СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р5 - 8274

М.К.Богословская, Г.Ю.Богословский

ЧАСТНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ЯКОБИ В ТОЧКАХ, КРАТНЫХ К/3

1974

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Р5 - 8274

М.К.Богословская[1], Г.Ю.Богословский[2]

ЧАСТНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ЯКОБИ В ТОЧКАХ, КРАТНЫХ К/3

[1] Московский государственный университет.

[2] Научно-исследовательский институт ядерной физики Московского государственного университета.

Хорошо известно, что эллиптические функции Якоби $sn(u;k)$, $cn(u;k)$, $dn(u;k)$ при некоторых значениях аргумента u, связанных с их периодом, могут быть записаны в виде явных функций от модуля k [1]. В литературе по эллиптическим функциям (см., например, [2]) даются частные значения функций Якоби в точках, кратных $K/2$, где K -полный эллиптический интеграл первого рода с модулем k. В настоящей статье $sn(\frac{2K}{3};k)$, $cn(\frac{2K}{3};k)$, $dn(\frac{2K}{3};k)$ определены в виде функций от модуля k. Мы будем исходить из результатов работы [3].

В работе [3] было установлено соотношение

$$cn\left(\frac{2K(k)}{3};k\right)=\sqrt{\frac{t_3}{t_1}}\,, \tag{I}$$

где

$$k=\sqrt{\frac{t_1(t_0-t_3)}{t_0(t_1-t_3)}}\,, \tag{2}$$

а t_0, t_1, t_3 - корни кубического уравнения

$$t\left(t-E^2-3m^2\right)^2-16E^2e=0, \tag{3}$$

причем $t_3<t_0<t_1$. Смысл величин E, e, m, который для нас здесь не существенен, разъяснен в работе [3].

Из равенства (I) следует, что правая его часть является функцией только от k, таким образом, наша задача состоит в том, чтобы найти явно эту функциональную зависимость. Предварительно установим некоторые тождества, которым удовлетворяют корни t_0, t_1, t_3 уравнения (3). Имеем

$$2(E^2+3m^2)=t_0+t_1+t_3\,, \tag{4}$$

$$(E^2+3m^2)^2=t_0t_1+t_0t_3+t_1t_3\,.$$

Из (4) следует, что

$$(t_0+t_1+t_3)^2-4(t_0t_1+t_0t_3+t_1t_3)=0, \tag{5}$$

$$t_0^2+t_1^2+t_3^2-2(t_0t_1+t_0t_3+t_1t_3)=0.$$

Поэтому

$$(t_0-t_3-t_1)^2=4t_1t_3,$$

$$(t_0-t_3+t_1)^2=4t_0t_1,$$

$$(t_0+t_3-t_1)^2=4t_0t_3$$

и

$$t_0(t_0-t_1-t_3)^2=t_1(t_1-t_0-t_3)^2=t_3(t_3-t_0-t_1)^2. \tag{6}$$

Используя тождество (6), находим

$$\sqrt{\frac{t_1}{t_0}}=1\Big/\left(1-\sqrt{\frac{t_3}{t_1}}\right)$$

Далее, первое из тождеств (5) дает

$$\frac{t_3}{t_0}=\left(\sqrt{\frac{t_1}{t_0}}-1\right)^2;$$

и, благодаря (2), мы выражаем модуль k в виде функции от $\sqrt{t_3/t_1}$.

$$k^2=\frac{1-2\sqrt{\frac{t_3}{t_1}}}{\left(1-\sqrt{\frac{t_3}{t_1}}\right)^2\left(1-\frac{t_3}{t_1}\right)}. \tag{7}$$

Соотношение (7) позволяет найти t_3/t_1 при заданном k путем решения уравнения четвертой степени

$$k^2\lambda^4-2k^2\lambda^3+2\lambda-1=0, \tag{8}$$

где

$$\lambda=1-\sqrt{\frac{t_3}{t_1}}. \tag{9}$$

Уравнение (8) имеет при $0<k<1$ два действительных и два комплексных корня. Условию $0<\lambda<1$ удовлетворяет корень

$$\lambda=\frac{[k^{4/3}+(2k')^{2/3}]^{1/4}\{k^{2/3}-[k^{4/3}+(2k')^{2/3}]^{1/2}\}+\{[2k^{4/3}-(2k')^{2/3}][k^{4/3}+(2k')^{2/3}]^{1/2}-2k^2+4\}^{1/2}}{2k^{2/3}[k^{4/3}+(2k')^{2/3}]^{1/4}}. \tag{IO}$$

Таким образом, из (I), (9), (IO) получаем

$$cn\left(\frac{2K}{3};k\right)=\frac{[k^{4/3}+(2k')^{2/3}]^{1/4}\{k^{2/3}+[k^{4/3}+(2k')^{2/3}]^{1/2}\}-\{[2k^{4/3}-(2k')^{2/3}][k^{4/3}+(2k')^{2/3}]^{1/2}-2k^2+4\}^{1/2}}{2k^{2/3}[k^{4/3}+(2k')^{2/3}]^{1/4}}. \tag{II}$$

В формулах (IO) и (II) k' обозначает дополнительный модуль: $k'=\sqrt{1-k^2}$.

Используя теперь известные алгебраические соотношения между функциями Якоби $sn(u;k)$, $cn(u;k)$, $dn(u;k)$, $sn(u/2;k)$, $cn(u/2;k)$, $dn(u/2;k)$, а также теоремы сложения для них, можно, опираясь на формулу (II), найти частные значения функций Якоби в точках, кратных $K/3$.

В заключение отметим, что формулы (I) и (9) позволяют написать для полного эллиптического интеграла первого рода следующее представление:

$$K(k)=\frac{3}{2}\int_0^{\sqrt{\lambda(2-\lambda)}}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \tag{I2}$$

где λ определяется из (IO). Поскольку $0<\sqrt{\lambda(2-\lambda)}<1$, то подынтегральная функция регулярна на всем промежутке интегрирования. Представление (I2) использовалось нами для контрольных вычислений на ЭВМ. В результате для $K(k)$ были получены значения, полностью совпадающие с таблицами.

Авторы благодарят Н.Б . Скачкова и Н.П.Клепикова за полезные обсуждения.

Литература

I. Э.Т. Уиттекер, Дж. Ватсон. Курс современного анализа, ч. II, Физматгиз, I963.

2. Г.Бейтмен и А.Эрдейи. Высшие трансцендентные функции (Эллиптические и автоморфные функции, функции Ламе и Матье), "Наука", I967.

3. Г.Ю. Богословский. ТМФ, 8, № I, 85 (I97I).

Рукопись поступила в издательский отдел
I2 сентября I974 г.