3/X-83

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

5009/83

P5-83-398

Б.М.Барбашов, А.А.Леонович

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ТОЖДЕСТВА И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ В ГЕОМЕТРИЯХ РИМАНА, РИМАНА-КАРТАНА И В ПРОСТРАНСТВАХ ПРОИЗВОЛЬНОЙ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

1983

Интерес к изучению топологических инвариантов обусловлен тем, что в квантовой теории поля в искривленном пространстве-времени аксиальные и конформные аномалии выражаются через топологические инварианты Понтрягина и Эйлера-Пуанкаре для многообразия, на котором заданы физические поля [1]. Представляет также интерес рассмотрение с дифференциально-геометрической точки зрения топологических инвариантов в различных геометриях и в пространствах четной размерности.

В работе [2] с помощью предложенного там вывода симметричного тензора энергии-импульса, основанного на вычислении производной Ли от лагранжиана, получен обобщенный тензор Эйнштейна для гравитационных лагранжианов с произвольной зависимостью от тензора Римана

$$G_{ab} = X_a^{\ ijk} R_{bijk} + X_b^{\ ijk} R_{aijk} + 2(\nabla^i \nabla^j + \nabla^j \nabla^i) X_{aijb} - g_{ab} L, \qquad /1/$$

$$\nabla^a G_{ab} \equiv 0,$$

где

$$L = L(g_{ab}, R_{abij}), \quad X^{abij} = \frac{\partial L}{\partial R_{abij}}.$$

Используя тождества Бьянки, Якоби для тензора Римана и выражение для коммутатора ковариантных производных, получим, что в 4-мерном пространстве-времени обобщенный тензор Эйнштейна обращается в нуль тождественно,

$$G_{ab} \equiv 0 \qquad /2/$$

для

$$L = R_{abij} R^{\tilde{ab}ij} \qquad \text{/инвариант Понтрягина/}, \qquad /3/$$

и для

$$L = R_{abij} R^{\tilde{ab}\tilde{ij}} \qquad \text{/инвариант Эйлера-Пуанкаре/}, \qquad /4/$$

где

$$R_{\tilde{ab}ij} = \frac{1}{2} \epsilon_{abcd} R^{cd}_{\ \ ..ij} \quad .$$

Для лагранжиана /4/ тождество /2/ называется также тождеством Ланцоша [3].

В случае пространства размерности 2n тождество /2/ выполняется для

$$L = \frac{1}{2^n}\,\epsilon^{a_1a_2\dots a_{2n-1}a_{2n}}\,\delta^{j_1\dots j_n}_{i_1\dots i_n}\,R^{i_1}_{j_1a_1a_2}\dots R^{i_n}_{j_na_{2n-1}a_{2n}}, \qquad /5/$$

$$L = \frac{1}{2^n}\,\delta^{\beta_1\dots\beta_{2n}}_{a_1\dots a_{2n}}\,R^{a_1a_2}_{\beta_1\beta_2}\dots R^{a_{2n-1}a_{2n}}_{\beta_{2n-1}\beta_{2n}}, \qquad /6/$$

что является обобщением /3/-/4/ для пространства любой четной размерности.

Перейдем к рассмотрению дифференциальных тождеств и топологических инвариантов в геометрии Римана-Картана [4-8].

Тензор кривизны в геометрии Римана-Картана имеет вид

$$\mathcal{R}_{\nu\mu\lambda\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\kappa} = R_{\nu\mu\xi\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\kappa} + 2\nabla_{[\nu}\,T_{\mu]\lambda\cdot}^{\cdot\cdot\kappa} + 2T_{[\nu|\sigma|\cdot}^{\cdot\cdot\kappa}\,T_{\mu]\lambda\cdot}^{\cdot\cdot\sigma}, \qquad /7/$$

где

$$T_{\mu\lambda\cdot}^{\cdot\cdot\kappa} = S_{\mu\lambda\cdot}^{\cdot\cdot\kappa} - S_{\lambda\cdot\mu}^{\cdot\kappa\cdot} + S_{\cdot\mu\lambda}^{\kappa\cdot\cdot}, \quad S_{\mu\lambda\cdot}^{\cdot\cdot\kappa} = \Gamma^{\kappa}_{[\mu\lambda]} \; -$$

