СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р5 - 8244

Е.П.Жидков, Б.Н.Хоромский

НЕКОТОРЫЕ НЕЛОКАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ СХОДИМОСТИ НЕПРЕРЫВНОГО АНАЛОГА МЕТОДА НЬЮТОНА

1974

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ И АВТОМАТИЗАЦИИ

P5 - 8244

Е.П.Жидков, Б.Н.Хоромский

НЕКОТОРЫЕ НЕЛОКАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ СХОДИМОСТИ НЕПРЕРЫВНОГО АНАЛОГА МЕТОДА НЬЮТОНА

Пусть нелинейный оператор $\varphi(x)$ переводит банахово пространство E_x в банахово пространство E_y. Рассмотрим уравнение $\varphi(x)=0$, где $\varphi(x)$ удовлетворяет некоторым условиям гладкости, определяемым ниже. Одним из способов решения этого уравнения является непрерывный аналог метода Ньютона, рассмотренный многими авторами, например, Д.Д.Давиденко и М.К.Гавуриным, см. работы /I/- /4/. В этих работах получены некоторые локальные и нелокальные условия сходимости процесса Ньютона. Мы хотим получить новые, более слабые, нелокальные условия путем объединения уже известных локальных и нелокальных условий. С помощью непрерывного аналога метода Ньютона можно получить также доказательство некоторых теорем существования решения уравнения

$$\varphi(x)=y\quad,\quad y\in E_y\,. \tag{I}$$

При этом получаются новые нелокальные условия сходимости процесса Ньютона. Отметим, что условия существования решения уравнения (I) в теоремах 2 и 4 взяты с небольшими изменениями из теорем I,4 работы /5/. Но доказательства существования имеют конструктивный характер и проводятся с помощью процесса Ньютона. Таким образом сразу дается и способ нахождения корня.

Обозначим через $\varphi'(x)$ производную Фреше оператора $\varphi(x)$, а $\varphi''(x)$ – линейная производная Гато. Пусть (f,y) есть значение линейного функционала $f \in E_y^*$ на элементе $y \in E_y$. Впредь будем считать, что рассматриваются только открытые области, если это специально не оговаривается. Назовем множество G связной компонентой множества D, если G связно и не содержится в большем связном подмножестве множества D и $G \subset D$.

Обозначим границу произвольной области D символом ∂D.

Обозначим также

$D_\varepsilon = \{ x \in D \mid \rho(x, \partial D) \geq \varepsilon \}$, где $\rho(x,y)$ – расстояние от точки x до точки y.

Теперь рассмотрим уравнение

$$\varphi(x) = 0 \tag{2}$$

и соответствующую задачу Коши

$$\frac{dx}{dt} = -\varphi'(x)^{-1} \cdot \varphi(x), \quad x(0) = x_0 , \tag{3}$$

где $\varphi'(x)^{-1}$ – оператор, обратный к $\varphi'(x)$. Решение этого уравнения, если оно существует, обозначим $x(t, x_0)$. Назовем $M(x^*)$ множеством точек сходимости к корню x^* уравнения (2), если $x(t, x^\circ) \to x^*$ при $t \to \infty$ для всех $x^\circ \in M(x^*)$.

Будем считать области связными, если это специально не оговаривается.

Заметим еще, что условие локальной ограниченности $\varphi''(x)$, которое будет предполагаться ниже, нужно только для осуществимости процесса Ньютона. Убедиться же в существовании решения уравнения (I) можно без этого условия, следуя построениям М.К.Гавурина (см. /I/, §2) для случая, когда точного решения уравнения (3) не существует. Поэтому локальная ограниченность $\varphi''(x)$, по существу, не накладывает дополнительных ограничений на условия существования решения уравнения (I).

§ I

п.I. Доказательство некоторых теорем существования

Пусть область $D \subset E_x$. Положим

$$\rho(x_0, D) = \inf_{x \in \partial D} \| x_0 - x \|, \quad x_0 \in D.$$

Имеет место

Теорема I. Пусть в ограниченной области D существует производная Фреше $\Phi'(x)$ и линейная производная Гато $\varphi''(x)$, причем $\varphi'(x)$ имеет обратный $\varphi'(x)^{-1}$, для которого выполнено неравенство $\|\varphi'(x)^{-1}\| \leq B$, а $\varphi''(x)$ ограничена в окрестности каждой точки D.

Тогда, если существует функционал $f : E_y \to R$ такой, что

I) $f(\alpha y) \leq \alpha f(y)$ при $\alpha > 0$, $f(\varphi(x_0)) > 0$,

2) $(f, \varphi(x)) > (f, \varphi(x_0)) \cdot \left[1 - \frac{\rho(x_0, D)}{B \cdot \|\varphi(x_0)\|} \right]$, $x \in \partial D$,

то существует хотя бы одно решение уравнения (I) и решение $x(t, x_0)$ уравнения (3) сходится к одному из корней уравнения (2) при $t \to \infty$.

Доказательство. Решение уравнения (3) существует для тех значений t, для которых $x(t, x_0)$ принадлежит D /I/.

Для них имеем $\varphi(x(t)) = \varphi(x_0) \cdot e^{-t}$.

