сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P5-83-331

В.М.Лебеденко

СИСТЕМЫ ОБРАЗУЮЩИХ КОМПЛЕКСНОЙ АЛГЕБРЫ ЛИ ГРУППЫ ЛОРЕНЦА, СОСТОЯЩИЕ ИЗ ДВУХ ЭЛЕМЕНТОВ

1983

Известно, что комплексная алгебра Ли группы Лоренца, которую мы в дальнейшем будем обозначать через L, разлагается в прямую сумму двух идеалов

$$L = L_1 \oplus L_2,$$

где алгебры L_1 и L_2 изоморфны комплексной алгебре Ли группы $SO(3)$. В каждой из указанных компонент можно выбрать такие базисы x_k, y_k, z_k / $k = 1,2$/, что

$$[x_k, y_k] = z_k, \quad [y_k, z_k] = x_k, \quad [z_k, x_k] = y_k \quad (k = 1,2).$$

В силу этого выбора произведение в каждой из компонент ведет себя как обычное векторное произведение в действительном евклидовом пространстве E_3. Точнее, если x, y, z - такой базис в некоторой алгебре A, изоморфной комплексной алгебре Ли группы $SO(3)$, что

$$[x, y] = z, \quad [y, z] = x, \quad [z, x] = y,$$

то для любых ее элементов a и b

$$a = kx + \ell y + mz, \qquad b = k'x + \ell' y + m'z,$$

$$[a, b] = \begin{vmatrix} x & y & z \\ k & \ell & m \\ k' & \ell' & m' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \ell & m \\ \ell' & m' \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} k & m \\ k' & m' \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} k & \ell \\ k' & \ell' \end{vmatrix} z .$$

В дальнейшем мы увидим, что, как и в случае действительного векторного произведения, умножение в таких алгебрах тесно связано с билинейной комплексной формой , которую здесь и в дальнейшем, допуская вольность изложения, будем называть скалярным произведением. Итак, для произвольных двух элементов алгебры A, a и b, $a = kx + \ell y + mz$, $b = k'x + \ell' y + m'z$, скалярным произведением (a, b) будем называть выражение

$$kk' + \ell\ell' + mm' .$$

Пару a, b назовем ортонормированной, если $(a, b) = 0$, $(a, a) = 1 = (b, b)$.

Вернемся к алгебре L. Для произвольного элемента $a \subseteq L$, компоненты a в L_1 и L_2 обозначим через a_1 и a_2 соответственно, т.е.

$$a = a_1 + a_2, \quad a_1 \subseteq L_1, \quad a_2 \subseteq L_2.$$

Известно, что алгебра L, как и все полупростые алгебры Ли, над комплексным полем обладает двумя образующими элементами /см. [1] /. Простым примером этому является система, состоящая из элементов a и b вида

$$a = 2x_1 + x_2, \quad b = y_1 + y_2$$

/здесь $\frac{1}{3}([[a, b], a] - b) = y_1$, $b - y_1 = y_2$,

$$\frac{1}{2}[a, y_1] = z_1, \quad [a, y_2] = z_2, \quad [y_1, z_1] = x_1,$$

$$[y_2, z_2] = x_2).$$

Этот пример можно обобщить, рассмотрев элементы

$$a' = \alpha x_1 + \beta x_2,$$

$$b' = \gamma y_1 + \delta y_2,$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta \subseteq C$; $\alpha\beta\gamma\delta(\alpha^2 - \beta^2) \neq 0$.

Описание всех систем образующих алгебры L, состоящих из двух элементов, дает следующее

Предложение:

А/ Элементы a и b, $a = a_1 + a_2$, $b = b_1 + b_2$, где $a_k, b_k \subseteq L_k$ /$k = 1,2$/, a_1, b_1 - ортонормированная пара, a_2, b_2, c_2 ($c_2 = [a_2, b_2]$) - линейно независимая тройка, порождают алгебру L тогда и только тогда, когда пара a_2, b_2 - не ортонормирована.

В/ Всякая система образующих алгебру L, состоящая из двух элементов, либо имеет вид, указанный в части А/, либо может быть получена из элементов системы такого вида путем невырожденного линейного преобразования.

Доказательство этого утверждения мы приводим ниже в разделе 3.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РАССМОТРЕНИЯ

Лемма 1. Пусть a, b, $c \neq 0$ - элементы алгебры Ли, изоморфной комплексной алгебре группы SO(3) и

$$[a, b] = c.$$

Тройка a, b, c удовлетворяет соотношениям $[b, c] = a$, $[c, a] = b$ тогда и только тогда, когда пара a, b - ортонормирована /см. п.1/.

