сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P5-83-414

С.Н.Боршукова*

МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ КАРЛЕМАНА-ВЕКУА И МЕТОД САМОРЕГУЛЯРИЗАЦИИ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

* Институт математики Болгарской академии наук, София.

1983

1. ВВЕДЕНИЕ

Для исследования и численного решения осесимметричных смешанных задач теории упругости в работах[1-3] применялся метод регуляризации Карлемана-Векуа[4]. Решение этих задач осуществлялось на основе численного решения полученного интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Здесь, на примере одной смешанной задачи для полого цилиндра, которая представляет самостоятельный теоретический и практический интерес, показана возможность применения метода саморегуляризации[5].

2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРВОГО РОДА ДЛЯ КОНТАКТНОГО ДАВЛЕНИЯ

Как известно[1,2,6-8], контактное давление $p(\zeta)$ на контуре контакта L при заданной на нем функции смещений $f(\zeta)$ определяется из интегрального уравнения первого рода

$$\int\limits_L p(t)\,U(\zeta - t)\,dt = f(\zeta), \qquad \zeta \in L, \tag{1}$$

где

$$U(\zeta - t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{R(\beta)}{\beta}\cos\beta(\zeta - t)\,d\beta, \tag{2}$$

$$R(\beta) = A + \frac{B}{\beta} + O\left(\frac{1}{\beta^2}\right), \quad \beta \to \infty, \tag{3}$$

$$R(\beta) = D\beta + O(\beta^2), \quad \beta \to 0. \tag{4}$$

В работе[6] постоянные A, B, D определены как для изотропного, так и для трансверсально-изотропного цилиндра.

Решение $p(\zeta) \in L_q(L)$, $q > 1$ интегрального уравнения /1/, ищется при предположении, что $f(\zeta) \in H_1^\alpha(L)$, $0 < \alpha \leq 1$ /через $H_k^\alpha(L)$ обозначен класс функций, которые имеют производные до k-го порядка на L, и k-я производная удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $0 < \alpha \leq 1$ на L /.

Используя известный интеграл

$$\int\limits_0^\infty \frac{\cos\beta(\zeta - t) - e^{-\beta}}{\beta}\,d\beta = -\ln(\zeta - t),$$

на основании свойств /3/, /4/ функции $R(\beta)$ можно выделить особенность ядра /2/ интегрального уравнения /1/

$$U(\zeta-t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{[R(\beta)-A]\cos\beta(\zeta-t)+Ae^{-\beta}}{\beta}\,d\beta+ \qquad /5/$$

$$+\frac{A}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\beta(\zeta-t)-e^{-\beta}}{\beta}\,d\beta=\frac{A}{\pi}\ln\frac{1}{|\zeta-t|}+\frac{1}{\pi}\Phi(\zeta-t)$$

и показать, что

$$\Phi'(v)=V(v)-\frac{\beta\pi}{2}\operatorname{sign}(v),\quad V(v)\in H_0^{1-\epsilon}(L), \qquad /6/$$

где $\epsilon>0$ - сколь угодно малое.

Отметим, что интегральное уравнение того же вида для $L=[a,b]$ исследовалось в работах [7,8] в связи с решением смешанных задач для сплошного цилиндра и пространства с цилиндрической полостью асимптотическими методами.

Для выяснения существования и конструкции решения уравнения /1/-/4/ при составном контуре L /состоящем из конечного числа отрезков на действительной оси/ здесь применим метод регуляризации Карлемана-Векуа[4].

3. МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ КАРЛЕМАНА-ВЕКУА

Пусть, как и в рассматриваемой ниже контактной задаче, контур L имеет вид

$$L=\{-1\le\zeta\le\zeta_1,\ -\zeta_0\le\zeta\le\zeta_0,\ \zeta_1\le\zeta\le 1\},$$

а через L_+ обозначим контур

$$L_+=\{0\le\zeta\le\zeta_0,\ \zeta_1\le\zeta\le 1\}.$$

Пусть, кроме того,

$$p(\zeta)=\begin{cases} p_1(\zeta), & 0\le|\zeta|\le\zeta_0,\\ p_2(\zeta), & \zeta_1\le|\zeta|\le 1,\end{cases}\qquad f(\zeta)=\begin{cases} f_1(\zeta), & 0\le|\zeta|\le\zeta_0,\\ f_2(\zeta), & \zeta_1\le|\zeta|\le 1,\end{cases}$$

при этом предполагаем, что $p(-\zeta)=p(\zeta)$ и $f(-\zeta)=f(\zeta)$ на L.