Пусть решение пересечет ∂D при $t = T$, тогда

$$\rho(x_0, D) \leq \int_0^T \| \varphi'(x)^{-1} \cdot \varphi(x_0) \| \cdot e^{-t} dt \leq B \cdot \|\varphi(x_0)\| (1 - e^{-T}).$$

Тогда

$$e^{-T} \leq 1 - \frac{\rho(x_0, D)}{B \cdot \|\varphi(x_0)\|},$$

$$(f, \varphi(x(T))) \leq (f, \varphi(x_0)) e^{-T} \leq (f, \varphi(x_0)) \cdot \left[1 - \frac{\rho(x_0, D)}{B \cdot \|\varphi(x_0)\|} \right],$$

что противоречит условию (2). Значит, $x(t,x_0)$ лежит в D для $t>0$ и поэтому продолжаемо до $t=\infty$. Теперь легко убеждаемся в конечности длины кривой $x(t,x_0)$ /I/ и, следовательно, в существовании $\lim_{t\to\infty} x(t,x_0)=x^*$. Ясно, что $\varphi(x^*)=0$.

Замечание. Имеет смысл рассматривать случай, когда $\rho(x_0,D)<B\cdot\|\varphi(x_0)\|$, так как иначе получается уже известная локальная теорема сходимости /I,2/. В этом случае $0<1-\frac{\rho(x_0,D)}{B\cdot\|\varphi(x_0)\|}<1$, поэтому, если имеет место теорема 2, §I из /I/, то наша теорема тем более имеет место.

Лемма I. Пусть в ограниченной области D выполнено условие

I) для всякого $\varepsilon>0$ есть такое $B(\varepsilon)$, что $\|\varphi'(x)^{-1}\|\le B(\varepsilon)$ для любого x из области D_ε, а $\varphi''(x)$ ограничена в окрестности каждой точки из D. Тогда, если существует два решения уравнения (2) в области D, то существует x_c из D такое, что $x(t,x_0)$ пересечет ∂D.

(Если $D=E_x$, то если T такое, что $\|x(t,x_0)\|\to\infty$ при $t\to T$; возможно $T=\infty$).

Доказательство. Пусть $\varphi(x_1)=\varphi(x_2)=0$, x_1, x_2 принадлежат D. Пусть $\bar M(x_1)$ и $\bar M(x_2)$ подмножества соответственно $M(x_1)$ и $M(x_2)$, для которых траектории $x(t,x_0)$ лежат в D. Эти множества открыты и не пересекаются. Действительно, всякую траекторию, сходящуюся к корню, можно включить в некоторое множество D_ε, так как непрерывный функционал $\rho(x(t,x_0),\partial D)$, определенный на компакте $[0,T]\subset R$, достигает точкой нижней грани, и значит, $\inf_{t\in[0,T]}\rho(x(t,x_0),\partial D)=\varepsilon>0$. Поэтому $x(t,x_0)\in D_\varepsilon$. Но тогда имеется непрерывная зависимость от начальных данных.

Рассмотрим непрерывную кривую $x(\tau)$, $\tau\in[0,1]$ такую, что $x(0)=x_1$, $x(1)=x_2$ и $x(\tau)$ лежит в D. Существует $\tau_0\in[0,1]$ такое, что

$x(\tau_0)\notin\bar M(x_1)\cup\bar M(x_2)$. Но тогда $x(t,x(\tau_0))$ покинет D_ε для всякого $\varepsilon>0$ при некотором t. В противном случае $x(t,x(\tau_0))$ сходилась бы к одному из корней.

Это следует из теоремы I. Если теперь $D=E_x$, то $x(t,x(\tau_0))$ покинет любой шар, содержащий x_1 и x_2.

Замечание. Если в области D существует более двух решений, в том числе и неограниченное число решений, то имеет место аналогичная лемма. Доказательство проводится подобным же образом.

Теорема 2. Пусть $\varphi'(x)$ – непрерывна по x, причем

$$(Bh,\varphi'(x)h)\ge\frac{1}{L(\|x\|)}\|h\|^2,\quad (x,h\in E_x),\qquad (*)$$

где B – линейный непрерывный оператор, действующий из E_x на все E_y^*, а непрерывная положительная функция $L(u)$ является функцией осгудовского типа:

$$\int^{\infty}\frac{du}{L(u)}=\infty.$$

Тогда уравнение (I) имеет единственное решение в E_x при любом $y\in E_y$ и процесс Ньютона сходится для любого x_0, если $\varphi''(x)$ ограничена в окрестности каждой точки.

