объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

28/12-83

Р5-82-879

И.В.Амирханов, Е.П.Жидков, И.Е.Жидкова

ВЛИЯНИЕ РАЗНОСТНОГО РЕЗОНАНСА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА $2\nu_z - \nu_x = 1$ НА ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ В ЦИКЛИЧЕСКИХ УСКОРИТЕЛЯХ

Направлено в научный сборник ОИЯИ-ЦИФИ "Алгоритмы и программы для решения некоторых задач физики", выпуск IV

1982

Основу теории бетатронных колебаний в циклических ускорителях составляет исследование системы нелинейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Основной задачей теории является изучение устойчивости движения. Наличие нелинейных членов в уравнении приводит к появлению "нелинейных" резонансов, которые будут наблюдаться при выполнении условия

$$k_x \nu_x + k_z \nu_z + q = 0 ,$$

где k_x, k_z, q – целые числа, ν_x и ν_z – частоты бетатронных колебаний.

Если посмотреть на диаграмму устойчивости любого конкретного ускорителя, то трудно выбрать рабочую точку вдали от резонансов, поскольку при достаточно больших k_x, k_z и q всегда найдется резонансная линия, проходящая вблизи этой точки.

В связи с этим становится актуальной задача рассмотрения влияния различных нелинейных резонансов на движения частиц в циклических ускорителях. Этим вопросам посвящено большое количество работ [1-8], достаточно полный список литературы можно найти в [1,2].

В работах [7,8] был рассмотрен разностный резонанс третьего порядка $2\nu_z - \nu_x = 1$, который проходит достаточно близко от рабочей точки синхрофазотрона ОИЯИ. Исследование проводилось методом Крылова-Боголюбова [9] в первом приближении. Для повышения точности, т.е. для расширения интервала времени, на котором приближенное решение незначительно отличается от точного, нужно выполнять расчеты во втором и более высоких приближениях. Однако, насколько нам известно, до сих пор подобные исследования резонансов не проводились, что связано с практически непреодолимыми трудностями аналитических расчетов. Ситуация существенно изменилась с появлением возможности выполнять громоздкие аналитические выкладки на ЭВМ.

В данной работе рассматривается разностный резонанс третьего порядка $2\nu_z - \nu_x = 1$ во втором приближении, причем все аналитические выкладки были сделаны с использованием системы для аналитических вычислений на ЭВМ REDUCE-2 [10].

В отсутствие электрического поля движение заряженных частиц в циклических ускорителях описывается системой нелинейных уравнений /I,2/

$$
\begin{aligned}
x'' + \nu_x^2 x &= \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i V_{ix} , \\
z'' + \nu_z^2 z &= \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i V_{iz} ,
\end{aligned}
\qquad (I)
$$

где V_{ix}, V_{iz} – полиномы от x, x', z, z' и периодическая функция от θ, штрих означает дифференцирование по θ, $\varepsilon = \frac{1}{R_0}$ – малый параметр (R_0 – радиус идеальной орбиты).

Система уравнений (I) исследуется методом усреднения во втором приближении. Для этого в правой части (I) пренебрегаем членами порядка ε^3 и выше, после чего правые части системы (I) принимают вид $\varepsilon V_{1x} + \varepsilon^2 V_{2x}$ и $\varepsilon V_{1z} + \varepsilon^2 V_{2z}$, где

$$
\begin{aligned}
V_{1x} &= Q_1(\theta) x^2 + Q_2(\theta) z^2 + \tfrac{1}{2}(x')^2 + \tfrac{1}{2}(z')^2 , \\
V_{2x} &= Q_4(\theta) x^3 + Q_5(\theta) x z^2 + \tfrac{1}{2}(3 n_0 - 4) x (x')^2 + \\
&\quad + \tfrac{n_0}{2} x (x')^2 + \tfrac{1}{2} n_0 x (z')^2 , \\
V_{1z} &= Q_3(\theta) x z + x' z' , \\
V_{2z} &= Q_6(\theta) x^2 z + Q_7(\theta) z^3 - \tfrac{1}{2} n_0 z (x')^2 - \\
&\quad - \tfrac{3}{2} n_0 z (z')^2 ,
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

$$
Q_j(\theta) = A_{j0} + B_{j1}\cos\theta + A_{j1}\sin\theta , \qquad j = 1, 2, \dots 7 .
$$