На основе полученного представления /5/ интегральное уравнение /1/ сводится к сингулярному интегральному уравнению на контуре L_+:

$$\frac{1}{\pi}\int_{L_+}\frac{p(t)}{t-\zeta}\,dt+\frac{1}{A\pi}\int_{L_+}p(t)G(\zeta,t)\,dt=\frac{1}{\pi}f'(\zeta),\quad \zeta\in L_+, \qquad /7/$$

где

$$G(\zeta,t)=-\frac{A}{\zeta+t}+\Phi'(\zeta-t)+\Phi'(\zeta+t). \qquad /8/$$

Преобразуем уравнение /7/, /8/ к системе двух сингулярных интегральных уравнений относительно неизвестных функций $p_1(\zeta), p_2(\zeta)$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\zeta_0}^{\zeta_0}\frac{p_1(t)}{t-\zeta}\,dt+\frac{1}{A\pi}\int_{-\zeta_0}^{\zeta_0}p_1(t)G_{11}(\zeta,t)\,dt+$$

$$+\frac{1}{A\pi}\int_{\zeta_1}^{1}p_2(t)G_{12}(\zeta,t)\,dt=\frac{f_1'(\zeta)}{A},\qquad -\zeta_0\le\zeta\le\zeta_0, \qquad /9/$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{\zeta_1}^{1}\frac{p_2(t)}{t-\zeta}\,dt+\frac{1}{A\pi}\int_{-\zeta_0}^{\zeta_0}p_1(t)G_{21}(\zeta,t)\,dt+$$

$$+\frac{1}{A\pi}\int_{\zeta_1}^{1}p_2(t)G_{22}(\zeta,t)\,dt=\frac{f_2'(t)}{A},\qquad \zeta_1\le\zeta\le 1,$$

где

$$G_{11}(\zeta,t)=\Phi'(\zeta-t),\quad G_{12}(\zeta,t)=\frac{1}{t-\zeta}+G(\zeta,t), \qquad /10/$$

$$G_{21}(\zeta,t)=\frac{A}{t-\zeta}+\Phi'(\zeta-t),\quad G_{22}(\zeta,t)=G(\zeta,t).$$

Система /9/-/10/ регуляризуется методом Карлемана-Векуа и приводится к системе двух интегральных уравнений Фредгольма второго рода:

$$\phi_1(\zeta)-\frac{1}{A\pi}\int_{-\zeta_0}^{\zeta_0}\frac{\phi_1(t)L_{11}(\zeta,t)}{\sqrt{\zeta_0^2-t^2}}\,dt-\frac{1}{A\pi^2}\int_{\zeta_1}^{1}\frac{\phi_2(t)L_{12}(\zeta,t)}{\sqrt{(t-\zeta_1)(1-t)}}\,dt= \qquad /11/$$

$$=\frac{P_1}{\pi}-\frac{1}{A\pi}\int_{-\zeta_0}^{\zeta_0}\frac{\sqrt{\zeta_0^2-t^2}}{t-\zeta}f_1'(t)\,dt,\qquad -\zeta_0\le\zeta\le\zeta_0,$$

$$
\phi_2(\zeta) - \frac{1}{A\pi^2}\int_{-\zeta_0}^{\zeta_0} \frac{\phi_1(t)L_{21}(\zeta,t)}{\sqrt{\zeta_0^2 - t^2}}\,dt - \frac{1}{A\pi}\int_{\zeta_1}^{1} \frac{\phi_2(t)L_{22}(\zeta,t)}{\sqrt{(t-\zeta_1)(1-t)}}\,dt = \tag{/12/}
$$

$$
= \frac{P_2}{\pi} - \frac{1}{A\pi}\int_{\zeta_1}^{1} \frac{\sqrt{(t-\zeta_1)(1-t)}}{t-\zeta} f_2'(t)\,dt, \quad \zeta_1 \le \zeta \le 1
$$