Доказательство. Докажем существование $\varphi'(x)^{-1}$ при условии (*). Пусть $\varphi'(x)\cdot E_x=Y\subset E_y$, $Y\ne E_y$. Ясно, что Y – банахово пространство, поэтому $Y^*\subset E_y^*$, $Y^*\ne E_y^*$. Значит, существуют функционалы f_1, $f_2\in E_y^*$, такие, что $f_1\ne f_2$ на E_y, но $f_1=f_2$ на Y. Тогда для $f=f_1-f_2$ имеем $(f,\varphi'(x)h)=0$ для любого $h\in E_x$. Но существует $h_0\in E_x$ такое, что $Bh_0=f$, а значит, из условия (*) следует $h_0=0$. Ясно также, что $\theta=B\cdot 0$, где θ – ноль пространства E_y^*. Поэтому $f=\theta$ и $Y=E_y$. Справедливо также неравенство $\|\varphi'(x)^{-1}\|\le L(\|x\|)\cdot\|B\|$. Например, /6/. Поэтому решение уравнения (3) существует для некоторого t. Рассмотрим функционал

$$f(\varphi,x(t,x_0))=\left(B\frac{x(t,x_0)-x_0}{\|x(t,x_0)-x_0\|},\ \varphi(x(t,x_0))-\varphi(x_0)\right).$$

Положим $h=\frac{x(t,x_0)-x_0}{\|x(t,x_0)-x_0\|}$, тогда $\|Bh\| \le C$. Тогда есть M такое, что

$$M \geq f(\varphi, x(t,x_0)) = \left(Bh, \int_{x_0}^{x(t,x_0)} \varphi'(x)\,dx\right) = \left(Bh, \int_0^1 \varphi'(x_0+\sigma(x(t,x_0)-x_0))\cdot(x(t,x_0)-x_0)\,d\sigma\right),$$

а так как Bh – линейный функционал, то

$$f(\varphi, x(t,x_0)) = \int_0^1 (Bh, \varphi'(x_0+\sigma(x(t,x_0)-x_0))(x(t,x_0)-x_0))\,d\sigma \geq$$

$$\geq \int_0^1 \frac{\|x(t,x_0)-x_0\|\,d\sigma}{L(\|x_0+\sigma(x(t,x)-x_0)\|)} = \int_0^{\|x(t)-x_0\|} \frac{du}{L(u+v(u))},$$

где $u=\|x(t)-x_0\|\cdot\sigma$, а $v(u)$ – непрерывная функция, для которой $|v(u)| \le \|x_0\|$. Поэтому последний интеграл расходится вместе с $\int^{\infty} \frac{du}{L(u)}$, если $\|x(t,x_0)-x_0\| \to \infty$ при $t \to \infty$.

Значит, $\|x(t,x_0)-x_0\| \le K$.

Но тогда $\|\varphi'(x)^{-1}\| \le L(K+\|x_0\|)\cdot\|B\|$, а поэтому $\int_0^{\infty}\|\varphi'(x)^{-1}\cdot\varphi(x)\|dx<\infty$. Значит, существует $\lim\limits_{t\to 0} x(t)=x^*$, так как решение продолжимо до $t=\infty$. При этом $\varphi(x^*)=0$.

Единственность. Если $\varphi(x_1)=\varphi(x_2)=0$, $x_1 \ne x_2$, то, применяя Лемму I, получим, что существует решение, которое покинет шар $\|x-x_0\| \le K$, что противоречит предыдущему. Теорема доказана.

Замечание I. Можно доказать, что для любой $L(u)$ осгудовского типа существует $L_1(u)$ того же свойства, что $\frac{L_1(u)}{L(u)} \to \infty$ при $u \to \infty$, то есть не существует самого сильного условия типа (ж).

Замечание 2. Требование непрерывности $\varphi'(x)$ по x в теореме 2 не относится к существу задачи, да и само по себе оно часто не выполняется, так как $\|\varphi'(x)\|$ не всегда ограничена.

В следующей теореме мы избавимся от этого требования, а также заменим условие (ж) более слабым.

Теорема 3. Пусть имеется $c>0$ такое, что множество $D=\{x\in E_x / \|\varphi(x)\|< c\}$ ограничено в E_x и не пусто. Пусть существует $\varphi'(x)$ в области D и имеет место $\|\varphi'(x)^{-1}\| \le B$ для $x \in D$, а $\varphi''(x)$ ограничена в окрестности каждой точки из D. Тогда если G – произвольная связная компонента множества D, то существует единственное решение уравнения (2) в области G и процесс Ньютона сходится к нему для любого $x_0 \in G$.

Доказательство. Пусть $x_0 \in G$. Тогда $\|\varphi(x_0)\|=C_1<C$. Поэтому решение уравнения (3) существует для некоторого $t>0$. Ясно, что $\|\varphi(x(t,x_0))\|=\|\varphi(x_0)\|e^{-t} \le C_1$ для всех $t \geq 0$. Поэтому $x(t,x_0)\in D$ для всех $t \geq 0$, а значит, $x(t,x_0)\in G$, поскольку G – связное множество. Но $\|\varphi'(x)^{-1}\| \le B$ для всех $x \in G$, поэтому $x(t,x_0)$ продолжимо до $t=\infty$ и существует $\lim\limits_{t\to\infty} x(t,x_0)=x^*$ и $\varphi(x^*)=0$. Ясно, что $x^*\in G$, так как $\partial G \subset \partial D$, а $\partial D=\{x\in E_x / \|\varphi(x)\|=C\}$. Если теперь $\varphi(x_1)=\varphi(x_2)=0$, $x_1\ne x_2$, то существует $x_0 \in G$ такое, что $x(t,x_0)$ покинет область G при достаточно большом t. Это следует из Леммы I. Но такого произойти не может, так как $x(t,x_0)\in G$ для всех $t \geq 0$.

