объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна



P5-83-246

Г.А.Емельяненко, К.Мюле

# ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ РЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ ЗАВИСИМОЙ И НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННЫХ

Направлено в журнал
"Mathematische Operationsforschung
und Statistik"

1983

В настоящее время хорошо изучена /1/ и нашла широкое практическое применение /например, /2,3/ / техника сглаженной сплайн-интерполяции. Однако решение многих практических задач /см., например, /4,5/ /, по-видимому, может быть улучшено, если этот аппарат обосновать на случай, когда сама функция и ее аргумент являются случайными переменными. Но при этом возникает самостоятельная задача по изучению свойств оценок параметров регрессионных моделей, учитывающих названный фактор случайности. Следует отметить, что большую практическую ценность при этом представляет материал, собранный и обобщенный авторами /6/.

В настоящей работе приводятся лишь результаты исследований по линейным регрессионным моделям, которые являются дополнением, и, на наш взгляд, некоторым обобщением результатов /7/. Этот результат также восполнит его отсутствие в /6/.

Рассматриваем случайный процесс

$$y = y(x) \qquad /1/$$

со случайными переменными $x$ и $y$. Пусть для этого процесса /1/ дана выборка, состоящая из $n$ групп выборочных значений переменных $x$ и $y$, причем каждая группа содержит $p_i$ значений:

$$\begin{aligned} &(x_{11}, x_{12}, \ldots x_{1p1}) \quad , \quad \ldots\ldots, \quad (x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{npn}) \quad ; \\ &(y_{11}, y_{12}, \ldots y_{1p1}) \quad , \quad \ldots\ldots, \quad (y_{n1}, y_{n2}, \ldots, y_{npn}) \quad . \end{aligned} \qquad /2/$$

Для аппроксимации случайного процесса /1/ при заданной выборке /2/ рассматривается следующая линейная модель:

$$\eta_i = \beta_0 + \beta_1(\mu_i - \bar{\mu}), \quad i = 1(1)n. \qquad /3/$$

Здесь

$$\bar{\mu} = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i} \sum_{i=1}^{n} p_i \mu_i \; . \qquad /4/$$

Задача состоит в определении коэффициентов /параметров/ $\beta_0, \beta_1, \mu_i$ $(i = 1(1)n)$ модели /3/, удовлетворяющих максимуму функции правдоподобия испытываемой выборки /2/. Для нормально распределенных случайных величин функция правдоподобия имеет вид:

$$\mathfrak{L} = \left(2\pi\sigma_u\sigma_\nu\sqrt{1-\rho^2_{u\nu}}\right)^{-\sum\limits_{i=1}^{n} p_i} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2_{u\nu})}\phi(x, y, \eta, \mu)\right], \qquad /5/$$

где

$$\phi(x, y, \eta, \mu) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\left[\left(\frac{y_{ij}-\eta_i}{\sigma_\nu}\right)^2 - 2\rho_{u\nu}\left(\frac{y_{ij}-\eta_i}{\sigma_\nu}\right)\left(\frac{x_{ij}-\mu_i}{\sigma_u}\right) + \left(\frac{x_{ij}-\mu_i}{\sigma_u}\right)^2\right]. \qquad /6/$$

Предположим, что коэффициенты $\sigma_u$, $\sigma_\nu$, $\sigma_{u\nu}$ постоянны и заданы. Нетрудно видеть, что параметры $\beta_1$, $\beta_0$, $\mu_i$ $(i = 1(1)n)$, при которых достигается максимум функции $\ln\mathfrak{L}$, удовлетворяют следующей существенно нелинейной системе уравнений:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\left[(\bar{y}_i - \eta_i) + \frac{\rho_{u\nu}\sigma_\nu}{\sigma_u}(\mu_i - \bar{x}_i)\right] = 0, \qquad /7/$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\left[(\bar{y}_i - \eta_i) - \frac{\rho_{u\nu}\sigma_\nu}{\sigma_u}(\bar{x}_i - \mu_i)\right](\mu_i - \bar{\mu}) = 0, \qquad /8/$$

$$(\bar{y}_i - \eta_i) - \frac{\rho_{u\nu}\sigma_\nu}{\sigma_u}(\bar{x}_i - \mu_i)\frac{\beta_1 - \dfrac{\sigma_\nu}{\sigma_u\rho_{u\nu}}}{\beta_1 - \dfrac{\sigma_\nu}{\sigma_u}\rho_{u\nu}} = 0. \qquad /9/$$