относительно новых неизвестных функций

$$
\phi_1(\zeta) = p_1(\zeta)\sqrt{\zeta_0^2 - \zeta^2}\,, \tag{/13/}
$$

$$
\phi_2(\zeta) = p_2(\zeta)\sqrt{(\zeta-\zeta_1)(1-\zeta)}\,, \tag{/14/}
$$

где

$$
L_{1j}(\zeta,t) = \int_{-\zeta_0}^{\zeta_0} \frac{\sqrt{\zeta_0^2 - r^2}\,G_{1j}(r,t)}{r-\zeta}\,dr, \qquad j = 1,2,
$$

$$
L_{2j}(\zeta,t) = \int_{\zeta_1}^{1} \frac{\sqrt{(r-\zeta_1)(1-r)}\,G_{2j}(r,t)}{r-\zeta}\,dr, \qquad j = 1,2, \tag{/15/}
$$

$$
P_1 = \int_{-\zeta_0}^{\zeta_0} p_1(\zeta)\,d\zeta, \quad P_2 = \int_{\zeta_1}^{1} p_2(\zeta)\,d\zeta\,.
$$

На основании свойств /3/, /4/ функции $R(\beta)$ и представлений /6/, /10/, /15/ можно показать, что ядра $L_{11}(\zeta,t)$ и $L_{22}(\zeta,t)$ уравнений /11/, /12/ имеют логарифмическую особенность, а интегралы для $L_{12}(\zeta,t)$ и $L_{21}(\zeta,t)$ можно преобразовать так, чтобы получить из них интегралы, существующие как несобственные. Как и в работе[6], можно сделать полное исследование этой системы уравнений и доказать следующую теорему:

Теорема. Если $f(\zeta) \in H_1^{\alpha}(L)$, где $\alpha > 0$ и если существует решение $p(\zeta) \in L_q(L)$, $q > 1$ уравнения /1/, то решение $\phi(\zeta)$ системы /11/, /12/ принадлежит $H_0^{\beta}(L)$, где $\beta = \alpha$ при $\alpha < 1$, $\beta = 1-\epsilon$, ϵ - как угодно малое, при $\alpha = 1$.

Так найдена структура /13/, /14/ решения $p(\zeta)$ интегрального уравнения /1/ и выяснены его свойства. Это дает возможность для численного решения уравнения /1/ применить метод саморегуляризации.

4. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ /1/

Предварительно преобразуем уравнение /1/ с учетом /5/, /13/, /14/:

$$
-A\int_0^{\zeta_0} \frac{\phi_1(t)}{\sqrt{\zeta_0^2 - t^2}}[\ln|\zeta - t| + \ln(\zeta + t)]\,dt + \int_0^{\zeta_0} \frac{\phi_1(t)}{\sqrt{\zeta_0^2 - t^2}} K(\zeta,t)\,dt - \tag{/16/}
$$

$$
-A\int_{\zeta_1}^{1} \frac{\phi_2(t)}{\sqrt{(t-\zeta_1)(1-t)}}[\ln|\zeta - t| + \ln(\zeta + t)\,dt + \int_{\zeta_1}^{1} \frac{\phi_2(t)K(\zeta,t)}{\sqrt{(t-\zeta_1)(1-t)}}\,dt = \pi f(\zeta), \quad \zeta \in L_+,
$$

где

$$
K(\zeta,t) = \Phi(\zeta - t) + \Phi(\zeta + t) = 2\int_0^{\infty} \frac{[R(\beta) - A]\cos\beta\zeta\cos\beta t + Ae^{-\beta}}{\beta}\,d\beta\,.
$$

На основании свойств /3/, /4/ функции $R(\beta)$ можно показать, что последний интеграл сходится равномерно при $\zeta, t \in L_+$ и, следовательно, определяет непрерывную функцию $K(\zeta,t)$.

Используя известные значения интегралов[9]

$$
\int_a^b \frac{\ln|x-y|}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,dx = \pi \ln\frac{b-a}{4}, \quad a < y < b,
$$

$$
\int_a^b \frac{\ln(b \pm x)}{\sqrt{b^2 - x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2}\ln\frac{b}{2} \pm 2G,
$$

где $G = 0{,}915966...$ - константа Каталани, преобразуем уравнение /16/ к виду:

$$
-A\pi\ln\frac{\zeta_0}{2}\phi_1(\zeta) - A\int_0^{\zeta_0} \frac{\phi_1(t) - \phi_1(\zeta)}{\sqrt{\zeta_0^2 - t^2}}\ln|\zeta^2 - t^2|\,dt + \int_0^{\zeta_0} \frac{\phi_1(t)K(\zeta,t)}{\sqrt{\zeta_0^2 - t^2}}\,dt -
$$