Теорема доказана.

Замечание. Ясно, что при выполнении условий теоремы 2 теорема 3 имеет место при любом $c > 0$.

Пример. $\varphi(x)=\operatorname{arctg} x$. $\varphi'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ и $\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}<\infty$, поэтому условие (ж) теоремы 2 не имеет места, однако из теоремы 3 следует сходимость процесса Ньютона для $\forall x_0$ к единственному решению x=0.

п.2. Случай неограниченного $\varphi'(x)^{-1}$

Пусть $\varphi'(x)$ не при всех x имеет непрерывный обратный. Обозначим через F – множество x, для которых не имеется обратного. F – замкнуто. Скажем, что $\varphi(x)$ обладает свойством (А), если

(I) φF -замкнуто и $\varphi F \neq E_y$;

(2) $F_1 \neq E_x$, где F_1 – полный прообраз множества φF ;

(3) для любого $\varepsilon > 0$ есть $\delta > 0$ такое, что из $\rho(x, F) < \delta$ вытекает неравенство $\rho(\varphi(x), \varphi F) < \varepsilon$;

(4) для любого $\delta > 0$ существует такая функция $L(u; \delta)$ осгудовского типа, что при $\rho(x, F) \geqslant \delta$ $\quad \|\varphi'(x)^{-1}\| \leq L(\|x\|; \delta)$.

<u>Определение.</u> Область D называется звездной относительно точки y_0 , если отрезок $y_0 + \alpha(y - y_0)$, $\alpha \in [0,1]$ содержится в области D для любого $y \in D$.

Обозначим через $\varphi^{-1}(D)$ прообраз всех точек $D \in E_y$, если таковые существуют.

<u>Теорема 4.</u> Пусть $\varphi(x)$ обладает свойством (А) и $\varphi''(x)$ ограничена в окрестности каждой точки $E_x - F_1$. Тогда

I) Если $E_y - \varphi F$ связно, то уравнение (I) разрешимо для всех $y \in E_y$.

2) Если $E_y - \varphi F$ несвязно, G – компонента связности этого множества, то уравнение (I) либо разрешимо при любом $y \in G$, либо не разрешимо ни при одном $y \in G$.

3) Если $E_y - \varphi F$ несвязно и G – компонента связности этого множества, то каждая связная компонента Н множества $\varphi^{-1}(G)$ отображается на все G .

4) Если упомянутая компонента G – звездная относительно y=0, то процесс Ньютона сходится к корню уравнения (2) для любого x_0 , такого, что $\varphi(x_0) \in G$.

<u>Доказательство</u>. I). Пусть $y \in E_y - \varphi F$. Докажем разрешимость уравнения $\varphi(x) = y$.

Заметим, что $F_1 \neq E_x$, а поэтому есть X_0 такое, что $\varphi(x_0) = y_0$, а $y_0 \in E_y - \varphi F$.

Тогда существует непрерывная кривая $y(t): [0,1] \to E_y$, $y(t) \in E_y - \varphi F$, такая, что $y(0) = y_0$, $y(1) = y$; так как φF-замкнуто, то $\inf\limits_{t \in [0,1]} \rho(y(t), \varphi F) = \delta > 0$, поскольку нижняя грань достигается. Значит, существует ломаная с конечным числом звеньев, соединяющая точки y_0 и y и лежащая в $\delta/2$ окрестности кривой $y(t)$. Пусть первое звено кончается в точке y_1 . Тогда уравнение $\varphi(x) = y_1$ имеет решение. Действительно, рассмотрим оператор $\varphi_1(x) = \varphi(x) - y_0$. Для него $\varphi_1'(x) = \varphi'(x)$, и поэтому множество F не изменится. Так как $\varphi_1(x_0) = 0$, а $\varphi_1'(x_0)^{-1}$ ограничена, то уравнение $\alpha(y_1 - y_0) = \varphi_1(x)$ разрешимо в окрестности точки $x = x_0$, $y = 0$ по теореме о неявной функции /7/. Пусть $\alpha_0(y_1 - y_0) = \varphi_1(x_{\alpha_0})$. Тогда решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \varphi_1'(x)^{-1} \cdot \varphi_1(x) \quad , \quad x(0) = x_{\alpha_0} \tag{I.I}$$

имеет интеграл $\varphi_1(x(t)) = \alpha_0(y_1 - y_0)e^t$. Но поскольку для тех t , для которых $\alpha_0 \cdot e^t \leq 1$, $\rho(\varphi_1(x(t)), \varphi F) \geqslant \frac{\delta}{2}$, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\rho(x(t), F) \geqslant \varepsilon$, а значит, $\|\varphi_1'(x)^{-1}\| \leq L(\|x\|; \varepsilon)$, или

$$\|\varphi_1'(x)^{-1} \cdot \varphi_1(x)\| \leq L(\|x\|; \varepsilon) \cdot \Psi(t) \quad , \quad \Psi(t) = \|\varphi_1(x_{\alpha_0})\| \cdot e^t \; , \tag{I.2}$$

По известной из монографии /8/ теореме о продолжимости решений уравнения $\dot{x} = f(x,t)$ заключаем, что решение уравнения (1.1) продолжимо для тех t , для которых имеет место неравенство (I.2) то есть при $\alpha_0 \cdot e^t \leq 1$. Поэтому если $\alpha_0 \cdot e^T = 1$, то $\varphi_1(x(T)) = y_1 - y_0$, а $\varphi(x(T)) = y_1$. Сделав конечное число шагов, придем к точке y.

