ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р5-82-735

С.И.Сердюкова

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ФУНКЦИИ ГРИНА И "РАЗНОСТНОЙ СТУПЕНЬКИ" В СЛУЧАЕ ЛИПШИЦ НЕПРЕРЫВНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Направлено в "ЖВМ и МФ", в Оргкомитет Всесоюзной конференции "Вариационно-разностные методы в математической физике"; Москва, май 1983 года

1982

В работе [1] исследование оптимальных свойств численных методов решения гиперболических уравнений с липшиц-непрерывными коэффициентами сведено к исследованию интегралов

$$\Gamma_\nu^n = \int_\Gamma \kappa_\nu \kappa_{\nu-1} \ldots \kappa_1 z^n dz, \qquad /1/$$

$$G_\nu^n = \Big(\int_\Gamma \sum_{s=0}^{\nu} \kappa_\nu \kappa_{\nu-1} \ldots \kappa_{\nu-s+1} z^n dz \Big)(-2\pi i)^{-1} . \qquad /2/$$

Здесь $0 \le n \le r$, $-\infty<\nu<+\infty$. Контур Γ совпадает с единичной окружностью $|z| = 1$ вне окрестности $|z-1|<\epsilon$, $z=1$ обходится по произвольной дуге, расположенной вне единичного круга. $\kappa_\nu(z)$ - выделенное собственное значение резольвентной матрицы при $x=\nu h$, $\kappa_\nu(1)=1$. Кроме того, в [1] исследованы некоторые свойства $\kappa_\nu(z)$, обратной функции характеристического многочлена. В предлагаемой работе получены асимптотические оценки интегралов /1/, /2/ при $n \to \infty$. Из этих оценок следует, что при $k=[b \ln h^{-1}]$ разностные схемы максимального нечетного порядка точности $(2k-1)$ обладают свойствами, близкими к оптимальным, и в случае липшиц-непрерывных коэффициентов.

Сначала выделим такие области изменения ν, n, где оценки разностной функции Грина и "разностной ступеньки" получаются достаточно просто.

Лемма 1. При $n \le k^\omega$, $\omega > 0$, для всех ν и при любом n для $\nu < \overline{n\,(k \ln k)^{-1/\delta}}$ оценки функции Грина и "разностной ступеньки" в случае $\rho(x) \subset \mathrm{Lip}_\delta$ сводятся к соответствующим оценкам для постоянных ρ.

Доказательство. Здесь и далее положим

$$\gamma^* = \min(\gamma_1, \ldots, \gamma_\nu), \quad \psi_0 = \gamma^* \pi \Big(1 - 2\sqrt{\frac{2 \ln k}{k}}\Big).$$

В работе [1] было показано, что при $|\psi| < \psi_0$

$$\kappa(\psi) = \exp\Big\{-\frac{i\psi}{\gamma} - \frac{A(\gamma)\sin^{2k}(\psi/2\gamma)}{\gamma k \cos(\psi/2\gamma)}\Big(\exp i(2\gamma-1)\frac{\psi}{2\gamma}\Big)(1 + O(\ln^{-1} k))\Big\},$$

а при $|\psi| \ge \psi_0$

$$|\kappa(\psi)| < \exp\Big\{-\frac{\sin^2\gamma\pi}{3\gamma k^2\sqrt{\ln k}}\Big\} < \exp\Big(-\frac{1}{k^2\sqrt{\ln k}}\Big) = 1 - \frac{b(k)}{k^2},$$

$$\sin^2\gamma\pi < \gamma\pi, \quad 2\pi \sin\gamma\pi \cos\gamma\pi < \pi, \quad \pi \sin 2\gamma\pi < \pi .$$

Для рассматриваемых ν и n $\psi_0(\nu h)$ практически неразличимы:

$$\gamma\left(\pi - 2\sqrt{\frac{2\ln k}{k}}\right) = \gamma^*\left(1 + O(((\nu-\nu^*)h)^{\delta})\right)\left(\pi - 2\sqrt{\frac{2\ln k}{k}}\right) =$$

$$= \gamma^*\left(\pi - 2\sqrt{\frac{2\ln k}{k}} + R(k)\right),$$

где

$$R(k) = \begin{cases} O\left(\dfrac{1}{k\ln k}\right) & \text{при } \nu < n\,(k\ln k)^{-1/\delta}, \\ O(hk^{\omega+1}) & \text{при } n \le k^{\omega} \text{ для всех } \nu. \end{cases}$$