$$
-A\int_{\zeta_1}^{1} \frac{\phi_2(t)\ln|\zeta^2 - t^2|}{\sqrt{(1-t)(t-\zeta_1)}}\,dt + \int_{\zeta_1}^{1} \frac{\phi_2(t)K(\zeta,t)}{\sqrt{(1-t)(t-\zeta_1)}}\,dt = \pi f_1(\zeta), \qquad 0 \le \zeta \le \zeta_0,
$$

$$
-A\int_0^{\zeta_0} \frac{\phi_1(t)\ln|\zeta^2 - t^2|}{\sqrt{\zeta_0^2 - t^2}}\,dt + \int_0^{\zeta_0} \frac{\phi_1(t)K(\zeta,t)}{\sqrt{\zeta_0^2 - t^2}}\,dt - A\pi\ln\frac{1-\zeta_1}{4}\phi_2(\zeta) -
$$

$$-A\int\limits_{\zeta_1}^{1}\frac{\phi_2(t)\ln(\zeta+t)}{\sqrt{(1-t)(t-\zeta_1)}}dt - A\int\limits_{\zeta_1}^{1}\frac{[\phi_2(t)-\phi_2(\zeta)]\ln|\zeta-t|}{\sqrt{(1-t)(t-\zeta_1)}}dt +$$

$$+\int\limits_{\zeta_1}^{1}\frac{\phi_2(t)K(\zeta,t)}{\sqrt{(1-t)(t-\zeta_1)}}dt = \pi f_2(\zeta), \qquad \zeta_1\le\zeta\le 1 .$$

Делая замену переменных $\theta = \arcsin\frac{t}{\zeta_0}$ на интервале $(0,\zeta_0)$ и

$$\theta^* = \frac{1}{2}\int\limits_{\zeta_1}^{1}\frac{dr}{\sqrt{(r-\zeta_1)(1-r)}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{1+\zeta_1-2t}{1-\zeta_1}$$

на интервале $(\zeta_1, 1)$, получаем

$$-A\pi\ln\frac{\zeta_0}{2}\phi_1(\zeta) - A\int\limits_0^{\pi/2}[\phi_1(t)-\phi_1(\zeta)]\ln|\zeta^2-t^2|d\theta + \int\limits_0^{\pi/2}\phi_1(t)K(\zeta,t)d\theta - \qquad /17/$$

$$-2A\int\limits_0^{\pi/2}\phi_2(t)\ln|\zeta^2-t^2|d\theta^* + \int\limits_0^{\pi/2}\phi_2(t)K(\zeta,t)d\theta^* = \pi f_1(\zeta), \qquad 0\le\zeta\le\zeta_0 ,$$

$$-A\int\limits_0^{\pi/2}\phi_1(t)\ln|\zeta^2-t^2|d\theta + \int\limits_0^{\pi/2}\phi_1(t)K(\zeta,t)d\theta - A\pi\ln\frac{1-\zeta_1}{4}\phi_2(\zeta) -$$

$$-2A\int\limits_0^{\pi/2}[\phi_2(t)-\phi_2(\zeta)]\ln|\zeta-t|d\theta^* - 2A\int\limits_0^{\pi/2}\phi_2(t)\ln(\zeta+t)d\theta^* + \qquad /18/$$

$$+2\int\limits_0^{\pi/2}\phi_2(t)K(\zeta,t)d\theta^* = \pi f_2(\zeta), \qquad \zeta_1\le\zeta\le 1 .$$

Из свойств функций $\phi_1(\zeta)$, $\phi_2(\zeta)$ следует, что все интегралы в системе /17/, /18/ равномерно сходятся, а подынтегральные функции первого интеграла в уравнении /17/ и третьего интеграла в уравнении /18/ аннулируются при $\zeta = t$.

Для численного решения системы /17/, /18/ применен метод механических квадратур на основе составной формулы трапеций при равномерном разбиении интервалов $[0,\zeta_0]$ и $[\zeta_1, 1]$ соответственно. Полученная система линейных алгебраических уравнений решалась методом исключения Гаусса с выбором главного элемента.

5. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА

Изложенный алгоритм реализован на фортране IV и применен для численного исследования и решения задачи о трех штампах, вдавливаемых одновременно на поверхность полого цилиндра /рис.1/. Здесь показаны результаты для $f_i(\zeta) = -\delta u_i = \text{const}$, $i = 1,2$, где δu - глубина погружения штампа.