2) Если есть X_0 такое, что $\varphi(x_0) = y_0$, и $y_0 \in G$, то аналогично пункту I) докажем разрешимость уравнения (I) для любого $y \in G$.

3) Если рассмотреть решение $x(t, x_{\alpha_0})$ уравнения

$$\frac{dx}{dt} = -\varphi_1'(x)^{-1} \cdot \varphi_1(x) \quad , \quad x(0) = x_{\alpha_0} \tag{I.3}$$

по той же теореме о продолжимости, оно будет продолжаемо до $t=\infty$ и, следовательно, точки $x(T)$ и x_0 можно соединить непрерывным решением уравнений (I.I), (I.3), то есть прообразы множества G являются связными компонентами множества $\varphi^{-1}(G)$.

4) Из условия звездности и условий (I), (3) теоремы следует, что в области существования решения уравнения (3) $\|\varphi'(x)^{-1}\| \le L(\|x\|;\varepsilon)$, $\varepsilon>0$. Поэтому решение продолжаемо до $t=\infty$ и лежит в ограниченной области. Значит, кривая $x(t)$ имеет конечную длину и процесс сходится.

Теорема доказана.

§ 2

В этом параграфе доказывается теорема существования решения краевой задачи для обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка, описывающего движение заряженной частицы в медианной плоскости ускорителя. Эта задача решалась численно непрерывным аналогом метода Ньютона в связи с проблемой быстрого вывода ускоренного пучка заряженных частиц из серпуховского ускорителя. Здесь даются некоторые условия для выбора начального приближения, для которых процесс Ньютона сойдется к искомому решению.

I. Постановка задачи

Требуется решить уравнение

$$y''-\frac{2y'^2}{y+R_s}-(y+R_s)+\frac{1}{R_s}(R_s+y)^2F(y)=0 \qquad \text{(I.I)}$$

с краевыми условиями $y(0)=0$; $y(\delta)=b$. (I.2)

Конкретные данные задачи таковы, что $\delta=\frac{\pi}{60}$; $R_s=1{,}0\cdot10^4$.

Функция $F(y)$ достаточно гладкая, такая, что $F(0)=1$; $\max\limits_{y\in R}F(y)=1{,}2$; $F(y)\geqslant0$; $F(y)=0$, если $|y|\geqslant\frac{R_s}{20}$; см. рис.I /3/.

Для доказательства существования решения уравнения (I.1) воспользуемся непрерывным аналогом метода Ньютона. Мы найдем нелокальные условия сходимости этого метода и начальное приближение, удовлетворяющее этим условиям. Естественно, что вся область сходимости процесса Ньютона шире той, которую мы найдем. Тогда будет доказано существование решения и осуществимость процесса Ньютона. Будем решать уравнение (I.I) в пространстве $W_2^1(0,\delta)=W_2^1$ с нормой $\|y\|^2_{W_2^1}=\int\limits_0^\delta(y'^2+y^2)dx$, а оператор $\varphi(y)=y''-\frac{2y'^2}{y+R_s}-(y+R_s)+\frac{1}{R_s}(R_s+y)^2F(y)$ отображает $\varphi: W_2^1\to L_2[0,\delta]$.

Таким образом, ищем решение уравнения

$$\Phi(y)=0\,, \qquad \text{(I.3)}$$

где $\Phi(y)=\begin{pmatrix}\varphi(y)\\ y(0)\\ y(\delta)-b\end{pmatrix}$; $\qquad \Phi: W_2^1\to L_2\times R^2$.

Заметим, что ввиду гладкости $F(y)$ из существования решения в пространстве W_2^1 следует его существование в пространстве $C^2[0,\delta]$, если оператор $\varphi(y)$ ограничен, т.е. если $y(x)$ – решение.

П. О непрерывной обратимости производной Фреше оператора $\Phi(y)$

Простые вычисления показывают, что

$$\Phi'(y_0)\cdot y=\Big(y''-\frac{4y_0'}{R_s+y_0}\cdot y'+\Big[2\frac{y_0'^2}{(R_s+y_0)^2}-1+\frac{1}{R_s}\{2(y_0+R_s)F(y_0)+(R_s+y_0)^2F'(y_0)\}\Big]\cdot y\,,\quad y(0),\ y(\delta)\Big).$$

Поэтому оператор $\Phi'(y_0)^{-1}$ будет ограниченным, если краевая задача

$$\varphi'(y_0)\cdot y=0\,,\qquad y(0)=y(\delta)=0 \qquad \text{(П.I)}$$

имеет только нулевое решение.

Заметим, что количество нулей решения уравнения $y''+a(x)y'+by=0$ не меняется при замене $y(x)=z(x)\exp[-\frac{1}{2}\int\limits_a^x a(\xi)\,d\xi]$.

