu+2r+1}(c\cdot \mathrm{sh}\, u) .$$

В пределе $u \to \infty$ из /2.2/ находим

$$Ps_n^{(\nu,\mu)}(u,q) \xrightarrow[u\to\infty]{} \kappa_n^{(\nu,\mu)}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\cos(c\cdot \mathrm{ch}\, u - (\nu+\mu+1)\pi/2 - \pi/4)}{(c\cdot \mathrm{ch}\, u)^{\nu+\mu+3/2}} . \qquad /2.4/$$

Полагая $u \to \infty$ в /2.1/ и используя /2.4/, получаем

$$ps_n^{(\nu,\mu)}(v,q) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{r,n}^{(\nu,\mu)} P_r^{(\nu,\mu)}(-\cos 2v) . \qquad /2.5/$$

Определим модифицированную полисфероидальную функцию второго рода $Fs_n^{(\nu,\mu)}(u, q)$ разложением

$$Fs_n^{(\nu,\mu)}(u,q) = \frac{\kappa_n^{(\nu,\mu)}}{ps_n^{(\nu,\mu)}(0,q)\,(c\cdot chu)^{\nu+\mu+1}} \times \qquad /2.6/$$

$$\times \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{r,n}^{(\nu,\mu)} \frac{\Gamma(r+\mu+1)}{r!\,\Gamma(\mu+1)} Y_{\nu+\mu+2r+1}(c\cdot chu),$$

где $Y_{\nu+\mu+2r+1}(c\cdot chu)$ - функция Бесселя второго рода, $|u|>0$, $c>0$. Функция /2.6/ удовлетворяет уравнению /1.1б/, в чем можно убедиться, подставляя /2.6/ в /1.1б/ и используя рекуррентные соотношения для функций Y_ν и коэффициентов $A_{r,n}^{(\nu,\mu)}$.

В случае $u\to\infty$ /2.6/ дает

$$Fs_n^{(\nu,\mu)}(u,q) \underset{u\to\infty}{\longrightarrow} \kappa_n^{(\nu,\mu)} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\sin(c\cdot chu-(\nu+\mu+1)\pi/2-\pi/4)}{(c\cdot chu)^{\nu+\mu+3/2}}. \qquad /2.7/$$

Обозначим для краткости произведение $(c\cdot chu)^{2\nu+1}\cdot(c\cdot shu)^{2\mu+1}$ через P, а функции $Fs_n^{(\nu,\mu)}(u,q)$, $Ps_n^{(\nu,\mu)}(u,q)$ - через Fs, Ps соответственно. Умножим /1.1б/ на $P\cdot Fs$, а соответствующее уравнение для Fs на $P\cdot Ps$ и вычтем одно выражение из другого. Интегрируя полученную разность по u от u до ∞, с учетом /2.4/ и /2.7/ находим

$$P\cdot\left(Ps\frac{\partial}{\partial u}Fs - Fs\frac{\partial}{\partial u}Ps\right) = \frac{2}{\pi}\left(\kappa_n^{(\nu,\mu)}\right)^2. \qquad /2.8/$$

Таким образом, функция Fs представляет собой второе линейно-независимое от Ps решение уравнения /1.1б/. Она удовлетворяет также разложению

$$\frac{Fs_n^{(\nu,\mu)}(u,q)\,ps_n^{(\nu,\mu)}(v,q)}{\kappa_n^{(\nu,\mu)}} = \sum_{r=0}^{\infty} A_{r,n}^{(\nu,\mu)} \frac{P_r^{(\nu,\mu)}(-\cos 2\theta)\,Y_{\nu+\mu+2r+1}(kR)}{(kR)^{\nu+\mu+1}}, \qquad /2.9/$$

которое можно получить, если подставить /2.9/ в /1.1/ и использовать рекуррентные соотношения для $A_{r,n}^{(\nu,\mu)}$, $P_r^{(\nu,\mu)}$, Y_ν.

Поскольку при $r\to\infty$ /1/

$$\left|\frac{A_{r+1,n}^{(\nu,\mu)}}{A_{r,n}^{(\nu,\mu)}}\,\frac{P_{r+1}^{(\nu,\mu)}(-\cos 2\theta)}{P_r^{(\nu,\mu)}(-\cos 2\theta)}\right| \to \frac{|q|}{4r^2}$$

и

$$\left|\frac{Y_{\nu+\mu+2r+3}(kR)}{Y_{\nu+\mu+2r+1}(kR)}\right| \to \frac{16r^2}{|kR|^2},$$

то, следовательно, ряд /2.9/ абсолютно сходится при всех $|kR|/|2q|>1$. В случае $v=0$ /2.9/ сводится к /2.6/.