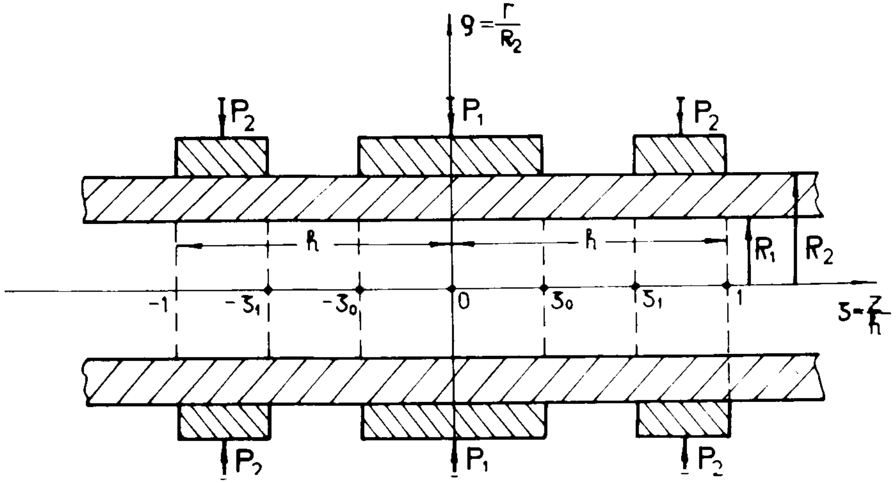

Рис.1

Расчеты проводились как для изотропного, так и для трансверсально-изотропного цилиндра с различными упругими и геометрическими характеристиками. Исследовано взаимное влияние штампов при различных глубинах погружения δu_i, $i = 1,2$ и различных значениях ζ_0 и ζ_1.

На рис.2 показаны графически полученные перемещения $u(\zeta)$ на всей поверхности цилиндра, вспомогательные неизвестные функции $\phi_i(\zeta)$, $i = 1,2$ и контактные напряжения $p_i(\zeta)$, $i = 1,2$ при одинаковой глубине погружения $\delta u = 1{,}25$ штампов, когда $\zeta_0 = 0{,}25$, $\zeta_1 = 0{,}65$. Цилиндр - изотропный, с геометрическими параметрами $\lambda = R_2/h = 10$, $\mu = R_1/R_2 = 0{,}6$ и упругими характеристиками $E = 0{,}42\times10^5$ кг/см^2, $\nu = 0{,}3$.

На рис.3 показаны соответствующие графики при тех же ζ_0, ζ_1, но при $\delta u_1 = 1{,}04$, $\delta u_2 = 1{,}25$. Видно, что внешние штампы "отжимают" поверхность цилиндра вблизи концов внутреннего штампа, и там возникают растягивающие напряжения.

Аналогичный эффект имеет место и при $\zeta_0 = 0{,}25$, $\zeta_1 = 0{,}66$, $\delta u_1 = 1{,}25$, $\delta u_2 = 1{,}04$. Тогда внутренний штамп "отжимает" поверхность цилиндра от внешних штампов. Поэтому интересно найти