При этом уравнение (П.I) преобразуется в

$$\Psi \cdot z = z'' + B(x)\, z = 0 \;, \quad z(0) = z(\delta) = 0 \;, \qquad \text{(П.2)}$$

где $B(x) = -\frac{a^2}{4} - \frac{a'}{2} + b(x)$.

При этом, если $C \geqslant |R_s + y_0| \geqslant \varepsilon > 0$, то нормы $\|\varphi'(y_0)^{-1}\|$ и $\|\Psi^{-1}\|$ отличаются не более чем на постоянный множитель. Оценим норму оператора Ψ^{-1} . Имеем

$$\|\Psi z\| \cdot \|z\|_{L_2} \geqslant (-\Psi \cdot z, z)_{L_2} = \int_0^\delta (z'^2 - B(x) z^2)\, dx \geqslant \int_0^\delta z'^2 dx - \max_{x\in[0,\delta]} |B(x)| \cdot \int_0^\delta z^2\, dx .$$

Теперь воспользуемся известным неравенством /9/, т.I.

$$\int_a^b y^2 dx \leqslant \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b y'^2 dx \quad \text{, если} \quad y(a) = y(b) = 0 .$$

Тогда $\|\Psi z\| \cdot \|z\|_{L_2} \geqslant \int_0^\delta z'^2 dx - \max\limits_{x\in[0,\delta]} |B(x)| \cdot (\frac{\delta}{\pi})^2 \int_0^\delta z'^2 dx =$

$$= (1 - (\tfrac{\delta}{\pi})^2 \max |B(x)|) \int_0^\delta z'^2\, dx .$$

Теперь ясно, что если для некоторого множества $\{y_0(x)\}$

$$1 - (\tfrac{\delta}{\pi})^2 \cdot \max_{x\in[0,\delta]} |B(x)| \geqslant \varepsilon_1 > 0 \quad \text{, то}$$

оператор Ψ^{-1} равномерно ограничен для этого множества, так как тогда

$$\|\Psi z\| \geqslant \varepsilon_2 \|z\|_{W_2^1} \;, \quad \|\Psi^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\varepsilon_2} .$$

Простые вычисления дают в нашем случае

$$B(y_0(x)) = 1 + \frac{1}{R_s} (R_s + y_0)^2 F'(y_0) + \frac{\varphi(y_0)}{R_s + y_0} ,$$

$$|B(x)| \leqslant 1 + (\tfrac{21}{20})^2 R_s \cdot 0{,}05 + \frac{|\varphi(y_0)|}{R_s + y_0} . \qquad \text{(П.3)}$$

Теперь видно, что для тех y_0 , для которых $|\varphi(y_0)|$ не велика, а $R_s + y_0 \geqslant \varepsilon > 0$, будет равномерно

$$\|\Phi'(y_0)^{-1}\| \leqslant const .$$

Ш. О решении одного вспомогательного уравнения

Рассмотрим краевую задачу

$$y'' - \frac{2y'^2}{y + R_s} - (y + R_s) = P(x) ,\; y(a) = y(b) = -\frac{R_s}{10} . \qquad \text{(Ш.I)}$$

При этом $|b - a| \leqslant \delta$.

Предложение I. Пусть функция $P(x)$ – непрерывная, $P(x) < 0$, $x \in [0,\delta]$ и $|P(x)| \leqslant \frac{R_s}{10}$, тогда существует единственное решение краевой задачи (Ш.I), где $|b - a| = \delta$, для которого $|y + R_s| \geqslant \frac{R_s}{2}$.

Доказательство. Сделаем замену $y + R_s = z$, тогда при a=0, в=δ уравнение будет иметь вид

$$z'' = \frac{2z'^2}{z} + z + P(x) \;, \quad z(a) = z(\delta) = \frac{9}{10} R_s = R . \qquad \text{(Ш.2)}$$

Предположим, что существует решение (Ш.2) на отрезке $[0,\delta_1]$, $\delta_1 \leqslant \delta$ такое, что $z(x) \geqslant 0$, $x \in [0,\delta_1]$, тогда это решение единственно при данных краевых условиях. Действительно, положим $z(x) = e^{u(x)}$, тогда уравнение преобразуется:

$$u'' = u'^2 + 1 + P(x)\, e^{-u(x)} . \qquad \text{(Ш.3)}$$

Видно, что правая часть является возрастающей функцией относительно u , а тогда по теореме в) из (/9/ стр. I08, т.П) решение краевой задачи (Ш.3) единственно.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (Ш.2) с условиями

$$z(0) = R \;, \quad z'(0) = a . \qquad \text{(Ш.4)}$$

Она имеет единственное решение в области $z \geqslant \varepsilon > 0$.

(Ш.4)

Покажем, что существуют такие a_I и a_2, что $z(\delta) < R$, если $z'(0) = a_1$, и $z(\delta) > R$, если $z'(0) = a_2$.

В этой области $z'' \geqslant 2\sqrt{2}\, |z'| + P(x)$. Пусть $\lambda = 2\sqrt{2}$.