Пусть функция $K(v,u,q)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$(L(v,q)+L(u,q))\,K(v,u,q)=0, \qquad /2.10/$$

где

$$L(v,q) = p^{-1}\frac{\partial}{\partial v}p\frac{\partial}{\partial v} - 2q\cos 2v, \quad p=(\cos v)^{2\nu+1}(\sin v)^{2\nu+1},$$

$$L(u,q) = P^{-1}\frac{\partial}{\partial u}P\frac{\partial}{\partial u} + 2q\,ch2u.$$

Если $K(v,u,q)$ выбрана таким образом, что

$$\left[p\cdot\left(ps_n^{(\nu,\mu)}(v,q)\frac{\partial}{\partial v}K(v,u,q) - K(v,u,q)\frac{\partial}{\partial v}ps_n^{(\nu,\mu)}(v,q)\right)\right]_0^{\pi/2}=0, \qquad /2.11/$$

то функция

$$f(u,q) = \int_0^{\pi/2} p\cdot K(v,u,q)\,ps_n^{(\nu,\mu)}(v,q)\,dv \qquad /2.12/$$

удовлетворяет уравнению /1.1б/.

Действительно, подействуем оператором $L(u,q)$ на правую и левую части равенства /2.12/ и используем при этом уравнение /2.10/. Интегрируя полученное выражение по частям, с учетом /2.11/ и /1.1а/ получаем

$$L(u,q)\,f(u,q) = -\int_0^{\pi/2} p\cdot ps_n^{(\nu,\mu)}(v,q)\,L(v,q)\,K(v,u,q)\,dv =$$

$$= -\int_0^{\pi/2} p\cdot K(v,u,q)\,L(v,q)\,ps_n^{(\nu,\mu)}(v,q)\,dv = \lambda_n^{(\nu,\mu)}(q)\,f(u,q).$$

Явный вид функции $f(u,q)$ можно получить, если учесть, что функция

$$W = K(v,u,q)\,(chu\cos v)^{\nu}\,(shu\sin v)^{\mu}\,\exp(\pm i\nu\alpha \pm i\mu\beta) \qquad /2.13/$$

является решением четырехмерного уравнения Гельмгольца

$$(\Delta + k^2)W = 0 \qquad /2.14/$$

в бисфероидальной системе координат

$$x_1 = f\,\mathrm{ch}u \cos v \cos\alpha, \qquad x_3 = f\,\mathrm{sh}u \sin v \cos\beta,$$
$$x_2 = f\,\mathrm{ch}u \cos v \sin\alpha, \qquad x_4 = f\,\mathrm{sh}u \sin v \sin\beta, \qquad /2.15/$$

где

$$0 \le u < \infty, \quad 0 \le v < \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le \alpha < 2\pi, \quad 0 \le \beta < 2\pi, \quad q = \frac{k^2 f^2}{4}.$$

Ядро $K(v, u, q)$ удовлетворяет, следовательно, уравнению

$$\Big[\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{(2\nu + 2\mu + 3)}{R}\frac{\partial}{\partial R} +$$
$$+ \frac{1}{R^2}\Big(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{2(\mu - \nu + (\nu + \mu + 1)\cos 2\theta)}{\sin 2\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big) + k^2\Big] K(v, u, q) = 0,$$

в котором R, θ те же, что и в /2.1/, и уравнению

$$\Big[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{(2\nu + 1)}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{(2\mu + 1)}{r}\frac{\partial}{\partial r} + k^2\Big] K(v, u, q) = 0,$$

в котором $\rho = f\,\mathrm{ch}u\cos v$, $r = f\,\mathrm{sh}u \sin v$.