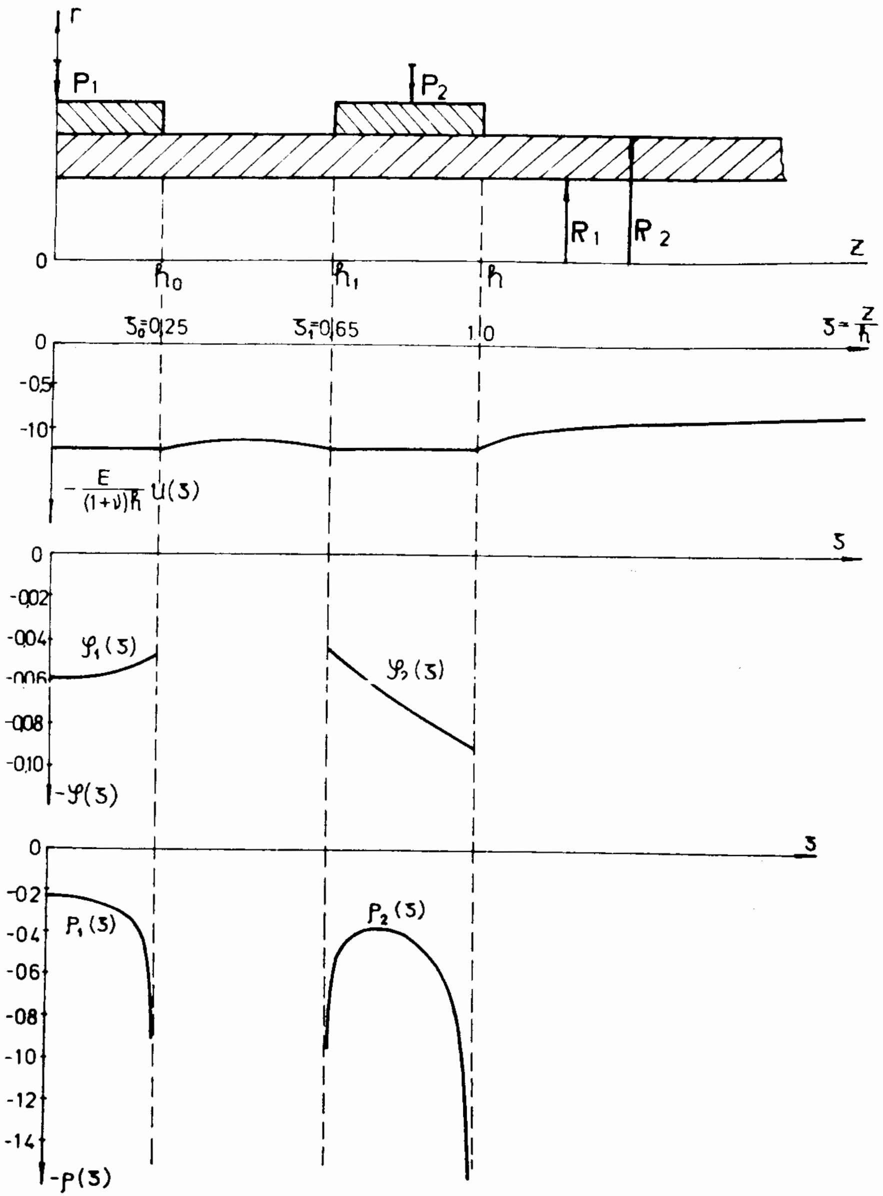
r
P1
P2
R1
R2
0
z
h0
h1
h
ξ0=0,25
ξ1=0,65
1,0
ξ = z/h
0
-0,5
-1,0
- E/((1+ν)h) u(ξ)
ξ
-0,02
-0,04
-0,06
-0,08
-0,10
φ1(ξ)
φ2(ξ)
-φ(ξ)
-0,2
-0,4
-0,6
-0,8
-1,0
-1,2
-1,4
p1(ξ)
p2(ξ)
-p(ξ)