В окрестности резонанса $2\nu_z - \nu_x = 1 + \delta$, $\delta \ll 1$, можно положить

$$
\nu_z^2 = \left(\frac{1+\nu_x}{2}\right)^2 + \varepsilon \cdot \Delta , \qquad (3)
$$

где $\varepsilon \cdot \Delta$ представляет собой расстройку. После этого система (2) примет вид

$$
\begin{aligned}
x'' + \nu_x^2 x &= \varepsilon V_{1x} + \varepsilon^2 V_{2x} , \\
z'' + \left(\frac{1+\nu_x}{2}\right)^2 z &= \varepsilon \left(V_{1z} - \Delta z \right) + \varepsilon^2 V_{2z} .
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

Сделаем в (4) замену переменных

$$
\begin{aligned}
x &= u_1 \sin(\nu_x \theta + u_2) , \qquad z = u_3 \sin\left[\left(\frac{1+\nu_x}{2}\right)\theta + u_4\right] , \\
x' &= \nu_x u_1 \cos(\nu_x \theta + u_2) , \quad z' = \frac{1+\nu_x}{2} u_3 \cos\left[\left(\frac{1+\nu_x}{2}\right)\theta + u_4\right] .
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

В новых переменных имеем

$$
u_n'(\theta) = \varepsilon F_{1n}(\theta, u) + \varepsilon^2 F_{2n}(\theta, u) , \qquad (6)
$$

где

$$
u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} , \qquad F_k = \begin{pmatrix} F_{k1} \\ F_{k2} \\ F_{k3} \\ F_{k4} \end{pmatrix} , \qquad k = 1, 2 .
$$

$$
\begin{aligned}
F_{k1} &= \frac{1}{\nu_x} V_{kx} \cdot \cos(\nu_x \theta + u_2) , \\
F_{k2} &= \frac{1}{\nu_x u_1} V_{kx} \cdot \sin(\nu_x \theta + u_2) , \\
F_{k3} &= \frac{2}{(1+\nu_x)} V_{kz} \cdot \cos\left[\left(\frac{1+\nu_x}{2}\right)\theta + u_4\right] , \\
F_{k4} &= -\frac{2}{(1+\nu_x) u_3} V_{kz} \sin\left[\left(\frac{1+\nu_x}{2}\right)\theta + u_4\right] .
\end{aligned}
\qquad (7)
$$

Дифференциальные уравнения, приведенные к виду (6), называют уравнениями в стандартной форме. Усредним систему (6) по методу Крылова-Боголюбова /9/. Усреднение ведется по θ. В этом случае уравнения второго приближения примут вид:

$$
\begin{aligned}
u_n'(\theta) = \varepsilon \underset{\theta}{M} \Big\{ & F_{1n}(\theta, u) + \varepsilon F_{2n}(\theta, u) + \\
& + \varepsilon \sum_{m=1}^{4} \tilde{F}_{1m}(\theta, u) \frac{\partial}{\partial u_m} F_{1n}(\theta, u) \Big\} , \qquad n = 1, 2, 3, 4 ,
\end{aligned}
\qquad (8)
$$

где

$$
F = \sum_p e^{ip\theta} F_p(u) , \qquad \tilde{F} = \sum_{p \neq 0} \frac{e^{ip\theta}}{ip} F_p(u) ,
$$

$\underset{\theta}{M}\{F(\theta, u)\} = F_0(u)$ – оператор усреднения.

Основные громоздкие аналитические выкладки при получении усредненных уравнений были выполнены с использованием системы REDUCE-2 /10/

на ЭВМ ЕС-1060. Задача считалась по частям: каждое уравнение (8) усреднялось отдельно. При этом для вычисления каждого уравнения требовалось 1200 Кбайт памяти и около 20 мин машинного времени. После усреднения получается система из четырех уравнений, которая преобразуется к виду

$$\dot{u}_1 = T_{10}^{(1)} u_3^2 u_1 + T_{10}^{(2)} \frac{u_3^4}{u_1} + T_{10}^{(3)} u_1^3 + T_{11}^{(1)} u_3^2 \sin\Psi + T_{12}^{(1)} \frac{u_3^4}{u_1} \sin 2\Psi + T_{13}^{(1)} u_3^2 \cos\Psi + T_{14}^{(1)} \frac{u_3^4}{u_1} \cos 2\Psi ,$$

$$\dot{u}_3 = T_{30}^{(1)} u_3^3 + T_{30}^{(2)} u_1^2 u_3 + T_{31}^{(1)} u_3 u_1 \sin\Psi + T_{32}^{(1)} u_3 u_1^2 \sin 2\Psi + T_{33}^{(1)} u_3 u_1 \cos\Psi + T_{34}^{(1)} u_3 u_1^2 \cos 2\Psi ,$$