В качестве ядер $K(v, u, q)$ можно выбрать, таким образом, функции

$$K_1 = \frac{J_{\nu+\mu+2\ell+1}(kR)\, P_\ell^{(\nu,\mu)}(-\cos 2\theta)}{(kR)^{\nu+\mu+1}},$$

$$K_2 = \frac{Y_{\nu+\mu+2\ell+1}(kR)\, P_\ell^{(\nu,\mu)}(-\cos 2\theta)}{(kR)^{\nu+\mu+1}}, \qquad \ell = 0,1,2,\ldots,$$

$$K_3 = \frac{J_\nu(k\rho\cos\phi)}{(k\rho\cos\phi)^\nu}\cdot\frac{J_\mu(kr\sin\phi)}{(kr\sin\phi)^\mu}, \qquad 0 \le \phi \le \pi/2,$$

$$K_4 = \frac{J_\nu(k\rho)}{(k\rho)^\nu}, \quad K_5 = \frac{J_\mu(kr)}{(kr)^\mu}.$$

Подставим K_1 в /2.12/ и вычислим асимптотику $f(u, q)$ при $u \to \infty$. Находим

$$f(u, q) \xrightarrow[u\to\infty]{} \Big(\frac{2}{\pi}\Big)^{1/2} \frac{\cos(c\cdot \mathrm{ch}u - (\nu+\mu+1)\pi/2 - \pi/4)}{(c\cdot\mathrm{ch}u)^{\nu+\mu+1}} \times$$
$$\times \int_0^{\pi/2} p\cdot P_\ell^{(\nu,\mu)}(-\cos 2v)\, ps_n^{(\nu,\mu)}(v, q)\, dv. \qquad /2.16/$$

Сравнивая это выражение с /2.4/, получаем, что $f(u, q)$ с точностью до константы равна $Ps_n^{(\nu,\mu)}(u, q)$. Подставим /2.5/ в /2.16/ и проинтегрируем по v, используя соотношения ортогональности для полиномов Якоби. Получаем

$$Ps_n^{(\nu,\mu)}(u, q)\, B_{\ell,n}^{(\nu,\mu)} = \int_0^{\pi/2} p\cdot K_1\cdot ps_n^{(\nu,\mu)}(v, q)\, dv, \qquad /2.17/$$

где

$$B_{\ell,n}^{(\nu,\mu)} = \frac{\Gamma_\ell^{(\nu,\mu)} A_{\ell,n}^{(\nu,\mu)}}{\kappa_n^{(\nu,\mu)}}, \quad \Gamma_\ell^{(\nu,\mu)} = \frac{\Gamma(\nu + \ell + 1)\Gamma(\mu + \ell + 1)}{2(\ell!)(\nu + \mu + 2\ell + 1)\Gamma(\nu + \mu + \ell + 1)}.$$

Аналогичная подстановка функции K_2 в /2.12/ и учет асимптотики полученного выражения при $u \to \infty$ приводят к формуле

$$Fs_n^{(\nu,\mu)}(u, q)\, B_{\ell,n}^{(\nu,\mu)} = \int_0^{\pi/2} p\cdot K_2\cdot ps_n^{(\nu,\mu)}(v, q)\, dv. \qquad /2.18/$$

Подставим функцию K_3 в /2.12/ и используем разложение [13]

$$\frac{J_\nu(z\cos\theta\cos\phi)}{(z\cos\theta\cos\phi)^\nu}\cdot\frac{J_\mu(z\sin\theta\sin\phi)}{(z\sin\theta\sin\phi)^\mu} =$$
$$= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \big(\Gamma_r^{(\nu,\mu)}\big)^{-1} P_r^{(\nu,\mu)}(-\cos 2\theta)\, P_r^{(\nu,\mu)}(-\cos 2\phi)\, \frac{J_{\nu+\mu+2r+1}(z)}{z^{\nu+\mu+1}}. \qquad /2.19/$$

С учетом /2.1/ находим

$$\frac{Ps_n^{(\nu,\mu)}(u, q)\, ps_n^{(\nu,\mu)}(\phi, q)}{\kappa_n^{(\nu,\mu)}} = \int_0^{\pi/2} p\cdot K_3\cdot ps_n^{(\nu,\mu)}(v, q)\, dv. \qquad /2.20/$$

В случае $\phi = 0$ это выражение дает

$$\frac{Ps_n^{(\nu,\mu)}(u, q)\, ps_n^{(\nu,\mu)}(0, q)}{\kappa_n^{(\nu,\mu)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{p\cdot K_4\cdot ps_n^{(\nu,\mu)}(v, q)\, dv}{2^\mu \Gamma(\mu + 1)}. \qquad /2.21/$$

В случае $\phi = \pi/2$ из /2.20/ получаем

$$\frac{Ps_n^{(\nu,\mu)}(u,q)\,ps_n^{(\nu,\mu)}(\pi/2,\,q)}{\kappa_n^{(\nu,\mu)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{p\cdot K_5\cdot ps_n^{(\nu,\mu)}(v,\,q)\,dv}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)} . \qquad /2.22/$$

Соотношение /2.21/ получено в [1] иным способом. При $\mu = 0$, $\nu = 0,1,2\ldots$ оно совпадает с интегральным уравнением /45/ работы [15] для гиперсфероидальных функций. При целых ν, $\mu = 0,1,2\ldots$ оно совпадает с полученным в [16] интегральным уравнением для обобщенных гиперсфероидальных функций.