Доказательство. Пусть в комплексной алгебре Ли группы SO(3) дан базис x, y, z, $[x, y] = z$, $[y, z] = x$, $[z, x] = y$. Тогда тройки a, b, c c $[a, b] = c$ $(a, b, c \neq 0)$, $a = kx + \ell y + mz$, $b = k'x + \ell' y + m'z$, $k, \ell, m, k', \ell', m' \subseteq C$ и с соотношениями

$$[b, c] = a, \quad [c, a] = b$$

исчерпываются такими тройками, у которых

$$k^2 + \ell^2 + m^2 = 1 = k'^2 + \ell'^2 + m'^2,$$

$$kk' + \ell\ell' + mm' = 0.$$

Здесь доказательство можно провести так же, как и для векторного произведения в действительном евклидовом пространстве E_3. Наметим только некоторые его детали. Пусть $k^2 + \ell^2 + m^2 = 1 = k'^2 + \ell'^2 + m'^2$, $kk' + \ell\ell' + mm' = 0$.
Тогда $[b, c] = a$.
Действительно,

$$c = [a, b] = \begin{vmatrix} \ell & m \\ \ell' & m' \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} k & m \\ k' & m' \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} k & \ell \\ k' & \ell' \end{vmatrix} z,$$

а

$$[b, c] = \begin{vmatrix} x & y & z \\ k' & \ell' & m' \\ \begin{vmatrix} \ell & m \\ \ell' & m' \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} k & m \\ k' & m' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} k & \ell \\ k' & \ell' \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

Рассмотрим, например, первую компоненту. Она равна

$$\ell' \begin{vmatrix} k & \ell \\ k' & \ell' \end{vmatrix} + m' \begin{vmatrix} k & m \\ k' & m' \end{vmatrix} = \ell'(k\ell' - \ell k') + m'(km' - k'm) =$$

$$= k(\ell'^2 + m'^2) - k'(\ell\ell' + mm') = k(1 - k'^2) - k'(-kk') = k.$$

Аналогично можно рассмотреть и остальные компоненты и показать, что $[c, a] = b$.

Пару a, b назовем ортонормированной, если $(a, b) = 0$, $(a, a) = 1 = (b, b)$.

Вернемся к алгебре L. Для произвольного элемента $a \in L$, компоненты a в L_1 и L_2 обозначим через a_1 и a_2 соответственно, т.е.

$$a = a_1 + a_2, \quad a_1 \in L_1, \quad a_2 \in L_2.$$

Известно, что алгебра L, как и все полупростые алгебры Ли, над комплексным полем обладает двумя образующими элементами /см. /1/ /. Простым примером этому является система, состоящая из элементов a и b вида

$$a = 2x_1 + x_2, \quad b = y_1 + y_2$$

/здесь $\frac{1}{3}([[a, b], a] - b) = y_1$, $b - y_1 = y_2$,

$$\frac{1}{2}[a, y_1] = z_1, \quad [a, y_2] = z_2, \quad [y_1, z_1] = x_1,$$

$$[y_2, z_2] = x_2).$$

Этот пример можно обобщить, рассмотрев элементы

$$a' = \alpha x_1 + \beta x_2,$$

$$b' = \gamma y_1 + \delta y_2,$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in C$; $\alpha\beta\gamma\delta(\alpha^2 - \beta^2) \neq 0$.

Описание всех систем образующих алгебры L, состоящих из двух элементов, дает следующее

Предложение:

A/ Элементы a и b, $a = a_1 + a_2$, $b = b_1 + b_2$, где $a_k, b_k \in L_k$ /k = 1,2/, a_1, b_1 - ортонормированная пара, a_2, b_2, c_2 ($c_2 = [a_2, b_2]$) - линейно независимая тройка, порождают алгебру L тогда и только тогда, когда пара a_2, b_2 - не ортонормирована.

B/ Всякая система образующих алгебру L, состоящая из двух элементов, либо имеет вид, указанный в части A/, либо может быть получена из элементов системы такого вида путем невырожденного линейного преобразования.

Доказательство этого утверждения мы приводим ниже в разделе 3.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РАССМОТРЕНИЯ

Лемма 1. Пусть a, b, $c \neq 0$ - элементы алгебры Ли, изоморфной комплексной алгебре группы SO(3) и

$$[a, b] = c.$$

Тройка a, b, c удовлетворяет соотношениям $[b, c] = a$, $[c, a] = b$ тогда и только тогда, когда пара a, b - ортонормирована /см. п.1/.