I. $z'' + \lambda z' \geqslant P(x)$; $z(0) = R$, $z'(0) = a$;

$$z'(x) \geqslant \left(\int_0^x P(\xi) e^{\lambda\xi} d\xi + a\right) e^{-\lambda x} ;$$

$$z(x) \geqslant \int_0^x e^{-\lambda\mu} \left(\int_0^\mu P(\xi) e^{\lambda\xi} d\xi + a\right) d\mu + \frac{9}{10} R_s = f_1(x) ;$$

2. $z'' - \lambda z' \geqslant P(x)$; $z(0) = R$, $z'(0) = a$;

$$z(x) \geqslant \int_0^x e^{\lambda\mu} \left(\int_0^\mu P(\xi) e^{-\lambda\xi} d\mu + a\right) d\mu + \frac{9}{10} R_s = f_2(x) .$$

Имеем
$$f_1(x) \geqslant \frac{9}{10} R_s - \frac{1}{\lambda}\left(\frac{R_s}{10} \cdot \frac{e^{\lambda\delta}-1}{\lambda} - a\right),$$
$$f_2(x) \geqslant \frac{9}{10} R_s - \frac{e^{\lambda\delta}-1}{\lambda} \cdot \left(\frac{R_s}{10} \cdot \frac{1}{\lambda} - a\right).$$
Поэтому неравенства $f_1(x) \geqslant \frac{R_s}{2}$ и $f_2(x) \geqslant \frac{R_s}{2}$ будут выполняться при условии
$$\begin{cases} \frac{2\lambda}{5} R_s \geqslant -a + \frac{R_s}{10} \cdot \frac{e^{\lambda\delta}-1}{\lambda}, \\ \frac{2}{5}\lambda \cdot \frac{R}{e^{\lambda\delta}-1} \geqslant -a + \frac{R_s}{10\cdot\lambda}. \end{cases}$$

Отсюда при $a \geqslant -R_s$ решение задачи Коши проходит выше $\frac{R_s}{2}$.
Ясно, что если a - достаточно большая константа, то будет выполнено $z(\delta) > \frac{9}{10} R_s$.
Теперь рассмотрим решение задачи Коши при $z(0) = \frac{9}{10} R_s$, $z'(0) = -\frac{9}{10} R_s$, тогда
$$z'' \leq \frac{2z'^2}{z} + z + P(x) \leq \frac{2z'^2}{z} + z, \quad \text{т.к.} \quad P(x) < 0;$$
решим это неравенство.
Уравнение $z'' - \frac{2z'^2}{z} - z = 0$, $z(0) = \frac{9}{10} R_s$, $z'(0) = -\frac{9}{10} R_s$ имеет единственное решение, в чем легко убеждаемся непосредственным вычислением
$$z(x) = \frac{c}{\cos(x+c_1)}; \quad z'(x) = \frac{c}{\cos(x+c_1)} \cdot tg(x+c_1).$$
В итоге $z(x) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{9}{10} R_s}{\cos(x-\frac{\pi}{4})}$, а значит, $z(\delta) < \frac{9}{10} R_s$.
Поэтому для решения уравнения
$$z'' = \frac{2z'^2}{z} + z + \rho(x), \quad z(0) = \frac{9}{10} R_s, \quad z'(0) = -\frac{9}{10} R_s$$
будет $z(\delta) < \frac{9}{10} R_s$.
Пусть a изменяется в пределах $a \geqslant -\frac{9}{10} R_s$, тогда для решения задачи (Ш.4) будет непрерывная зависимость $z(\delta)$ от значения a,

поэтому существует $a > -\frac{9}{10} R_s$ такое, что $z(\delta) = \frac{9}{10} R_s$. Это решение, как уже было замечено, единственно.

Предложение доказано.

IУ. Осуществимость процесса Ньютона

Пусть начальное приближение таково, что $y_0(0) = 0$, $y_0(\delta) = b$,
$\varphi(y_0) = P(x) < 0$ и $|\varphi(y_0)| \leq \frac{R_s}{10}$. (IУ.I)

Пусть при некотором $t > 0$ $y(t,x)$ пересекает прямую $y = \frac{9}{10} R_s$.
Если $x_1 = a$ и $x_2 = b$ - крайние слева и справа соответственно значения x, при которых произошло пересечение, то, так как $(b-a) \leq \delta$, то из предложения I следует, что $y(t,x) \geqslant \frac{R_s}{2}$ для всех t. При этом $\varphi(y(t,x)) = \varphi(y_0) e^{-t} \leq P(x) e^{-t} < 0$.
Простая оценка показывает теперь, что выполнено $1 - (\frac{S}{\pi})^2 \cdot max(1 + (1 + \frac{1}{20})^2 \cdot R_s \cdot 0{,}05 + \frac{|\varphi(y(t))|}{R_s + y(t)}) \geqslant \varepsilon_1 > 0$ и $\|\Phi'(y(t))^{-1}\| \leq const$ для всех t, поскольку $|F'(y)| \leq 0{,}05$. Поэтому процесс Ньютона сходится к решению уравнения (I.3).
Действительно, $(\frac{\delta}{\pi})^2 = (\frac{1}{60})^2$, $R_s \cdot F'(y_0) \leq 10^2$.
Поэтому
$$1 - \varepsilon_1 \geqslant \frac{1}{60^2}\left(1 + 2 \cdot 10^4 \cdot 0{,}05 + \frac{|\varphi(y(t))|}{R_s + y(t)}\right) \geqslant \frac{1}{60^2}\left(1 + 10^3 + \frac{1}{5}\right).$$
Докажем теперь, что можно выбрать начальное приближение $y_0(x)$, удовлетворяющее условию (IУ.I). Пусть $y_0(0) = 0$, $y_0(\delta) = b$.
Если $|y_0(x)| \leq 15$, то $F(y_0) = 1 + \alpha \cdot y_0(x)$, где $\alpha = F'(0)$.
$$\varphi(y_0) = y_0'' - \frac{2y_0'^2}{y_0 + R_s} - y_0 - R_s + \frac{y_0^2}{R_s} + 2y_0 + R_s + \alpha\frac{y_0^3}{R_s} + 2\alpha y_0^2 + \alpha R_s y_0 =$$
$$= y_0'' - 2\frac{y_0'^2}{y_0 + R_s} + y_0 + \frac{y_0^2}{R_s} + \alpha R_s y_0 + \alpha\frac{y_0^3}{R_s} + 2\alpha y_0^2 < 0.$$