В случае $\nu = \pm 1/2$ или $\mu = \pm 1/2$ соотношения /2.17/, /2.18/, /2.20/-/2.22/ переходят в интегральные уравнения для сфероидальных функций [4,6,13], а в случае $\nu = \pm 1/2$, $\mu = \pm 1/2$ - в интегральные уравнения для функций Матье [13,19].

Если в /2.20/ перейти к переменным $z = c\cdot(\mathrm{ch}^2 u + \cos^2\phi - 1)^{1/2}$, $\cos\Phi = c\cdot \mathrm{ch}\,u\cos\phi/z$, а затем вычислить предел при $q \to 0$, то с использованием /2.1/ и асимптотики $A_{r,n}^{(\nu,\mu)}$ при $q \to 0$ [1] получаем

$$\frac{P_n^{(\nu,\mu)}(-\cos 2\Phi)\,J_{\nu+\mu+2n+1}(z)}{z^{\nu+\mu+1}} =$$

$$= (-1)^n \int_0^{\pi/2} (\cos v)^{2\nu+1}\,(\sin v)^{2\mu+1} \times \qquad /2.23/$$

$$\times \frac{J_\nu(z\cos\Phi\cos v)}{(z\cos\Phi\cos v)^{\nu}} \cdot \frac{J_\mu(z\sin\Phi\sin v)}{(z\sin\Phi\sin v)^{\mu}}\, P_n^{(\nu,\mu)}(-\cos 2v)\,dv .$$

Это соотношение можно получить также и непосредственно из /2.19/, если умножить последнее на $(\cos\phi)^{2\nu+1}(\sin\phi)^{2\mu+1}P_n^{(\nu,\mu)}(-\cos 2\phi)$ и проинтегрировать по ϕ от 0 до $\pi/2$, учитывая при этом соотношения ортогональности для полиномов Якоби. Частный случай /2.23/ при $\mu = 0$, $\Phi = 0$ получен также в [15] другим способом.

3. РАЗЛОЖЕНИЕ ЯДЕР ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ

Покажем, что ограниченные при $0 \le u \le \infty$, $0 \le v \le \pi$ ядра K_1, K_3, K_4, K_5 можно разложить в ряды по произведениям полисфероидальных периодических функций. Такие разложения возможны, так как функция /2.13/ и функция

$$W = Ps_n^{(\nu,\mu)}(u,q)\,ps_n^{(\nu,\mu)}(v,q)\,(\mathrm{ch}\,u\cos v)^{\nu}\,(\mathrm{sh}\,u\sin v)^{\mu}\exp(\pm i\nu\alpha \pm i\mu\beta)$$

являются решениями одного и того же уравнения /2.14/ в бисфероидальной системе координат /2.15/.

Поскольку ядро K_1 и произведение $Ps_n^{(\nu,\mu)}(u,q)\cdot ps_n^{(\nu,\mu)}(v,q)$ ограничены в области $0 \le u \le \infty$, $0 \le v \le \pi$ и имеют одинаковую асимптотику при $u \to \infty$, то наряду с разложением /2.1/ должно существовать и обратное разложение

$$\frac{J_{\nu+\mu+2r+1}(kR)\,P_r^{(\nu,\mu)}(-\cos 2\theta)}{(kR)^{\nu+\mu+1}} = \qquad /3.1/$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} C_{r,n}^{(\nu,\mu)} \frac{Ps_n^{(\nu,\mu)}(u,q)\,ps_n^{(\nu,\mu)}(v,q)}{\kappa_n^{(\nu,\mu)}} .$$