В обоих случаях $R(k) = o\left(\sqrt{\frac{\ln k}{k}}\right)$. Практически неразличимы и степени синуса:

$$\sin^{2k}\frac{\psi}{2\gamma} = \sin^{2k}\left(\frac{\psi}{2\gamma} - \frac{\psi}{2\gamma^*} + \frac{\psi}{2\gamma^*}\right) =$$

$$= \left(\sin\frac{\psi}{2\gamma^*}\cos\psi\frac{\gamma^*-\gamma}{2\gamma\gamma} + \cos\frac{\psi}{2\gamma^*}\sin\psi\frac{\gamma^*-\gamma}{2\gamma\gamma^*}\right)^{2k} = \sin^{2k}\frac{\psi}{2\gamma^*}\left(1+O(\gamma^*-\gamma)\right)^{2k} =$$

$$= \sin^{2k}\frac{\psi}{2\gamma^*}\left(1 + O(\ln^{-1}k)\right).$$

Наконец, смотрим, как ведет себя параметр $j(\nu)$:

$$\frac{1}{\gamma_1} + \dots \frac{1}{\gamma_\nu} - n = \frac{\nu}{\gamma^*} - n + O\left(\sum_{\ell=1}^{\nu}(|\nu-\nu^*|h)^{\delta}\right) = \frac{\nu}{\gamma^*} - \tilde{n},$$

где $\tilde{n} = n(1 + R(k))$. Справедлива оценка:

$$R(k) = \begin{cases} O((k\ln k)^{-1-1/\delta}\,(nh)^{\delta}) & \text{при } \nu < n\,(k\ln k)^{-1/\delta}, \\ O(k(k^{\omega+1}h)^{\delta}) & \text{при } n \le k^{\omega} \text{ для всех } \nu. \end{cases}$$

В обоих случаях $R(k) = o(k^{-1}\ln^{-1}k)$.

Итак, при $|\psi| \le \gamma^*(\pi - 2\sqrt{\frac{2\ln k}{k}})$ подынтегральная функция имеет вид $\kappa_*^{\nu} z^{\tilde{n}}$. Лемма 1 доказана. В частности, доказано, что при $n \le k^{\omega}$ /$\omega > 0$ любое/ исследование случая липшиц-непрерывных коэффициентов сводится к случаю постоянных коэффициентов. В следующей лемме для $n > k^{\omega}$ выделяется область ν вблизи характеристики, которой отвечают основные асимптотические оценки, определяющие оптимальные свойства схем максимального нечетного порядка точности.

Лемма 2. При $n \ge k^{\omega}$, $\nu > n(k\ln k)^{-1/\delta}$, $|j| > nk^{-\theta}(k\ln k)^{-1/\delta}$, $\theta > 0$, $\omega > \frac{1}{\delta} + \theta + 3$, разностная функция Грина экспоненциально мала:

$$|\Gamma_\nu^n| \le \exp\left\{-\frac{n}{k^{2+\theta}(k\ln k)^{1/2+1/\delta}}\right\}.$$

Доказательство. Исходный контур интегрирования, отрезок $[-\pi, \pi]$, деформируем в контур, представленный на рис.1.

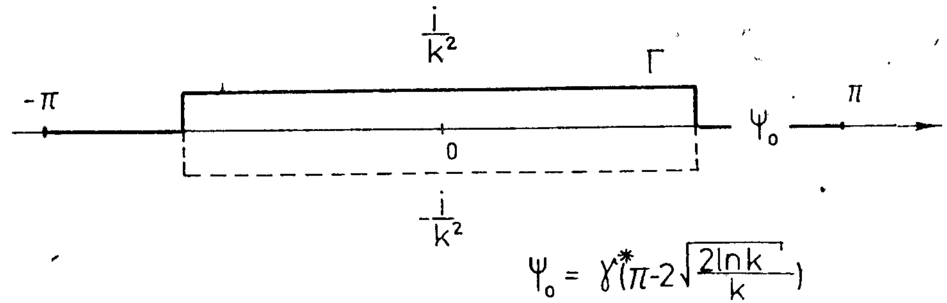

Рис.1.