тензор кручения, ∇_μ – ковариантная производная по римановой связности. $\mathcal{R}_{\mu\nu\lambda\cdot}^{\cdot\cdot\kappa}$ удовлетворяет следующим дифференциальным тождествам [4]:

$$\nabla_{[\lambda}\mathcal{R}_{\mu\nu]\alpha\beta} - T_{[\lambda|\alpha|\cdot}^{\cdot\cdot\sigma}\,\mathcal{R}_{\mu\nu]\sigma\beta} - T_{[\lambda|\beta|\cdot}^{\cdot\cdot\sigma}\,\mathcal{R}_{\mu\nu]\alpha\sigma} = 0. \qquad /8/$$

В работе [2] для лагранжиана $L = L(\phi, \nabla_k\phi)$, где ϕ – тензорное поле любого ранга, было получено тождество

$$\nabla^b T_{ba} = -[L]\,\nabla_a\phi, \qquad /9/$$

где

$$T_{ab} = \frac{1}{2}(\pi_a\nabla_b\phi + \pi_b\nabla_a\phi) + \nabla^c(\pi_a S_{bc}\phi + \pi_b S_{ac}\phi) \; -$$

симметричный тензор энергии-импульса, $\pi_a = \partial L/\partial\nabla_a\phi$, $[L] = \partial L/\partial\phi - \nabla_a\pi^a$ – производная Лагранжа, тензор $S^{ij}\phi$ определяется соотношением

$$(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)\phi = -R_{abij}S^{ij}\phi.$$

Объединяя соотношения /1/ и /9/ для лагранжиана $L = L(g_{ab}, \mathcal{R}_{abij})$ с произвольной зависимостью от тензора кривизны геометрии Римана-Картана, после некоторых преобразований получим следующее тождество:

$$\nabla^\mu G_{\mu\alpha} = -[L]_{abc}\,\nabla_\alpha T^{abc}, \qquad /10/$$

где

$$G_{\mu\alpha} = X_\mu^{abc}\mathcal{R}_{\alpha abc} + X_\alpha^{abc}\mathcal{R}_{\mu abc} - g_{\mu\alpha}L + T_\alpha^{\cdot bc}[L]_{\mu bc} + T_\mu^{bc}[L]_{abc} + 2\nabla^\beta([L]_{\alpha\mu\beta} + [L]_{\mu\alpha\beta}), \qquad /11/$$

$$[L]_{abc} = \nabla^\sigma X_{\sigma abc} - T^{\sigma\cdot\lambda}_{\cdot b\cdot}X_{\sigma a\lambda c} + T^{\sigma\cdot\lambda}_{\cdot c\cdot}X_{\sigma a\lambda b}, \qquad /12/$$

$$X_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{\partial L}{\partial\mathcal{R}^{\mu\nu\alpha\beta}}.$$

Используя тождество /8/, получим, что в 4-мерном пространстве-времени

$$G_{\mu\alpha} \equiv 0, \quad [L]_{abc} \equiv 0 \qquad /13/$$

для

$$L = \mathcal{R}_{abij}\,\tilde{\mathcal{R}}^{abij} \quad \text{/инвариант Черна/}, \qquad /14/$$

$$L = \mathcal{R}_{abij}\,\mathcal{R}^{\tilde{ab}\tilde{ij}} \quad \text{/инвариант Эйлера-Пуанкаре/}. \qquad /15/$$

В случае пространства размерности 2n тождества /13/ выполняются для лагранжианов вида

$$L = \frac{1}{2^n}\,\epsilon^{a_1a_2\dots a_{2n-1}a_{2n}}\,\delta^{j_1\dots j_n}_{i_1\dots i_n}\,\mathcal{R}^{\cdot\cdot\cdot i_1}_{a_1a_2j_1\cdot}\dots\mathcal{R}^{\cdot\cdot\cdot i_n}_{a_{2n-1}a_{2n}j_n\cdot}, \qquad /16/$$

$$L = \frac{1}{2^n}\,\delta^{\beta_1\dots\beta_{2n}}_{a_1\dots a_{2n}}\,\mathcal{R}^{a_1a_2}_{\beta_1\beta_2}\dots\mathcal{R}^{a_{2n-1}a_{2n}}_{\beta_{2n-1}\beta_{2n}}, \qquad /17/$$

что является обобщением /14-15/ для пространства любой четной размерности.