Доказательство. Пусть в комплексной алгебре Ли группы SO(3) дан базис x, y, z, $[x, y] = z$, $[y, z] = x$, $[z, x] = y$. Тогда тройки a, b, c с $[a, b] = c$ $(a, b, c \neq 0)$, $a = kx + \ell y + mz$, $b = k'x + \ell' y + m'z$, $k, \ell, m, k', \ell', m' \in C$ и с соотношениями

$$[b, c] = a, \quad [c, a] = b$$

исчерпываются такими тройками, у которых

$$k^2 + \ell^2 + m^2 = 1 = k'^2 + \ell'^2 + m'^2,$$

$$kk' + \ell\ell' + mm' = 0.$$

Здесь доказательство можно провести так же, как и для векторного произведения в действительном евклидовом пространстве E_3. Наметим только некоторые его детали. Пусть $k^2 + \ell^2 + m^2 = 1 = k'^2 + \ell'^2 + m'^2$, $kk' + \ell\ell' + mm' = 0$.

Тогда $[b, c] = a$.

Действительно,

$$c = [a, b] = \begin{vmatrix} \ell & m \\ \ell' & m' \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} k & m \\ k' & m' \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} k & \ell \\ k' & \ell' \end{vmatrix} z,$$

а

$$[b, c] = \begin{vmatrix} x & y & z \\ k' & \ell' & m' \\ \begin{vmatrix} \ell & m \\ \ell' & m' \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} k & m \\ k' & m' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} k & \ell \\ k' & \ell' \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

Рассмотрим, например, первую компоненту. Она равна

$$\ell' \begin{vmatrix} k & \ell \\ k' & \ell' \end{vmatrix} + m' \begin{vmatrix} k & m \\ k' & m' \end{vmatrix} = \ell'(k\ell' - \ell k') + m'(km' - k'm) =$$

$$= k(\ell'^2 + m'^2) - k'(\ell\ell' + mm') = k(1 - k'^2) - k'(-kk') = k.$$

Аналогично можно рассмотреть и остальные компоненты и показать, что $[c, a] = b$.

С другой стороны, пусть $[a,b]=c$, $[b,c]=a$, $[c,a]=b$ и $k^2+\ell^2+m^2=\alpha$, $k'^2+\ell'^2+m'^2=\beta$, $kk'+\ell\ell'+mm'=\gamma$. Так как $a,b,c\neq 0$

и $[a,b]=c$, $[b,c]=a$, $[c,a]=b$,

то, в силу простоты рассматриваемой алгебры, a,b,c - ее базис. Следовательно, элементы a и b линейно независимы. Как и ранее, из условия $[b,c]=a$ получаем, что

$$k(\beta-k'^2)-k'(\gamma-kk')=k,$$

$$\ell(\beta-\ell'^2)-\ell'(\gamma-\ell\ell')=\ell,$$

$$m(\beta-m'^2)-m'(\gamma-mm')=m,$$

т.е.

$$(\beta-1)k\quad-\gamma k'=0,$$
$$(\beta-1)\ell\quad-\gamma \ell'=0,$$
$$(\beta-1)m\quad-\gamma m'=0.$$

В силу линейной независимости a и b: $\beta=1$, $\gamma=0$. Аналогично доказывается, что и $\alpha=1$.

Лемма 2. Если a,b - система образующих алгебры Ли A, изоморфной комплексной алгебре Ли группы $SO(3)$, то с помощью некоторого невырожденного линейного преобразования ее можно ортонормировать.

Доказательство. Легко заметить, что a,b,c $(c=[a,b])$ - базис алгебры A. Если $(a,b)=0$, то $(a,a)\neq 0\neq(b,b)$, и утверждение для этого случая очевидно. Действительно, поступая так же, как и при доказательстве леммы 1, получаем, что, например, первые компоненты $[b,c]$ и $[a,c]$ соответственно равны

$$(b,b)k-(a,b)k'=(b,b)k,$$

$$(a,b)k-(a,a)k'=-(a,a)k'$$

/остальные компоненты записываются аналогично; здесь $a=kx+\ell y+mz$, $b=k'x+\ell'y+m'z$ /. Если $(b,b)=0$, то $[b,c]=0$, $[a,c]=\lambda b$ и $[A,A]\neq A$ как подпространство A, натянутое на элементы λb и c. Мы приходим тут к противоречию. То же самое получается и при $(a,a)=0$.

Если $(a,b)\neq 0$ и $(a,a)\neq 0$, то элементы a и $b'=a+\beta b$, где $\beta=\dfrac{-(a,a)}{(a,b)}$, тоже порождают A и $(a,b')=0$. Далее из предыдущего

вытекает, что $(b',b')\neq 0$. Эту систему легко нормировать. Аналогично можно поступить, если $(b,b)\neq 0$.