Умножим это выражение на $p\cdot ps_n^{(\nu,\mu)}(v,q)$ и проинтегрируем по v от 0 до $\pi/2$. Используя ортонормированность функций $ps_n^{(\nu,\mu)}(v,q)$ и соотношение /2.17/, получаем

$$C_{r,n}^{(\nu,\mu)} = \Gamma_r^{(\nu,\mu)} A_{r,n}^{(\nu,\mu)} .$$

В случае $v = 0$ /3.1/ сводится к разложению

$$\frac{J_{\nu+\mu+2r+1}(c\cdot \mathrm{ch}\,u)}{(c\cdot \mathrm{ch}\,u)^{\nu+\mu+1}}\;\frac{(-1)^r\,\Gamma(r+\mu+1)}{r!\,\Gamma(\mu+1)} = \qquad /3.2/$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} C_{r,n}^{(\nu,\mu)} \frac{ps_n^{(\nu,\mu)}(u,q)\,ps_n^{(\nu,\mu)}(0,q)}{\kappa_n^{(\nu,\mu)}} ,$$

а в случае $v = \pi/2$ - к разложению

$$\frac{J_{\nu+\mu+2r+1}(c\cdot \mathrm{sh}\,u)}{(c\cdot \mathrm{sh}\,u)^{\nu+\mu+1}}\;\frac{\Gamma(r+\nu+1)}{r!\,\Gamma(\nu+1)} = \qquad /3.3/$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} C_{r,n}^{(\nu,\mu)} \frac{Ps_n^{(\nu,\mu)}(u,q)\,ps_n^{(\nu,\mu)}(\pi/2,q)}{\kappa_n^{(\nu,\mu)}} .$$

Полагая $u \to \infty$ в /3.1/, с учетом /2.4/ находим

$$P_r^{(\nu,\mu)}(-\cos 2v) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^r\, C_{r,n}^{(\nu,\mu)}\, ps_n^{(\nu,\mu)}(v,q) . \qquad /3.4/$$

Умножим /3.4/ на $p \cdot P_\ell^{(\nu,\mu)}(-\cos 2v)$ и проинтегрируем по v от 0 до $\pi/2$. С учетом соотношений ортогональности для полиномов Якоби получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{r,n}^{(\nu,\mu)} A_{\ell,n}^{(\nu,\mu)} \Gamma_r^{(\nu,\mu)} = \delta_{r,\ell} = \begin{cases} 1, & \text{если } r = \ell, \\ 0, & \text{если } r \neq \ell. \end{cases} \qquad /3.5/$$

Напомним, что вследствие ортонормированности функций $ps_n^{(\nu,\mu)}(v,q)$ справедливо также соотношение [1]

$$\sum_{r=0}^{\infty} A_{r,n}^{(\nu,\mu)} A_{r,m}^{(\nu,\mu)} \Gamma_r^{(\nu,\mu)} = \delta_{n,m} \quad . \qquad /3.6/$$

Подставим теперь разложения /3.1/ и /3.4/ в /2.19/ и используем при этом /3.6/. Находим

$$\frac{J_\nu(c\cdot \mathrm{ch}\, u \cos v \cos\phi)}{(c\cdot \mathrm{ch}\, u \cos v \cos\phi)^{\nu}} \cdot \frac{J_\mu(c\cdot \mathrm{sh}\, u \sin v \sin\phi)}{(c\cdot \mathrm{sh}\, u \sin v \sin\phi)^{\mu}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Ps_n^{(\nu,\mu)}(u,q)\, ps_n^{(\nu,\mu)}(v,q)\, ps_n^{(\nu,\mu)}(\phi,q)}{\kappa_n^{(\nu,\mu)}} \, . \qquad /3.7/$$

Эта формула отвечает разложению ядра K_6 по произведениям трех полисфероидальных периодических функций и является, по существу, формулой сложения этих функций.

В случае $\phi = 0$ /3.7/ соответствует разложению ядра K_4:

$$\frac{J_\nu(c\cdot \mathrm{ch}\, u \cos v)}{(c\cdot \mathrm{ch}\, u \cos v)^{\nu}} \cdot \frac{1}{2^{\mu}\Gamma(\mu+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Ps_n^{(\nu,\mu)}(u,q)\, ps_n^{(\nu,\mu)}(v,q)\, ps_n^{(\nu,\mu)}(0,q)}{\kappa_n^{(\nu,\mu)}} \, , \qquad /3.8/$$