Будем искать решение системы /7/-/9/ в естественном предположении, что

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(\bar{x}_i - \mu_i) = 0, \qquad /10/$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(\bar{y}_i - \eta_i) = 0. \qquad /11/$$

Здесь и в дальнейшем

$$\bar{x}_i = \frac{1}{p_i}\sum_{j=1}^{p_i} x_{ij}; \quad \bar{y}_i = \frac{1}{p_i}\sum_{j=1}^{p_i} y_{ij}; \quad i = 1(1)n,$$

$$\bar{x} = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i}\sum_{i=1}^{n} p_i\bar{x}_i; \quad \bar{y} = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i}\sum_{i=1}^{n} p_i\bar{y}_i.$$



Из условий /10/ и /11/ следует, что

$$\bar{\mu} = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i}\sum_{i=1}^{n} p_i\mu_i = \bar{x}$$

$$\beta_0 = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i}\sum_{i=1}^{n} p_i\bar{y}_i = \bar{y}.$$

Несложным преобразованием уравнения /8/-/9/ можно переписать в виде:

$$\beta_1 = \frac{\sum\limits_{n=1}^{n} p_i[\bar{y}_i - \beta_0 - \sigma_1(\bar{x}_i - \mu_i)](\mu_i - \bar{x})}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i(\mu_i - \bar{x})^2}, \qquad /12/$$

$$\mu_i = x + \frac{\bar{y}_i - \beta_0 - \sigma_1(\bar{x}_i - \bar{x})\dfrac{\beta_1 - \sigma_2}{\beta_1 - \sigma_1}}{\beta_1 - \sigma_1\dfrac{\beta_1 - \sigma_2}{\beta_1 - \sigma_1}}, \quad i = 1(1)n, \qquad /13/$$

где

$$\sigma_1 = \frac{\rho_{u\nu}\sigma_\nu}{\sigma_u}; \quad \sigma_2 = \frac{\sigma_\nu}{\sigma_u\rho_{u\nu}}.$$

Уравнения /12/-/13/ можно переписать так:

$$\beta_1 = \sigma_1 + \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i[\bar{y}_i - \beta_0 - \sigma_1(\bar{x}_i - \bar{x})](\mu_i - \bar{x})}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i(\mu_i - \bar{x})^2}, \qquad /14/$$

$$\mu_i = \bar{x} + \frac{(\beta_1 - \sigma_1)[\bar{y}_i - \beta_0 - \sigma_1(\bar{x}_i - \bar{x})] - \sigma_1(\bar{x}_i - \bar{x})(\sigma_1 - \sigma_2)}{(\beta_1 - \sigma_1)^2 + \left(\dfrac{\sigma_\nu}{\sigma_u}\right)^2(1 - \rho^2_{u\nu})}. \qquad /15/$$

Пусть

$$a_i = \bar{y}_i - \beta_0 - \sigma_1(\bar{x}_i - \bar{x}),$$

$$b_i = -\sigma_1(\bar{x}_i - \bar{x})(\sigma_1 - \sigma_2).$$

Тогда

$$\mu_i - \bar{x} = \mu_i - \bar{\mu} = \frac{(\beta_1 - \sigma_1)a_i + b_i}{(\beta_1 - \sigma_1)^2 + (\frac{\sigma_\nu}{\sigma_u})^2(1 - \rho_{u\nu}^2)}.$$

Подставляя выражения $\mu_i - \bar{x}$ в уравнение /14/ и обозначая $\beta_1 - \sigma_1$ через $\beta$, получим:

$$\beta_1 - \sigma_1 = \beta = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i a_i \frac{\beta a_i + b_i}{\beta^2 + d^2}}{\sum_{i=1}^{n} p_i \left(\frac{\beta a_i + b_i}{\beta^2 + d^2}\right)^2},$$

$$d^2 = \left(\frac{\sigma_\nu}{\sigma_u}\right)^2(1 - \rho_{u\nu}^2) = \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1^2.$$

Отсюда

$$(\beta^2 + d^2)\sum_{i=1}^{n} p_i a_i(\beta a_i + b_i) = \beta\sum_{i=1}^{n} p_i(\beta a_i + b_i)^2.$$