При $j > 0$ контур Γ проходит в верхней полуплоскости, при $j < 0$ – в нижней. На отрезках вещественной оси $\gamma^*(\pi - 2\sqrt{\frac{2\ln k}{k}}) \le |\phi| \le \pi$ подынтегральная функция допускает оценку

$$|\kappa_1 \dots \kappa_\nu z^n| \le \exp\left\{-\min\left(\nu, h^{-1}\left(\frac{\ln k}{k}\right)^{1/\delta}\right)k^{-2}/\sqrt{\ln k}\right\}.$$

В самом деле, при $|\ell - \nu^*| < h^{-1}\cdot\left(\frac{\ln k}{k}\right)^{1/\delta}$

$$|\gamma_\ell - \gamma^*| \le c(|\ell-\nu^*|h)^{\delta} = O\left(\frac{\ln k}{k}\right).$$

По предположению $\nu > n(k\ln k)^{-1/\delta}$. Следовательно, на рассматриваемых отрезках вещественной оси

$$|\kappa_1 \dots \kappa_\nu z^n| \le \exp\{-nk^{-2}(k\ln k)^{-1/\delta}/\sqrt{\ln k}\}. \qquad /3/$$

На оставшейся части Γ: $\psi = \pm\psi_0 + itk^{-2}$, $0 \le t \le 1$; $\psi = \xi + ik^{-2}$, $-\psi_0 \le \xi \le \psi_0$, – справедлива оценка

$$\sin^{2k}\frac{\xi + itk^{-2}}{\gamma_\ell} = \left(\sin\frac{\xi}{\gamma_\ell} + \frac{itk^{-2}}{\gamma_\ell}\cos\frac{\xi}{\gamma_\ell}\right)^{2k}(1 + O(k^{-4}))^{2k} =$$

$$= \begin{cases} \sin^{2k}\dfrac{\xi}{\gamma_\ell}\left(1 + O\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)\right) & \text{при } |\xi| > \dfrac{1}{\sqrt{k}}, \\ O(k^{-k}) & \text{при } |\xi| \le \dfrac{1}{\sqrt{k}}. \end{cases}$$

В результате на вертикальных участках Γ справедлива оценка /3/.

На участках Γ, где $\mathrm{Im}\,\psi = \pm k^{-2}$, определяющую роль играет z^n. Учитывая /4/, получаем

$$|\kappa_1 \dots \kappa_\nu z^n| < \exp\{-|j| \cdot k^{-2} + O(\nu k^{-k})\} < \exp(-|j|/2k^2),$$

так как $\nu < nk$, и по условию $|j| > \dfrac{n k^{-\theta}}{(k \ln k)^{1/\delta}}$. Лемма 2 доказана.

Переходим к доказательству основных оценок. Используем обозначения, принятые в /1/:

Φ_ν^n – уклонение "разностной ступеньки" от "ступеньки",

$w(n)$ – ширина зоны "размывания" изолированного разрыва.

Теорема. Если $\rho(x) \subset \mathrm{Lip}_\delta$, $\frac{1}{4} \le \gamma(x) \le \frac{3}{4}$, то при $k = [b \ln h^{-1}]$, $t = n\tau \le 1$

$$\sum_\nu |\Gamma_\nu^n| < c \ln\ln h^{-1}, \qquad \sum_\nu |\Phi_\nu^n| < c \ln\ln h^{-1},$$

$$w(n) = O(\ln h^{-1}) \text{ при } n > \tau^{-\sigma}, \quad \sigma > 0.$$

Доказательство. При $n \le k^\omega$ задача свелась к случаю постоянных ρ. Соответствующие результаты были получены в работах /2,3/. Далее $n \ge k^\omega$, $\omega > \frac{1}{\delta} + \theta + 3$, θ выбирается ниже. Отдельно рассматриваем $|j| < k^4$ и $|j| \ge k^4$. При $|j| < k^4$ получены те же оценки, что и в случае постоянных ρ:

$$|\Gamma_j^n| < \frac{c}{|j|}, \quad |\Phi_j^n| < \frac{c}{|j|}, \quad j = n - \frac{1}{\gamma_1} - \dots - \frac{1}{\gamma_\nu}.$$