а в случае $\phi = \pi/2$ - разложению ядра K_5:

$$\frac{J_\mu(c\cdot \mathrm{sh}\, u \sin v)}{(c\cdot \mathrm{sh}\, u \sin v)^{\mu}} \cdot \frac{1}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Ps_n^{(\nu,\mu)}(u,q)\, ps_n^{(\nu,\mu)}(v,q)\, ps_n^{(\nu,\mu)}(\pi/2,q)}{\kappa_n^{(\nu,\mu)}} \, . \qquad /3.9/$$

Если умножить /3.7/ на $(\cos\phi)^{2\nu+1}(\sin\phi)^{2\mu+1} P_r^{(\nu,\mu)}(-\cos 2\phi)$ и проинтегрировать по ϕ от 0 до $\pi/2$, то с учетом /2.5/ и /2.23/ получим разложение /3.1/.

4. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА

Согласно общей теории [11,20] функция Грина $G(\vec r, \vec r\,')$, удовлетворяющая неоднородному четырехмерному уравнению Гельмгольца

$$(\Delta + k^2)\, G(\vec r, \vec r\,') = -\delta(\vec r - \vec r\,') \qquad /4.1/$$

и однородным граничным условиям на бесконечности

$$r^{3/2}\left(\frac{\partial}{\partial r} G - ikG\right) \xrightarrow[r\to\infty]{} 0 \, , \qquad /4.2/$$

зависит от $kR = k|\vec r - \vec r\,'|$ и равна

$$G(\vec r, \vec r\,') = \frac{ik^2}{8\pi} \frac{H_1^{(1)}(kR)}{kR} \, , \qquad /4.3/$$

где $H_1^{(1)}(kR) = J_1(kR) + iY_1(kr)$ - функция Ганкеля первого рода.

Поскольку при $\vec r \neq \vec r\,'$ функция /4.3/ удовлетворяет однородному четырехмерному уравнению Гельмгольца /2.14/, то, следовательно, в бисфероидальных координатах она может быть представлена в виде

$$G(\vec r, \vec r\,') = \sum_{N=0}^{\infty}\sum_{M=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} K_n^{(N,M)} \cos N(\alpha-\alpha')\cos M(\beta-\beta') \times$$
$$\times (c^2 \mathrm{ch}\, u\, \mathrm{ch}\, u' \cos v \cos v')^N (c^2 \mathrm{sh}\, u\, \mathrm{sh}\, u' \sin v \sin v')^M \times \qquad /4.4/$$
$$\times Hs_n^{(N,M)}(u_>, q)\, Ps_n^{(N,M)}(u_<, q) \times$$
$$\times ps_n^{(N,M)}(v,q)\, ps_n^{(N,M)}(v',q) \, ,$$

где

$$Hs_n^{(N,M)}(u,q) = Ps_n^{(N,M)}(u,q) + iFs_n^{(N,M)}(u,q) \, ,$$

$$u_> = \max(u,u'), \quad u_< = \min(u,u').$$

Разложение /4.4/ ограничено при $u = 0$ и удовлетворяет условию /4.2/.

Подставим /4.4/ в уравнение /4.1/, выраженное в координатах /2.15/. Получаем

$$\Big[\frac{1}{f^2(\mathrm{ch}^2 u - \cos^2 v)} \Big\{ \frac{1}{\mathrm{ch\,u\,sh\,u}} \frac{\partial}{\partial u} \mathrm{ch\,u\,sh\,u} \frac{\partial}{\partial u} + $$

$$+ \frac{1}{\cos v \sin v} \frac{\partial}{\partial v} \cos v \sin v \frac{\partial}{\partial v} + \frac{1}{\mathrm{ch}^2 u \cos^2 v} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \qquad /4.5/$$

$$+ \frac{1}{\mathrm{sh}^2 u \sin^2 v} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \Big\} + k^2 \Big] G(\vec{r}, \vec{r}\,') =$$

$$= - h^{-1} \delta(u - u')\delta(v - v')\delta(\alpha - \alpha')\delta(\beta - \beta') .$$

Здесь $h = h_u h_v h_\alpha h_\beta$ - произведение коэффициентов Ламе,

$$h = f^4 (\mathrm{ch}^2 u - \cos^2 v)\, \mathrm{ch\,u} \cos v\, \mathrm{sh\,u} \sin v .$$