Нетрудно видеть, что

$$\sum_{i=1}^{n} p_i a_i = \sum_{i=1}^{n} p_i b_i = 0.$$

Следовательно,

$$c\beta^2 + (b - ad^2)\beta - cd^2 = 0, \qquad /16/$$

где

$$a = \sum_{i=1}^{n} p_i a_i^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i(\bar{y}_i - \beta_0 - \sigma_1(\bar{x}_i - \bar{x}))^2,$$



$$a = \sigma_y^2 + \sigma_1^2\sigma_x^2 - 2\sigma_1\sigma_{xy}, \qquad /16.1/$$

$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i(\bar{y}_i - \beta_0)^2,$$

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i(\bar{x}_i - \bar{x})^2,$$

$$\sigma_{xy} = \sum_{i=1}^{n} p_i(\bar{y}_i - \beta_0)(\bar{x}_i - \bar{x});$$

$$b = \sum_{i=1}^{n} p_i b_i^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i[-\sigma_1(\bar{x}_i - \bar{x})(\sigma_1 - \sigma_2)]^2 =$$

$$b = \sigma_1^2(\sigma_1 - \sigma_2)^2\sigma_x^2, \qquad /16.2/$$

$$c = \sum_{i=1}^{n} p_i a_i b_i = -\sum_{i=1}^{n} p_i(\bar{y}_i - \beta_0 - \sigma_1(\bar{x}_i - \bar{x})(\sigma_1 - \sigma_2))$$

$$= -\sigma_1(\sigma_1 - \sigma_2)[\sum_{i=1}^{n} p_i(\bar{y}_i - \beta_0)(\bar{x}_i - \bar{x}) - \sigma_1\sum_{i=1}^{n} p_i(\bar{x}_i - \bar{x})^2],$$

$$c = -\sigma_1(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_{xy} - \sigma_1\sigma_x^2). \qquad /16.3/$$

Таким образом, определяя $\beta$ из /16/ и подставляя его в /15/, получим $\mu_i$ $(i = 1(1)n)$. Следует заметить, что рассмотренный выше метод оценки параметров модели /3/ имеет один недостаток, состоящий в том, что параметры $\beta_1$, $\mu_i$ определяются неединственным образом, т.к. уравнение /16/ имеет два корня. Это приводит к тому, что нужно проверить, какой набор доставляет максимум функции правдоподобия /5/.

Ниже предложен итерационный процесс, позволяющий найти параметры $\beta_1$, $\mu_i$ $(i = 1(1)n)$ единственным образом. Приближенные значения для $\mu_i$ и $\beta_1$ на каждом шаге итерации вычисляются по формулам:

$$\mu_i(1) = x_i, \quad i = 1(1)n;$$

$$\mu_i(k+1) = \bar{\mu}(k) + \frac{\bar{y}_i - \beta_0 - \sigma_1(\bar{x}_i - \bar{\mu}(k))\dfrac{\beta_1(k)-\sigma_2}{\beta_1(k)-\sigma_1}}{\beta_1(k) - \sigma_1\dfrac{\beta_1(k)-\sigma_2}{\beta_1(k)-\sigma_1}}, \quad i = 1(1)n; \qquad /17.1/$$

/17/

$$\beta_1(k) = \sigma_1 + \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i[\bar{y}_i - \beta_0 - \sigma_1(\bar{x}_i - \bar{\mu}(k))](\mu_i(k) - \bar{\mu}(k))}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i(\mu_i(k) - \bar{\mu}(k))^2}, \quad k = 1,2,\ldots \qquad /17.2/$$

где

$$\bar{\mu}(k) = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i} \sum_{i=1} p_i \mu_i(k).$$

Теорема 1.

Если итерационный процесс /17/ сходится, то он сходится к решению системы /14/-/25/, причем для всех $k \geq 1$:

$$\bar{\mu}(k) = \bar{\mu} = \bar{x}, \qquad /18/$$

т.е. $\mu_i(k+1)$ и $\beta_1(k)$ могут быть вычислены по формулам:

$$\mu_i(1) = \bar{x}_i, \quad i = 1(1)n;$$

$$\mu_i(k+1) = x + \frac{\bar{y}_i - \beta_0 - \sigma_1(\bar{x}_i - \bar{x})R}{\beta_1(k) - \sigma_1 R}; \quad i = 1(1)n; \qquad /19/$$

$$\beta_1(k) = \sigma_1 + \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i[\bar{y}_i - \beta_0 - \sigma_1(\bar{x}_i - \bar{x})](\mu_i(k) - \bar{x})}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i(\mu_i(k) - \bar{x})^2},$$