Рис.2

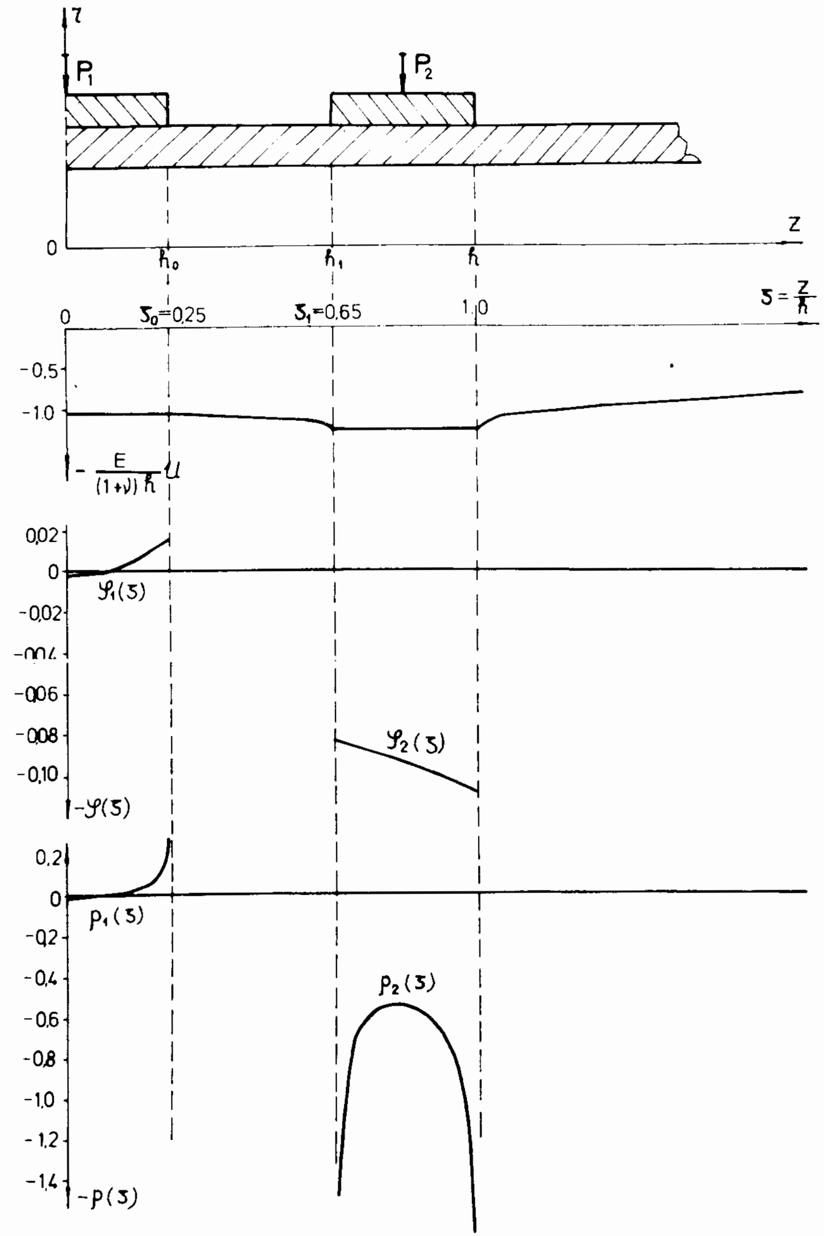
r
P1
P2
0
z
h0
h1
h
ξ0=0,25
ξ1=0,65
1,0
ξ = z/h
-0,5
-1,0
- E/((1+ν)h) u
0,02
0
φ1(ξ)
-0,02
-0,04
-0,06
-0,08
-0,10
φ2(ξ)
-φ(ξ)
0,2
p1(ξ)
-0,2
-0,4
-0,6
-0,8
-1,0
-1,2
-1,4
p2(ξ)
-p(ξ)