$$\dot{\Psi} = \frac{2\varepsilon}{1+\nu_x}\Delta + \left(-T_{20}^{(1)} + 2T_{40}^{(3)}\right)u_1^2 + \left(-T_{20}^{(2)} + 2T_{40}^{(2)}\right)u_3^2 + \left(-T_{21}^{(1)}\frac{u_3^2}{u_1} + 2T_{41}^{(1)} u_1\right)\sin\Psi + \left(-T_{22}^{(1)}\frac{u_3^4}{u_1} + 2T_{42}^{(1)} u_1^2\right)\sin 2\Psi + \left(-T_{23}^{(1)}\frac{u_3^2}{u_1} + 2T_{34}^{(1)} u_1\right)\cos\Psi + \left(-T_{24}^{(1)}\frac{u_3^4}{u_1} + 2T_{44}^{(1)} u_1^2\right)\cos 2\Psi , \qquad (9)$$

где $\Psi = 2u_4 - u_2$,

$$T_{10}^{(1)} = \frac{\varepsilon^2}{128\nu_x^2(1+\nu_x)}\Big[-3\nu_x^2(1+\nu_x)^3 - 2\nu_x(1+\nu_x)^2 A_{30} - 8\nu_x^2(1+\nu_x)A_{20} - (1+\nu_x)^3 A_{10} - 4\nu_x(B_{31}B_{21} + A_{31}A_{21}) + 7(1+\nu_x)(B_{21}B_{11} + A_{21}A_{11}) + 12A_{20}A_{10} - 16\nu_x A_{30}A_{20}\Big),$$

$$T_{10}^{(2)} = \frac{\varepsilon^2}{128\nu_x^2}\left(3B_{21}^2 + 3A_{21}^2 + 8A_{20}^2\right) ,$$

$$T_{10}^{(3)} = \frac{\varepsilon^2}{128\nu_x^2}\left(5B_{11}^2 + 5A_{11}^2 + 8A_{10}^2\right) ,$$

$$T_{11}^{(1)} = \frac{\varepsilon^2\Delta}{4\nu_x(\nu_x+1)} A_{21} + \frac{\varepsilon}{8\nu_x} B_{21} ,$$

$$T_{12}^{(1)} = \frac{\varepsilon^2}{64\nu_x^2} B_{21}A_{21} , \qquad T_{14}^{(1)} = \frac{\varepsilon^2}{128\nu_x^2}\left(B_{21}^2 - A_{21}^2\right) ,$$

$$T_{13}^{(1)} = \frac{\varepsilon^2\Delta}{4\nu_x(\nu_x+1)} B_{21} - \frac{\varepsilon}{8\nu_x} A_{21} ,$$

$$T_{20}^{(1)} = \frac{\varepsilon^2}{8\nu_x}\left(2\nu_x^2(1-n_0) - 3A_{40}\right) ,$$

$$T_{20}^{(2)} = \frac{\varepsilon^2}{128\nu_x^2(1+\nu_x)}\Big[8\nu_x(B_{31}A_{21} - B_{21}A_{31}) + 3\nu_x(B_{21}A_{11} - B_{11}A_{21}) + 3(B_{21}A_{11} - B_{11}A_{21})\Big] ,$$

$$T_{21}^{(1)} = \frac{\varepsilon^2\Delta}{4\nu_x(1+\nu_x)} B_{21} - \frac{\varepsilon}{8\nu_x} A_{21} ,$$

$$T_{23}^{(1)} = -\frac{\varepsilon^2\Delta}{4\nu_x(1+\nu_x)} A_{21} - \frac{\varepsilon}{8\nu_x} B_{21} ,$$

$$T_{22}^{(1)} = \frac{\varepsilon^2}{64\nu_x^2}\left(B_{21}^2 - A_{21}^2\right) , \qquad T_{24}^{(1)} = \frac{\varepsilon^2}{32\nu_x^2} B_{21}A_{21} ,$$

$$T_{30}^{(1)} = \frac{\varepsilon^2}{128\nu_x(1+\nu_x)}\Big[-(1+\nu_x)^3\nu_x - (1+\nu_x)^2 A_{30} - 2B_{31}B_{21} - 2A_{31}A_{21}\Big] ,$$