Для Γ_j^n оценка получается простым интегрированием по частям. В самом деле,

$$\Gamma_j^n = \int_{-\pi}^{\pi} \kappa_\nu \dots \kappa_1 z^n dz = \int_{-\psi_0}^{\psi_0} \kappa_\nu \dots \kappa_1 z^n dz +$$

$$+ O\left(\exp - n\left(\frac{\ln k}{k}\right)^{1/\delta} \frac{1}{k^2 \sqrt{\ln k}}\right) = \tilde{\Gamma}_j^n + R_j^n, \quad \psi_0 = \gamma^*\left(\pi - 2\sqrt{\frac{2 \ln k}{k}}\right),$$

$$\tilde{\Gamma}_j^n = \int_{-\psi_0}^{\psi_0} \exp\left\{ij\psi - \sum_{\ell=1}^{\nu} \frac{A(\gamma_\ell) \sin^{2k}(\psi/2\gamma_\ell)}{\gamma_\ell k \cos(\psi/2\gamma_\ell)} \left(\exp i(2\gamma_\ell - 1)\frac{\psi}{2\gamma_\ell}\right) \times\right.$$

$$\left.\times (1 + O(\ln^{-1} k))\right\} d\psi = \frac{1}{ij} \int_{-\psi_0}^{\psi_0} \sum_{\ell=1}^{\nu} \frac{A(\gamma_\ell)}{\gamma_\ell^2} \sin^{2k-1}\frac{\psi}{2\gamma_\ell} \left(\exp i(2\gamma_\ell - 1)\frac{\psi}{2\gamma_\ell}\right) \times$$

$$\times (1 + O(\ln^{-1} k))\, \kappa_\nu \dots \kappa_1\, e^{in\psi} d\psi + O\left(\frac{\nu}{j\sqrt{k}} R_j^n\right).$$

Отсюда и из неравенства $\cos(2\gamma_\ell - 1)\frac{\psi}{2\gamma_\ell} \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$, $|\psi| \le \psi_0$, следует

$$|\Gamma_j^n| < \frac{c}{|j|} \int_0^{\psi_0} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^{\nu} \frac{A(\gamma_\ell) \sin^{2k}(\psi/2\gamma_\ell)}{k\gamma_\ell \cos(\psi/2\gamma_\ell)}\right\} d\psi < \frac{c}{|j|}.$$

Довольно просто получаем аналогичную оценку для $\Phi_\nu^n = G_\nu^n$ при $j > 0$ и $\Phi_\nu^n = G_\nu^n - 1$ при $j \le 0$. Следовательно, слева от характеристики, при $j > 0$,

$$\Phi_j^n = -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\kappa_\nu + \kappa_\nu \kappa_{\nu-1} + \dots + \kappa_\nu \kappa_{\nu-1} \dots \kappa_1) z^n dz, \tag*{/5/}$$

справа от характеристики, при $j \le 0$,

$$\Phi_j^n = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \kappa_\nu \dots \kappa_1 \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \kappa_0 \kappa_{-1} \dots \kappa_{-\ell}\right) z^n dz. \tag*{/6/}$$

Заметим лишь, что разностная схема /1/ переводит 1 в 1 и единичным начальным данным на n-м слое отвечает /1/ последовательность

$$\left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \kappa_\nu \kappa_{\nu-1} \dots \kappa_{\nu-s+1}\right).$$

Для простоты изложения всюду опущены множители $T_{1,k}(x)$. Можно проследить, что в областях изменения ν, которым отвечают основные оценки, эти множители различимы на $O(k^{-\sigma})$, $\sigma > 0$. В результате основные оценки не изменяются по порядку, если учитывать $T_{1,k}(x)$. При этом, естественно, снова учитывается липшиц-непрерывность.

Далее используются две элементарные оценки, которые доказываются простым двойным интегрированием по частям.

Лемма 3. При постоянных γ, $k = [b \ln h^{-1}]$ для всех j

$$|\Gamma_j^n| < c\left(\frac{e^{-dn}}{|j|} + \frac{k}{j^2}\right). \tag*{/7/}$$

Лемма 4. Если $\rho(x) \subset \mathrm{Lip}_\delta$, $\frac{1}{4} \le \gamma \le \frac{3}{4}$, $k = [b \ln h^{-1}]$, $n > k^\omega$, $\nu > n/(k \ln k)^{1/\delta}$, то

$$|\Gamma_j^n| < c\left(\exp\left(-\frac{n}{k^2\sqrt{\ln k}}(k \ln k)^{-1/\delta}\right) + \frac{k}{j^2}\right). \tag*{/8/}$$