I. Для функции $F_2(y)$ $\alpha > 0$, поэтому, если $b \le 0$, то подходит $y_0(x) = kx$, где $k = \frac{b}{\delta}$.

2. Для функции $F_1(y)$ $\alpha < 0$, поэтому при $b > 0$ также будет $\varphi(y_0) < 0$, если $y_0(x) = kx$, $k = \frac{b}{\delta}$.

3. Пусть для функции $F_1(y)$ $b < 0$.

Ясно, что если $y_0(x) \le 0$, то $y_0 + \frac{y_0^2}{R_s} + \frac{\alpha y_0^3}{R_s} + 2\alpha y_0^2 \le 0$, поскольку R_S велико.

Поэтому знак $\varphi(y_0)$ будет зависеть в основном от знака $y_0'' - \frac{2y_0'^2}{y_0 + R_s} + \alpha R_s y_0$.

Рассмотрим решение уравнения

$$y_0'' + \alpha R_s y_0 = 0, \quad y_0(0) = 0, \quad y_0(\delta) = b < 0.$$

Положим $\lambda = \sqrt{-\alpha \cdot R_s}$, тогда

$$y_0(x) = \frac{b}{e^{\lambda\delta} - e^{-\lambda\delta}} \left(e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}\right), \quad |y_0(x)| \le |b|,$$

$$(y_0'(x))^2 = \left[\frac{\lambda b}{e^{\lambda\delta} - e^{-\lambda\delta}} \left(e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}\right)\right]^2 \le \lambda^2 b^2 \left(\frac{e^{\lambda\delta} + e^{-\delta\lambda}}{e^{\lambda\delta} - e^{-\lambda\delta}}\right)^2 =$$

$$= \lambda^2 b^2 \left(1 + \frac{2}{e^{2\lambda\delta} - 1}\right)^2 \le \lambda^2 b^2 \left(1 + \frac{1}{\lambda\delta}\right)^2 \le 9\lambda^2 b^2$$

$$\frac{2 y_0'^2}{y_0 + R_s} \le \frac{2 \cdot 9 b^2 |\alpha| \cdot R_s}{y_0 + R_s} \le b^2 \cdot \frac{18}{20}.$$

В итоге $\varphi(y_0)$ будет порядка $b^2 + |b| < \frac{R_s}{10}$, а также $\varphi(y_0) < 0$. Аналогично поступаем в случае функции $F_2(y)$ при $b > 0$. Итак, во всех случаях существует начальное приближение, при котором процесс Ньютона сходится, поэтому существование решения установлено, если b удовлетворяет неравенству $b^2 + |b| < \frac{R_s}{10}$.

ЛИТЕРАТУРА

I. М.К.Гавурин. Нелинейные функциональные уравнения и непрерывные аналоги итеративных процессов. Известия вузов, математика, № 5, 1958.

2. Е.П.Жидков, И.В.Пузынин. Об одном методе введения параметра при решении краевых задач... . ЖВММФ, № 5, 1086-1095, 1967.

3. Е.П.Жидков, Т.В.Рыльцева, Б.В.Феоктистов. Метод решения краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих движение заряженных частиц в магнитных полях ускорителей. Препринт ОИЯИ, 5-4821, Дубна, 1969.

4. Д.Ф.Давиденко. ДАН СССР, т.88, № 4, 1953.

5. М.А.Красносельский, А.И.Перов. О существовании решений у некоторых операторных уравнений. ДАН СССР, т.126, № I, 1959.

6. Л.В.Канторович, Г.П.Акилов. Функциональный анализ в нормированных пространствах, М., Физматгиз, 1959.

7. М.А.Люстерник, В.И.Соболев. Введение в функциональный анализ. М., Наука, 1965.

8. Ю.А.Далецкий, М.Г.Крейн. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. М., Наука, 1970.

9. Дж.Сансоне. Обыкновенные дифференциальные уравнения, т.I,2. М., ИЛ, 1953.

IO. И.Г.Петровский. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М., Наука, 1970.

II. М.М.Вайнберг. Вариационные методы исследования нелинейных операторов. М., Гостехиздат, 1956.

Рукопись поступила в издательский отдел
3 сентября 1974г.