где

$$R = \frac{\beta_1(k) - \sigma_2}{\beta_1(k) - \sigma_1}, \qquad k = 1,2,\ldots .$$

Доказательство

Пусть $\mu_i$ и $\beta_1$ - предел последовательности /17/, тогда, переходя к пределу в выражениях /17.1/ и /17.2/, получим уравнения



/14/ и /15/, т.е. $\mu_i$ и $\beta_1$ - решение этой системы. Равенство /18/ будем доказывать по индукции. Для $k = 1$ это верно, так как

$$\mu_i(1) = \bar{x}_i \quad (i = 1(1)n).$$

Пусть оно верно для $k > 1$. Докажем, что оно верно и для $k+1$.

Умножая обе части выражения /17.1/ на $p_i$ и суммируя по $i$ от 1 до $n$, получим

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \mu_i(k+1) = \bar{\mu}(k) \sum_{i=1}^{n} p_i + \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i[\bar{y}_i - \beta_0 - \sigma_1(\bar{x}_i - \bar{\mu}(k))R]}{\beta_1(k) - \sigma_1 R} =$$

$$= \bar{\mu}(k) \sum_{i=1}^{n} p_i + \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i(\bar{y}_i - \beta_0) - \sigma_1 R \sum\limits_{i=1}^{n} p_i(\bar{x}_i - \bar{\mu}(k))}{\beta_1(k) - \sigma_1 R}.$$

В силу условий /10/ и /11/ и предположения по индукции $\bar{\mu}(k) = \bar{x}$, имеем

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(\bar{y}_i - \beta_0) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(\bar{x}_i - \bar{\mu}(k)) = \sum_{i=1}^{n} p_i(\bar{x}_i - \bar{x}) = 0.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \mu_i(k+1) = \bar{\mu}(k) \sum_{i=1}^{n} p_i = \bar{\mu}(k+1) \sum_{i=1}^{n} p_i.$$

Теорема доказана.

Теорема 2

Итерационный процесс /19/ сходится к одному из двух решений системы /8/-/9/.

Доказательство

Пусть $\omega_i(k) = \mu_i(k) - \bar{x}$, $k = 1,2,\ldots$ Тогда

$$\omega_i(k+1) = \frac{a_i \beta(k) + b_i}{\beta^2(k) + \sigma}, \qquad /20/$$

где $a_i$, $b_i$, $\sigma$ - определенные выше параметры.

$$\omega_i(1) = \bar{x}_i - \bar{x},$$

$$\beta(k) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i a_i \omega_i(k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i \omega_i^2(k)} . \qquad /21/$$

Отсюда

$$\beta(k) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i a_i \left(\dfrac{a_i\beta(k-1) + b_i}{\beta^2(k-1) + \sigma}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i \left(\dfrac{a_i\beta(k-1) + b_i}{\beta^2(k-1) + \sigma}\right)^2}, \quad k = 2,3\ldots; \qquad /22/$$

$$\beta(1) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i a_i \omega_i(1)}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i \omega_i^2(1)} . \qquad /23/$$

Нетрудно видеть, что последовательность $\beta(k)$ можно рассматривать отдельно от последовательности $\omega_i(k)$, при этом обе они сходятся или не сходятся одновременно и их пределы удовлетворяют соотношению

$$\omega_i = \frac{a_i\beta + b_i}{\beta^2 + \sigma} . \qquad /24/$$

Здесь $\omega_i = \lim\limits_{k\to\infty} \omega_i(k)$, $\beta = \lim\limits_{k\to\infty} \beta(k)$.

Таким образом, достаточно найти предел $\beta$ последовательности /22/ и затем по формуле /24/ вычислить предел последовательности $\omega_i(k)$.

Будем рассматривать последовательности $\beta(k)$ с произвольным начальным значением $\beta(1)$.

Заметим, что если $a_i$, $b_i$ - таковы, что существуют хотя бы два номера $\ell$ и $m$ такие, что

$$\frac{b_\ell}{a_\ell} \neq \frac{b_m}{a_m}, \qquad /25/$$

то при всех $z \in (-\infty, +\infty)$ имеет место следующее неравенство:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i (a_i z + b_i)^2 > 0$$



или

$$a z^2 + 2cz + b > 0, \qquad /26/$$

где $a$, $b$, $c$ определены выше.