Используя /7/, оцениваем первые $n(k \ln k)^{-1/\delta}$ слагаемых в /5/. Им отвечают $j = n(1 + O(k \ln k)^{-1/\delta})$. Для оценки остальных слагаемых /5/ при $n - \frac{1}{\gamma_\nu} - \dots - \frac{1}{\gamma_{\nu-s}} \ge n\left(\frac{\ln k}{k}\right)^{1/\delta}$ используем /8/. Остается оценить

$$I_\nu^n = -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \kappa_\nu \dots \kappa_{\nu-s_0+1} \left(\frac{1 - \kappa_1^{\nu-s_0}}{1 - \kappa_1}\right) z^n dz.$$

Здесь s_0 – минимальное s, удовлетворяющее условию

$$n - \frac{1}{\gamma_\nu} - \dots - \frac{1}{\gamma_{\nu-s}} < n\left(\frac{\ln k}{k}\right)^{1/\delta}.$$

Напомним, что сейчас оцениваются

$$n - \frac{1}{\gamma_\nu} - \dots - \frac{1}{\gamma_1} < k^4, \quad n > k^\omega, \quad \omega > 4,$$

так что $\nu = O(n)$, $s_0 = O(n)$. Справедливо соотношение

$$I_\nu^n = \frac{1}{2\pi} \int_{|\psi|<\gamma^*/2} \gamma_1 \psi^{-1} \Big(\sin\Big(n - \frac{1}{\gamma_\nu} - \dots - \frac{1}{\gamma_{\nu-s_0}}\Big)\psi -$$

$$- \sin\Big(n - \frac{1}{\gamma_\nu} - \dots - \frac{1}{\gamma_1}\Big)\psi\Big) d\psi \cdot (1 + O(r^\theta)) -$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_{|\psi| \geq \gamma^*/2} \kappa_\nu \kappa_{\nu-1} \dots \kappa_{\nu-s_0+1} \Big(\frac{1-\kappa_1^{\nu-s_0}}{1-\kappa_1}\Big) z^n dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{|\psi|<\gamma^*/2} \gamma_1 \frac{\sin j'\psi - \sin j\psi}{\psi} d\psi\, (1 + O(r^\theta)) + \tilde{I}_\nu^n = O(j^{-1}).$$

$\tilde{I}_\nu^n$ оценивается простым интегрированием по частям, как это было сделано выше при оценке Γ_ν^n. Искомая оценка G_ν^n при $j > 0$ получена. При $j \leq 0$ уклонение "разностной ступеньки" от "ступеньки" задается интегралом /6/, который оценивается аналогично /5/.

При $\nu > n(k \ln k)^{-1/\delta}$, $k^4 < |j| < nk^{-\theta}(k \ln k)^{-1/\delta}$ оценки Γ_ν^n и G_ν^n получаются с помощью метода перевала. Заметим сразу, что, аналогично проделанному выше, для "разностной ступеньки" задача сводится к оценке интегралов вида

$$\int_\Gamma \kappa_\nu \dots \kappa_{\nu-s_0+1} \Big(\frac{1-\kappa_1^{\nu-s_0}}{1-\kappa_1}\Big) z^n dz.$$

При $k^4 < |j| < nk^{-\theta}(k \ln k)^{-1/4}$ точки перевала, определяющие асимптотику, находятся на конечном расстоянии от полюса $z = 1$ и асимптотические оценки Φ_j^n отличаются от соответствующих оценок Γ_j^n лишь постоянным множителем. Остается получить асимптотические оценки

$$\tilde{\Gamma}_\nu^n = \int_{-\psi_0}^{\psi_0} \kappa_\nu \dots \kappa_1 e^{in\psi} d\psi = \int_{-\psi_0}^{\psi_0} \exp\Big\{ ij\psi -$$

$$- \sum_{\ell=1}^{\nu} \frac{A(\gamma_\ell)}{k\gamma_\ell} \frac{\sin^{2k}(\psi/2\gamma_\ell)}{\cos(\psi/2\gamma_\ell)} (1 + O(\ln^{-1}k)) \exp i(2\gamma_\ell - 1)\frac{\psi}{2\gamma_\ell} \Big\} d\psi,$$

$$\psi_0 = \gamma^*\Big(\pi - 2\sqrt{\frac{2\ln k}{k}}\Big), \quad \gamma^* = \min(\gamma_1, \dots, \gamma_\nu).$$