Умножим /4.5/ на h и проинтегрируем по u от $u + \epsilon$ до $u' - \epsilon$, где ϵ - некоторая малая величина. Используя уравнение /1.1б/ и соотношение /2.8/, находим при $\epsilon \to 0$

$$\frac{2i}{\pi k^2} \cos v \sin v \Big[\sum_{N=0}^{\infty} \sum_{M=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} K_n^{(N,M)} \cos N(\alpha - \alpha') \cos M(\beta - \beta')(\cos v \cos v')^N \times$$

$$\times (\sin v \sin v')^M \mathrm{ps}_n^{(N,M)}(v, q)\, \mathrm{ps}_n^{(N,M)}(v', q)\, (\kappa_n^{(N,M)})^2 \Big] =$$

$$= -\delta(v - v')\delta(\alpha - \alpha')\delta(\beta - \beta') .$$

Умножим это выражение на $\cos(N\alpha)\cos(M\beta)(\cos v)^N (\sin v)^M \mathrm{ps}_n^{(N,M)}(v, q)$ и проинтегрируем по v от 0 до $\pi/2$ и по α, β от 0 до 2π. Таким образом, имеем

$$K_n^{(N,M)} = \frac{ik^2}{8\pi} \frac{(2 - \delta_{0,M})(2 - \delta_{0,N})}{(\kappa_n^{(N,M)})^2} .$$

Окончательно получаем

$$\frac{H_1^{(1)}(kR)}{kR} = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{M=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (2 - \delta_{0,N})(2 - \delta_{0,M}) \times$$

$$\times \cos N(\alpha - \alpha') \cos M(\beta - \beta') (c^2 \mathrm{ch\,u\,ch\,u'} \cos v \cos v')^N \times \qquad /4.6/$$

$$\times (c^2 \mathrm{sh\,u\,sh\,u'} \sin v \sin v')^M \times$$

$$\times \mathrm{Hs}_n^{(N,M)}(u_>, q)\, \mathrm{Ps}_n^{(N,M)}(u_<, q)\, \mathrm{ps}_n^{(N,M)}(v, q)\, \mathrm{ps}_n^{(N,M)}(v', q)\, (\kappa_n^{(N,M)})^{-2} .$$

Здесь

$$kR = c((\mathrm{ch}2u + \mathrm{ch}2u' + \cos 2v + \cos 2v')/2 -$$

$$- 2\, \mathrm{ch\,u\,ch\,u'} \cos v \cos v' \cos(\alpha - \alpha') -$$

$$- 2\, \mathrm{sh\,u\,sh\,u'} \sin v \sin v' \cos(\beta - \beta'))^{1/2} .$$

Приведем еще одну полезную формулу сложения четырех полисфероидальных функций. Умножим разложения /3.7/ и /2.19/, зависящие от переменных u, v, ϕ и z, θ, ϕ, на такие же разложения, зависящие от переменных u', v', ϕ и z', θ', ϕ соответственно, и проинтегрируем полученные выражения по ϕ от 0 до $\pi/2$ с весом $(\cos\phi)^{2\nu+1}(\sin\phi)^{2\mu+1}$. Используя ортонормированность функций $\mathrm{ps}_n^{(\nu,\mu)}(\phi, q)$ и ортогональность полиномов Якоби, получаем

$$\int_0^{\pi/2} \frac{J_\nu(kx\cos\phi)}{(kx\cos\phi)^\nu} \cdot \frac{J_\mu(ky\sin\phi)}{(ky\sin\phi)^\mu} \cdot \times$$

$$\times \frac{J_\nu(kx'\cos\phi)}{(kx'\cos\phi)^\nu} \cdot \frac{J_\mu(ky'\sin\phi)}{(ky'\sin\phi)^\mu} \cdot (\cos\phi)^{2\nu+1} (\sin\phi)^{2\mu+1}\, d\phi =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{Ps}_n^{(\nu,\mu)}(u, q)\, \mathrm{Ps}_n^{(\nu,\mu)}(u', q)\, \mathrm{ps}_n^{(\nu,\mu)}(v, q)\, \mathrm{ps}_n^{(\nu,\mu)}(v', q)}{(\kappa_n^{(\nu,\mu)})^2} = \qquad /4.7/$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} (\Gamma_r^{(\nu,\mu)})^{-1} P_r^{(\nu,\mu)}(-\cos 2\theta)\, P_r^{(\nu,\mu)}(-\cos 2\theta') \times$$

$$\times \frac{J_{\nu+\mu+2r+1}(z)}{z^{\nu+\mu+1}} \cdot \frac{J_{\nu+\mu+2r+1}(z')}{(z')^{\nu+\mu+1}} .$$