Действительно, если это не так, то существуют два значения $z_1$ и $z_2$, такие, что

$$a z_\alpha^2 + 2c z_\alpha + b = 0 \qquad \alpha = 1,2,$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} p_i (a_i z_\alpha + b_i)^2 = 0.$$

Отсюда

$$a_i z_\alpha + b_i = 0, \ \forall i = 1(1)n$$

и

$$z_\alpha = -\frac{b_i}{a_i} = -\frac{b_\ell}{a_\ell} = -\frac{b_m}{a_m},$$

что противоречит условию /25/.

Последовательность $\beta(k)$ из /22/ можно переписать в следующем виде:

$$\beta(k+1) = \frac{(\beta^2(k) + \sigma)(a\beta(k) + c)}{a\beta^2(k) + 2c\beta(k) + b}, \quad k = 1,2,\ldots, \qquad /27/$$

где $a$, $b$, $c$ определены из /16.1/-/16.3/.

Из последнего выражения /27/ можно получить

$$\beta(k+1) = \beta(k) + \frac{-c\beta^2(k) + (a\sigma - b)\beta(k) + c\sigma}{a\beta^2(k) + 2c\beta(k) + b}, \quad k = 1,2,\ldots . \qquad /28/$$

Имеет место следующая

**Теорема 3**

Пусть заданная выборка для случайных величин $x$ и $y(2)$ такова, что имеет место неравенство /25/. Тогда:

1. Если $c > 0$, то последовательность $\beta(k)$ сходится к положительному корню уравнения /16/ только тогда, когда начальное приближение $\beta(1)$ больше отрицательного корня этого уравнения /16/.

2. Если $c<0$, то последовательность $\beta(k)$ сходится к отрицательному корню уравнения /16/ только тогда, когда начальное приближение $\beta(1)$ меньше, чем положительный корень указанного уравнения /16/.

Доказательство

Пусть $c>0$, $\bar\beta_1$ - отрицательный корень уравнения /16/,
$\bar\beta_2$ - положительный корень уравнения /16/:

$$\phi_1(\bar\beta_a)=0; \quad a=1,2,$$

где

$$\phi_1(z)=-cz^2+(a\sigma-b)z+c\sigma.$$

Пусть

$$\phi_2(z)=az^2+2cz+b,$$

тогда

$$\beta(k+1)=\beta(k)+\frac{\phi_1(\beta(k))}{\phi_2(\beta(k))}.$$

Пусть $\beta(1)>\bar\beta_1$. Если $\beta(1)<\bar\beta_2$, то $\phi_1(\beta(1))>0$ и, следовательно,

$$\beta(2)=\beta(1)+\frac{\phi_1(\beta(1))}{\phi_2(\beta(2))}>\beta(1)>\bar\beta_1.$$

Если же $\beta(1)>\bar\beta_2$, то $\phi_1(\beta(1))<0$, и

$$\beta(2)=\beta(1)+\frac{\phi_1(\beta(1))}{\phi_2(\beta(1))}<\beta(1).$$

Однако $\beta(2)>\bar\beta_1$. Действительно,

$$\beta(2)=\beta(1)+\frac{\phi_1(\beta(1))}{\phi_2(\beta(1))}=\frac{(\beta^2(1)+\sigma)(a\beta(1)+c}{\phi_2(\beta(1))}>0>\bar\beta_1.$$

Покажем, что

$$\beta(k)>\bar\beta_1, \quad k=1,2,\ldots \qquad /29/$$

При $k=1$ неравенство /29/ верно. Пусть оно верно для $k=m\geq 1$. Докажем, что оно верно и для $k=m+1$:



Пусть $\beta(m)<\bar\beta_2$, тогда

$$\beta(m+1)=\beta(m)+\frac{\phi_1(\beta(m))}{\phi_2(\beta(m))}>\beta(m)>\bar\beta_1,$$

так как $\phi_1(\beta(m))>0$, $(\bar\beta_1<\beta(m)<\bar\beta_2)$.
Если $\beta(m)>\bar\beta_2$, то $\beta(m)>0$, и, значит,

$$\beta(m+1)=\frac{(\beta^2(m)+\sigma)(a\beta(m)+c)}{\phi_2(\beta(m))}>0>\bar\beta_1.$$

Неравенство /29/ доказано.