Остается рассмотреть случай, когда $(a,b)\neq 0$, $(a,a)=(b,b)=0$. Здесь пара $a+b$, $a-b$ порождает A и удовлетворяет условиям

$$(a+b,a-b)=(a,a)-(b,b)=0,$$

$$(a+b,a+b)=2(a,b)\neq 0,$$

$$(a-b,a-b)=-2(a,b)\neq 0$$

и ее можно нормировать. Лемма доказана.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Пусть a,b - система образующих алгебры L, $a=a_1+a_2$, $b=b_1+b_2$ / $a_k,b_k\in L_k$, $k=1,2$/. Тогда пара a_1,b_1 порождает L_1, а пара a_2,b_2 - L_2, т.е. тройка a_2,b_2,c_2 $(c_2=[a_2,b_2])$ линейно независима. В силу леммы 2 существует невырожденное линейное преобразование элементов a_1,b_1, при котором они переходят в ортонормированную пару. Продолжая это преобразование естественным образом на пару a,b, получаем систему образующих типа, указанного в части А/ нашего предложения. Перейдем теперь к доказательству этой части предложения. Пусть a,b - система образующих требуемого здесь типа:

$$a=a_1+a_2,\quad b=b_1+b_2;\quad a_k,b_k\in L_k\ (k=1,2),$$

$$(a_1,a_1)=(b_1,b_1)=1,\quad (a_1,b_1)=0\quad([a_2,b_2]=c_2),$$

a_2,b_2,c_2 - линейно независимы. Если

$$[a_1,b_1]=c_1,\quad c_1+c_2=c,$$

то из леммы 1 вытекает, что при

$$(a_2,a_2)=1=(b_2,b_2),\quad (a_2,b_2)=0$$

выполняются соотношения

$$[a,b]=c;\ [b,c]=a,\ [c,a]=b,$$

т.е. эти элементы порождают лишь трехмерную подалгебру L.

Предположим теперь, что пара a_2,b_2 - не ортонормирована. Тогда опять, в силу леммы 1, получаем, что либо $[b_2,c_2]\neq a_2$, либо $[c_2,a_2]\neq b_2$. Предположим сначала, что $[c_2,a_2]\neq b_2$.

Тогда элементы $a, b, c, [a, c]$ линейно независимы. Поэтому подалгебра, порожденная элементами a и b, имеет размерность не менее четырех. Либо эта подалгебра совпадает с L, либо имеет один из видов:

1/ $A_1 \oplus A_2$, где A_k - двумерные неабелевы подалгебры из L_k,
2/ $L_1 \oplus B_2$, $B_1 \oplus L_2$, где B_k - одномерные подалгебры в L_k;
3/ $L_1 \oplus A_2$, $A_1 \oplus L_2$, где A_k - двумерные неабелевы подалгебры в L_k.

Так как компонента элемента

$$[[a, c], [a, b]]$$

в L_1 равна $-a_1 \neq 0$, то рассматриваемая подалгебра не 2-разрешима, т.е. она не есть алгебра вида 1/. Тройки a_1, b_1, c_1 и a_2, b_2, c_2 линейно независимы. Поэтому, если наша подалгебра содержит хоть одну из компонент L_k /$k = 1,2$/, то она содержит и другую, т.е. она не является алгеброй видов 2/ и 3/ и, следовательно, совпадает с L.

Аналогично мы можем поступить, если $[b_2, c_2] \neq a_2$. Тут четверка $a, b, c, [b, c]$ линейно независима и также $[[a, c], [a, b]] \neq 0$. Предложение доказано*.

Автор считает своим приятным долгом поблагодарить В.Г.Кадышевского за инициирование этой работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахтурин Ю.А., Ольшанский А.Ю. Об аппроксимации и характеристических подалгебрах свободных алгебр Ли. Труды семинара им. И.Г.Петровского. Изд.-во МГУ, М., 1976, вып. 2, с. 144-150.
2. Джекобсон Н. Алгебры Ли. "Мир", М., 1964.

Рукопись поступила в издательский отдел
24 мая 1983 года.

*Аналогичный результат можно получить и в случае прямой суммы двух алгебр Ли, изоморфных действительной алгебре Ли группы SO(3).

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Лебеденко В.М. P5-83-331

Системы образующих комплексной алгебры Ли группы Лоренца, состоящие из двух элементов

Дается описание всех пар элементов, порождающих /в смысле применения линейных операций и операции коммутирования/ комплексную оболочку алгебры Ли группы Лоренца. Настоящая работа может быть полезной физикам-теоретикам.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Lebedenko V.M. P5-83-331

Generating System of Complex Lee Algebra of Lorenz Group which Consist of Two Elements

All pairs of elements which generate (in the sence of employing linear operations and the commutation operation) complex cover of Lee algebra of Lorentz group are described.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983

Перевод О.С.Виноградовой.