Здесь

$$x = f \operatorname{ch} u \cos v = z \cos\theta, \qquad x' = f \operatorname{ch} u' \cos v' = z' \cos\theta',$$

$$y = f \operatorname{sh} u \sin v = z \sin\theta, \qquad y' = f \operatorname{sh} u' \sin v' = z' \sin\theta', \quad kf = 2\sqrt{q}.$$

Заметим, что последнее равенство в формуле /4.7/ остается также справедливым, если в нем заменить функции первого рода $Ps_n^{(\nu,\mu)}(u', q)$ и $J_{\nu+\mu+2r+1}(z')$ на функции второго рода $Fs_n^{(\nu,\mu)}(u', q)$ и $Y_{\nu+\mu+2r+1}(z')$ соответственно. При этом $|u'| \geq |u|$, $|z'| \geq |z|$, $|z'| > 2q$. Такое равенство можно получить, если умножить разложение /2.1/ на /2.9/, в котором произведена замена $u \to u'$, $v \to v'$, и просуммировать по n от 0 до ∞, учитывая при этом соотношение /3.5/. Изменение порядка суммирования в этом случае возможно вследствие абсолютной сходимости разложений /2.1/ и /2.9/. При целых ν, $\mu = 0,1,2,\ldots$ эти равенства можно также получить, используя разложение /4.6/ и соответствующее разложение функции Грина /4.3/ в бисферической системе координат.

Автор благодарит Я.А.Смородинского за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Трускова Н.Ф. ЯФ, 1982, 36, с.790.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. "Наука", М., 1976.
3. Power J.D. Phil.Trans.Roy.Soc.London, 1973, A274, p.663.
4. Комаров И.В., Пономарев Л.И., Славянов С.Ю, Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции. "Наука", М., 1976.
5. Thorson W.R. J.Chem.Phys., 1969, 50, p.1702.
6. Meixner J., Schäfke F.W. Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen. Springer, 1954.
7. Иванов Е.А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. "Наука и техника", Минск, 1968.
8. Bowman J.J., Senior T.B., Uslenghi P.L.E. Electromagnetic and Acoustic Scattering by Simple Shapes. N.Y.Publ.Comp., Amsterdam, 1969.
9. Вайнштейн Л.А. В кн.: Электроника больших мощностей. "Наука", М., 1965, № 4, с.130.
10. Heurtley J.C. In: Proc.Symp. on Quasioptics. Polytechnic Press, New York, 1964.
11. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. ИЛ, М., 1958, т.1-2.
12. Макаров Г.И., Терещенко Е.Д. В кн.: Проблемы дифракции и распространения волн. Изд-во ЛГУ, 1972, вып.XI, с.77.

13. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. "Наука", М., 1967, т.1-3.
14. Кузнецов Н.В. Записки научных семинаров ЛОМИ. "Наука", Л., 1970, вып.17, с.66.
15. Slepian D. Bell System Techn.J., 1964, 43, p.3009.
16. Лось В.Ф. Вопросы радиотехники, серия общетехнич., 1969, 10, с.57.
17. Космодамианская Н.С., Лось В.Ф. В сб.: Антенны. "Связь", М., 1969, № 5, с.121.
18. Трускова Н.Ф. ЖВМ и МФ, 1983, 23, с.785.
19. Мак-Лахлан Н.В. Теория и приложения функций Матье. ИЛ, М., 1953.
20. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. "Наука", М., 1971.

Рукопись поступила в издательский отдел
5 августа 1983 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Трускова Н.Ф. Р5-83-520

Интегральные уравнения и формулы сложения для полисфероидальных периодических функций

Получены интегральные уравнения и формулы сложения для применяемых в ряде физических задач полисфероидальных периодических функций. При частных значениях параметров найденные соотношения совпадают с известными соотношениями для сфероидальных и гиперсфероидальных функций, а при произвольных значениях являются нетривиальным их обобщением.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Truskova N.F. P5-83-520

Integral Equations and Formulae of Addition for Polyspheroidal Periodic Functions

Integral equations and formulae of additions for necessary in a number of physical problems polyspheroidal periodic functions are obtained. They generate corresponding formulae for spheroidal and hyperspheroidal functions and are reduced to these for special parameters.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983

Перевод О.С.Виноградовой