Рис.3

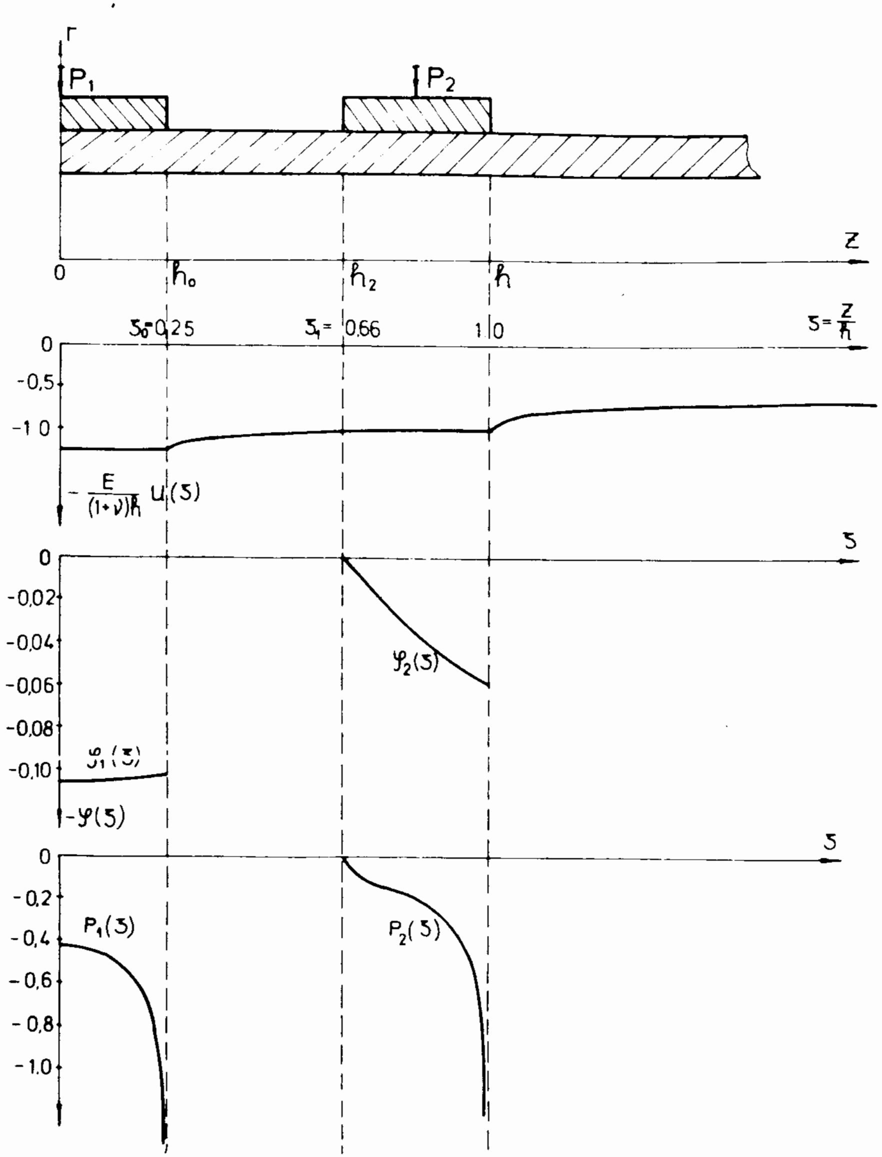

Рис.4

тот случай, когда контактные напряжения на концах $\pm\zeta_1$ равняются нулю, т.е. $\phi_2(-\zeta_1)=\phi_2(\zeta_1)=0$. Из рис.4 видно, что этот случай реализуется при $\zeta_0 = 0,25$, $\zeta_1 = 0,66$, $\delta u_1 = 1,25$, $\delta u_2 = 1,04$ при тех же самых упругих и геометрических параметрах цилиндра.

По методике, разработанной в /6,10/, после вычисления контактного давления $p(\zeta)$ можно получить распределение напряжений и перемещений во всем цилиндре, т.е. решить контактную задачу в широком смысле. Этим способом и найдены показанные здесь перемещения $u(\zeta)$ вне участков контакта.

Для проверки точности предложенного метода расчеты проводились на сетках с шагами h, $2h$, $5h$. Установлено, что относительная ошибка результатов в одних и тех же точках разных сеток не превосходит 2%.

Время одного варианта в случае дискретизованной системы /17/, /18/ из 60 уравнений в зависимости от геометрических параметров цилиндра составляет от 2 до 3 мин на ЭВМ ЕС-1060.

Сделаем следующее замечание. Рассмотренная здесь задача о трех штампах является отправным пунктом для решения задачи об одном штампе при наличии односторонних связей между цилиндром и штампом, т.е. когда поверхность цилиндра отходит от поверхности жесткого штампа на двух симметричных участках.

Автор выражает глубокую благодарность В.С.Никишину за полезные обсуждения работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боршукова С.Н., Никишин В.С. В сб.: Доклади на II национален конгрес по теоритична и приложна механика. Варна, 1975. Изд-во БАН, София, 1975.
2. Боршукова С.Н., Никишин В.С., Шапиро Г.С. Докл.БАН, 1976, 12.
3. Боршукова С.Н., Никишин В.С., Шапиро Г.С. Теоритична и приложна механика. БАН, София, 1978, 2.
4. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. "Наука", М., 1977.
5. Дмитриев В.И. Вычисл. матем. и программирование. Изд-во МГУ, М., 1975, XIII.
6. Боршукова С.Н. Канд.диссертация, София, 1975.
7. Александров В.М., Белоконь А.В. ПММ, 1967, 4.
8. Александров В.М., Белоконь А.В. ПММ, 1968, 4.
9. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. "Наука", М., 1981.
10. Боршукова С.Н. Теоритична и приложна механика. БАН, София, 1975, 3.

Рукопись поступила в издательский отдел
16 июня 1983 года.

Боршукова С.Н. Р5-83-414

Метод регуляризации Карлемана-Векуа и метод саморегуляризации для численного решения смешанных задач теории упругости

Приведены исследования и дано численное решение смешанной осесимметричной задачи теории упругости. Метод регуляризации Карлемана-Векуа использован при анализе и решении интегрального уравнения первого рода для контактного давления. Численное решение получено методом саморегуляризации. Результаты решения задачи о трех штампах, вдавливаемых одновременно на поверхность полого цилиндра, показаны в таблицах и рисунках.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Borshukova S.N. P5-83-414

The Carleman-Vecua's Regularity Method and the Self-Regularity Method for the Numerical Solution of the Mixed Boundary Value Problems of the Elastic Theory

Some results of the analysis and numerical solution of the mixed axisymmetric problem of the elasticity theory are given. The Carleman-Vecua's regularity method is used for analysis and the solution of the integral equation of the first sort for contact pressure. Numerical solution is received by the self-regularity method. The numerical results of solution of the problem for three stamps, simultaneously pressed into the surface of the empty cylinder, are shown in the tables and figures.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983

Перевод О.С.Виноградовой