В пространствах симметричной аффинной связности с помощью приведенного способа получим тождества

$$\nabla_\mu G^\mu_{\cdot a} \equiv J_a\,, \qquad L = L(\mathcal{R}^{\cdots\lambda}_{\sigma\beta\gamma}\,, g_{\mu\nu})\,,$$

$$\mathcal{R}^{\cdots\beta}_{[\mu\nu a]\cdot} = 0\,, \qquad \nabla_{[\lambda}\,\mathcal{R}^{\cdots\beta}_{\mu\nu]a\cdot} = 0\,, \quad \nabla_\lambda\, g_{\mu\nu} \neq 0\,,$$

$$G^\mu_{\cdot a} = 2X^{\mu ab\cdot}_{\cdots c}\,\mathcal{R}^{\cdots c}_{aab} + g_{a\beta}\,\nabla_\lambda(X^{\mu\lambda\beta} - X^{\lambda\mu\beta}) - \delta^\mu_a L\,,$$

$$J_a = -2(\mathcal{R}^{\cdots\lambda}_{\sigma a\mu} - \mathcal{R}^{\cdot\lambda\cdot\cdot}_{\mu\cdot\sigma a})\,T^{\theta\mu\cdot}_{\cdot\cdot\lambda} + (\mathcal{R}_{\mu\lambda} - \mathcal{R}_{\lambda\mu})\,X^{\mu\lambda\beta}\,g_{a\beta} +$$

$$+ (\nabla_\mu g_{a\beta})\,\nabla_\lambda(X^{\mu\lambda\beta} - X^{\lambda\mu\beta}) - \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu}}\,\nabla_a g_{\mu\nu}\,,$$

$$X^{\mu\lambda\sigma} = T^{\sigma\mu\lambda} - T^{\mu\lambda\sigma} - T^{\lambda\sigma\mu}\,, \quad T^{\sigma\mu\cdot}_{\cdot\cdot\lambda} = \nabla_\rho X^{\rho\sigma\mu\cdot}_{\cdots\lambda}\,,$$

$$G^\mu_{\cdot a} \equiv 0\,, \quad J_a \equiv 0$$

для лагранжевой плотности, равной инварианту Черна

$$L = \frac{1}{2^n}\,\epsilon^{a_1 a_2 \dots a_{2n}}\,\delta^{j_1\dots j_n}_{i_1\dots i_n}\,\mathcal{R}^{\cdots i_1}_{a_1 a_2 j_1}\dots\mathcal{R}^{\cdots i_n}_{a_{2n-1}\,a_{2n} j_n}$$

Частным случаем пространств симметричной аффинной связности является геометрия Вейля, в которой

$$\nabla_a g_{\mu\nu} = 2B_a g_{\mu\nu}\,.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Quantum Gravity, 1,2. First and second Oxfors Symposia. Ed. by C.J.Isham, a.o. Oxfors, Clarendon Press, 1975; 1981.
2. Барбашов Б.М., Леонович А.А., Пестов А.Б. ОИЯИ, Р2-82-151; ЯФ, 1983, 37, в. 7/1/.
3. Lanczos C. Ann.Math., 1938, 39, p. 842.
4. Норден А.П. Пространства аффинной связности. "Наука", М.,1976.
5. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии, "Наука", М., 1981, т. 1,2.
6. Hehl F.W. et al. Rev.Mod.Phys., 1976, 48, p. 393-416.
7. Nieh H.T. J. Math.Phys., 1980, v. 21, No. 6, p. 1439-1441.
8. Ponomariov V.N. Gen.Rel. and Grav.,1982, v.14, N 4,p.309-330. p.309-330.

Рукопись поступила в издательский отдел
13 июня 1983 года.

Барбашов Б.М., Леонович А.А. Р5-83-398

Дифференциальные тождества и топологические инварианты в геометриях Римана, Римана-Картана и в пространствах произвольной аффинной связности

Получены дифференциальные тождества в геометриях Римана, Римана-Картана и в пространствах аффинной связности для гравитационных лагранжианов с произвольной зависимостью от тензора кривизны. Рассмотрены топологические инварианты Понтрягина, Черна и Эйлера-Пуанкаре в пространствах любой четной размерности.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Barbashov B.M., Leonovich A.A. P5-83-398

Differential Identities and Topological Invariants in the Rieman, Rieman-Cartan Geometries and in the Spaces of the Arbitrary Affine Connection

The differential identities in the Rieman, Rieman-Cartan geometries and in the spaces of the arbitrary affine connection are obtained, the gravitation Lagrangians being under consideration with the arbitrary dependence on the curvature tensor. The topological Chern, Pontryagin and the Euler-Poincare's invariants in the spaces of any even dimension are considered.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983

Перевод О.С.Виноградовой