Докажем теперь, что последовательность $\beta(k)$, определенная по формуле /27/ или /28/, ограничена, т.е. существует такая постоянная $M>0$, что

$$\beta(k)<M, \quad \forall\, k=1,2,\ldots$$

Допустим, что это неверно, т.е. существует такой номер $m$, что $\beta(k)>M>\beta_2$ для всех $k>m$ или $\beta(m)\leq M$, а $\beta(k)>M$, $\forall\, k>m$. Имеем

$$M<\beta(m+1)=\beta(m)+\frac{\phi_1(\beta(m))}{\phi_2(\beta(m))}\leq M-\frac{|\phi_2(\beta(m))|}{\phi_2(\beta(m))}<M,$$

что противоречит предположению от противного. Таким образом мы доказали, что последовательно $\beta(k)$ равномерно ограничена и $\beta(k)>\bar\beta_1$. По принципу Больцано-Вейерштрасса, эта последовательность имеет в области $\beta(k)>\bar\beta_1$ хотя бы один частичный предел $\beta$, т.е. существует подпоследовательность $\beta(k_p)$ такая, что

$$\lim_{k_p\to\infty}\beta(k_p)=\beta \qquad \text{и} \qquad \beta=\beta+\frac{\phi_1(\beta)}{\phi_2(\beta)}.$$

Это значит, что $\beta$-решение уравнения /16/:

$$\phi(z)=0, \quad z=\beta.$$

Но так как в области $z>\bar\beta_1$ уравнение /16/ имеет только один положительный корень, то он таким образом является пределом последовательности $\beta(k)$. Теперь предположим, что $\beta(1)<\bar\beta_1$. Покажем, что последовательность $\beta(k)$ расходится. Для этого докажем, что последовательность $\beta(k)$ бесконечно убывает:

$$\bar\beta_1>\beta(1)>\beta(2)>\ldots\ldots>\beta(k)>\beta(k+1)>\ldots.$$

Действительно, если $\bar\beta_1>\beta(1)>\ldots\ldots>\beta(k)$, то

$$\beta(k+1)=\beta(k)+\frac{\phi_1(\beta(k))}{\phi_2(\beta(k))}=\beta(k)-\frac{|\phi_1(\beta(k))|}{\phi_2(\beta(k))}<\beta(k),$$

так как $\phi_1(\beta(k))<0$.

Первое утверждение доказано.

2. Второе утверждение доказывается аналогичным путем, поэтому мы доказательства не проводим.

Следствие.

Последовательность $\beta(k)$ с начальным приближением /22/ сходится к положительному решению, если $c>0$, и к отрицательному, если $c<0$.

ЛИТЕРАТУРА


1. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. "Наука", М., 1977.
2. Воскобойников Ю.Е. Критерий и алгоритмы выбора параметра при сглаживании сплайн-функциями. - В кн.: Алгоритмы обработки и средства автоматизации теплофизического эксперимента. Изд-во ИТФ СО АН СССР, Новосибирск, 1978.
3. Wald S. Technometrics, 1974, vol.16, No.1.
4. Жигунов В.П., Соколов С.Н. ЭЧАЯ, 1982, том 13, вып.5.
5. Никитин В.А. и др. Письма в ЖЭТФ, 1979, том 30, вып.6, с.349-354.
6. Klepikov N.P., Sokolov S.N. Analysis and Planning of Experiments by the Method of Maximum-Likelihood. Akademie Verlag, Berlin, 1961.
7. Крохин В.В., Петунин Ю.И. "Вычислительная и прикладная математика", 1981, вып.43 и 44.



Рукопись поступила в издательский отдел
15 апреля 1983 года.





Емельяненко Г.А., Мюле К.


P5-83-246


Оценивание параметров регрессионных моделей для случайных зависимой и независимой переменных


Получены выражения для оценок параметров линейных регрессионных моделей, когда функция и ее аргумент являются случайными переменными.



Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983



Emelyanenko G.A., Mühle K.


P5-83-246


Estimation of Parameters of Regression Models for Random Dependent and Independent Variables


Expressions for estimation of parameters of linear regression models are obtained, in the case when the function itself and its argument are random variables.



The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983

Перевод О.С.Виноградовой.