$$T_{30}^{(2)} = \frac{\varepsilon^2}{128(1+\nu_x)^3}\left(4\nu_x^2(1+\nu_x)^3 + 4\nu_x(1+\nu_x)^2 A_{30} + (1+\nu_x)^2 A_{10} + 4B_{31}^2 + 4A_{31}^2 + 4A_{30}^2\right)$$

$$T_{31}^{(1)} = -\frac{\varepsilon^2\Delta}{2(\nu_x+1)^2} A_{31} - \frac{\varepsilon}{4(\nu_x+1)} B_{31} ,$$

$$T_{32}^{(1)} = \frac{\varepsilon^2}{16(1+\nu_x)^2} B_{31}A_{31} , \qquad T_{34}^{(1)} = \frac{\varepsilon^2}{32(1+\nu_x)^2}\left(B_{31}^2 - A_{31}^2\right) ,$$

$$T_{33}^{(1)} = -\frac{\varepsilon^2\Delta}{2(1+\nu_x)^2} B_{31} + \frac{\varepsilon}{4(1+\nu_x)} A_{31} ,$$

$$T_{40}^{(2)} = \frac{\varepsilon^2}{32\nu_x(1+\nu_x)}\left[3n_0\nu_x(1+\nu_x)^2 - 24\nu_x A_{70} - 2B_{31}A_{21}\right],$$

$$T_{40}^{(3)} = \frac{\varepsilon^2}{32\nu_x(1+\nu_x)}\left[8n_0\nu_x^3 - 16\nu_x A_{60} - 2B_{31}A_{11} + B_{11}A_{31}\right],$$

$$T_{41}^{(1)} = \frac{\varepsilon^2\Delta}{2(1+\nu_x)^2}B_{31} - \frac{\varepsilon}{4(1+\nu_x)}A_{31},$$

$$T_{42}^{(1)} = \frac{\varepsilon^2}{16(1+\nu_x)^2}\left(-B_{31}^2 + A_{31}^2\right),$$

$$T_{43}^{(1)} = -\frac{\varepsilon^2\Delta}{2(1+\nu_x)^2}A_{31} - \frac{\varepsilon}{4(1+\nu_x)}B_{31},$$

$$T_{44}^{(1)} = \frac{\varepsilon^2}{8(1+\nu_x)^2}B_{31}A_{31}.$$

Если в системе (9) пренебречь членами порядка ε^2, то мы придем к усредненным уравнениям в первом приближении. Эти уравнения полностью совпали с уравнениями первого приближения, полученными вручную в работе [7], что является косвенным подтверждением правильности уравнений (9), рассчитанных с помощью системы REDUCE-2.

Переходим к исследованию системы (9). Из первых двух уравнений системы (9) получаем равенство

$$\frac{d}{d\theta}\left[4\nu_x u_1^2 + (1+\nu_x)u_3^2\right] = \varepsilon^2 M, \tag{10}$$

где M – полином от $u_1, u_3, \sin\Psi, \cos\Psi, \sin 2\Psi, \cos 2\Psi$.

В равенстве (10) правая часть пропорциональна ε^2, что свидетельствует о медленном изменении выражения $[4\nu_x u_1^2 + (1+\nu_x)u_3^2]$. Для значений аргумента θ на интервале $0 \le \theta \le \frac{1}{\varepsilon^2}$ это выражение практически остается постоянным. Тогда из (10) имеем

$$4\nu_x u_1^2 + (1+\nu_x)u_3^2 = H_0, \tag{11}$$

где H_0 определяется из начальных условий и практически остается постоянным на интервале $0 \le \theta \le \frac{1}{\varepsilon^2}$.

Из (11) следует, что амплитуды обоих видов колебаний u_1 и u_3 остаются в процессе движения ограниченными и резонанс $2\nu_z - \nu_x = 1$ не приводит к неустойчивости на интервале $0 \le \theta \le \frac{1}{\varepsilon^2}$. Так как в (11) не входит явно расстройка Δ, то амплитуды остаются конечными даже точно в резонансе. В работе [7] были получены аналогичные результаты, когда система (I) усредняется в первом приближении в окрестности резонанса $2\nu_z - \nu_x = 1$. Результаты настоящей работы позволяют существенно расширить интервал изменения аргумента θ, на котором оказались справедливыми те же утверждения, что и в работе [7].

Литература

1. Коломенский А.А., Лебедев А.Н. Теория циклических ускорителей. Физматгиз, М., 1962.
2. Брук Г. Циклические ускорители заряженных частиц. Атомиздат, М., 1970.
3. Schoch A. CERN-Report, 57-21, Geneve, 1958.
4. Hagedorn R., Schoch A. CERN-Report, 57-14, Geneve, 1957.
5. Василишин Б.В. и др. ОИЯИ, 9-7498, Дубна, 1973.
6. Безногих Ю.Д. и др. ОИЯИ, Р9-9115, Дубна, 1975, Р9-9120, Дубна, 1975.
7. Амирханов И.В. и др. ОИЯИ, 9-8663, Дубна, 1975.
8. Амирханов И.В. и др. ОИЯИ, Р11-9107, Дубна, 1975, Р11-8780, Дубна, 1975; Р11-9108, Дубна, 1975.
9. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. "Наука", М., 1974.
10. Hearn A.C., REDUCE-2 User's Manual, UCP-19, University of Utah, Salt Lake City, 1973.

Рукопись поступила в издательский отдел
17 декабря 1982 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги,
если они не были заказаны ранее.

Д3-11787	Труды III Международной школы по нейтронной физике. Алушта, 1978.	3 р. 00 к.
Д13-11807	Труды III Международного совещания по пропорциональным и дрейфовым камерам. Дубна, 1978.	6 р. 00 к.
	Труды VI Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1978 /2 тома/	7 р. 40 к.
Д1,2-12036	Труды V Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1978	5 р. 00 к.
Д1,2-12450	Труды XII Международной школы молодых ученых по физике высоких энергий. Приморско, НРБ, 1978.	3 р. 00 к.
	Труды VII Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц, Дубна, 1980 /2 тома/	8 р. 00 к.
Д11-80-13	Труды рабочего совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике, Дубна, 1979	3 р. 50 к.
Д4-80-271	Труды Международной конференции по проблемам нескольких тел в ядерной физике. Дубна, 1979.	3 р. 00 к.
Д4-80-385	Труды Международной школы по структуре ядра. Алушта, 1980.	5 р. 00 к.
Д2-81-543	Труды VI Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1981	2 р. 50 к.
Д10,11-81-622	Труды Международного совещания по проблемам математического моделирования в ядерно-физических исследованиях. Дубна, 1980	2 р. 50 к.
Д1,2-81-728	Труды VI Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1981.	3 р. 60 к.
Д17-81-758	Труды II Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1981.	5 р. 40 к.
Д1,2-82-27	Труды Международного симпозиума по поляризационным явлениям в физике высоких энергий. Дубна, 1981.	3 р. 20 к.
Р18-82-117	Труды IV совещания по использованию новых ядерно-физических методов для решения научно-технических и народнохозяйственных задач. Дубна, 1981.	3 р. 80 к.
Д2-82-568	Труды совещания по исследованиям в области релятивистской ядерной физики. Дубна, 1982.	1 р. 75 к.
Д9-82-664	Труды совещания по коллективным методам ускорения. Дубна, 1982.	3 р. 30 к.
Д3,4-82-704	Труды IV Международной школы по нейтронной физике. Дубна, 1982.	5 р. 00 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79
Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

Амирханов И.В., Жидков Е.П., Жидкова И.Е. Р5-82-879
Влияние разностного резонанса третьего порядка $2\nu_z - \nu_x = 1$ на движение частиц в циклических ускорителях

Работа посвящена исследованию разностного резонанса третьего порядка $2\nu_z - \nu_x = 1$, который проходит достаточно близко от рабочей точки синхрофазотрона ОИЯИ. При этом использовался метод усреднения Крылова-Боголюбова. Резонанс в первом приближении был аналитически исследован вручную. В данной работе получено второе приближение, которое было вычислено с помощью системы для аналитических вычислений на ЭВМ REDUCE-2. Доказана ограниченность амплитуд на временном интервале $[0, \frac{1}{\epsilon^2}]$.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Amirkhanov I.V., Zhidkov E.P., Zhidkova I.E. P5-82-879
Effect of Third Order Difference Resonance $2\nu_z - \nu_x = 1$ on Particle Motion in Cyclic Accelerators

The third-order resonance $2\nu_z - \nu_x = 1$ which occurs near the working point of the JINR synchrophasotron is studied. The investigation was performed using the Krylov-Bogolubov method of averaging. The first approach of the resonance was analytically investigated by hand. The second one was evaluated with the help of the system for analytical evaluation on the REDUCE-2 computer. The boundedness of amplitudes on time interval $[0, \frac{1}{\epsilon^2}]$ has been proved.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

Перевод О.С.Виноградовой.