Если γ_ℓ отличается от γ^* больше, чем на $O\Big(\sqrt{\frac{\ln k}{k}}\Big)$, то при $|\psi| < \psi_0$ соответствующее слагаемое мало и в сумме эти слагаемые составляют

$$O\Big(\ln^{-1} k \sum_{|\ell-\ell^*|<n(k \ln k)^{-1/\delta}} \frac{A(\gamma_\ell)}{k \cdot \gamma_\ell} \sin^{2k}\frac{\psi}{2\gamma_\ell} \cos^{-1}\frac{\psi}{2\gamma_\ell} \times$$

$$\times \exp i(2\gamma_\ell - 1)\frac{\psi}{2\gamma_\ell}\Big), \quad \ell^* = \nu^*.$$

При доказательстве используется элементарная оценка:

$$\Big|\frac{\sin \epsilon\psi}{\sin\psi}\Big| < \sin\epsilon\frac{\pi}{2}, \quad \epsilon < 1, \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}.$$

В результате интересующий нас интеграл преобразуется к виду

$$\int_{-\psi_0}^{\psi_0} \exp\Big\{ ij\psi - \sum_{|\ell-\ell^*|<N=n(\frac{\ln k}{k})^{1/2\delta}} \frac{A(\gamma_\ell)}{k \cdot \gamma_\ell} \Big(\sin\frac{\psi}{2\gamma^*}\Big(1 - c_\ell\sqrt{\frac{\ln k}{k}}\Big)\Big)^{2k} \frac{(1 + O(\ln^{-1}k))}{\cos(\psi/2\gamma^*)}\Big\} d\psi,$$

$c_\ell > 0$, среди них есть близкие к 0. Так, при $|\ell - \ell^*| < \frac{n}{(k \ln k)^{1/\delta}}$

$$\sin^{2k}\frac{\psi}{2\gamma_\ell} = \Big(\sin^{2k}\frac{\psi}{2\gamma^*}\Big)(1 + O(\ln^{-1}k)).$$

Делаем замену переменных

$$\sum_{|\ell-\ell^*|<N} \frac{A(\gamma_\ell)}{k\gamma_\ell} \Big[\sin\frac{\psi}{2\gamma^*}\Big(1 - c_\ell\sqrt{\frac{\ln k}{k}}\Big)\Big]^{2k} \Big(\exp i(2\gamma^* - 1)\frac{\psi}{2\gamma^*}\Big) \frac{(1 + O(\ln^{-1}k))}{\cos(\psi/2\gamma^*)} =$$

$$= \sum_{|\ell-\ell^*|<N} \frac{A(\gamma_\ell)}{k\gamma_\ell} \frac{t^{2k}}{\sqrt{1-t^2}},$$

$$t = \sin\frac{\psi}{2\gamma^*}\Big(1 + O\Big(\sqrt{\frac{\ln k}{k}}\Big)\Big), \quad \psi = 2\gamma^* \arcsin t \Big(1 + O\Big(\sqrt{\frac{\ln k}{k}}\Big)\Big).$$

Положим $\tilde{n} = \sum_{|\ell-\ell^*|<N} A(\gamma_\ell)/(k\gamma_\ell) = O(n(k \ln k)^{-1/\delta} \cdot k^{-1/2})$, тогда

$$I_\nu^n = \int_{-t_0}^{t_0} \exp\Big\{2\gamma ij \arcsin t\Big(1 + O\Big(\sqrt{\frac{\ln k}{k}}\Big)\Big) - \tilde{n}\frac{t^{2k}}{\sqrt{1-t^2}}\Big\} \frac{2\gamma\, dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Задача свелась к построению асимптотик интегралов, аналогичных интегралам, исследованным /3/ в случае постоянных ρ. Правда, здесь диапазон изменения j шире, точки перевала перемещаются в круге большего радиуса. В связи с этим дополнительно проследим за деформацией линий уровня. Кроме того, при $|t_\ell| > \sqrt{\sin\frac{3}{4}}$ иначе приходится оценивать асимптотические вычеты, точнее $\mathrm{Im}(\arcsin t_\ell)$. По условию

$$k^4 < |j| < n(k \ln k)^{-1/\delta} \cdot k^{-\theta}, \quad |t_0| < 1 - \frac{\ln k}{k}, \qquad \text{при } \theta = 8$$

точки перевала находятся строго внутри круга $|t| \le t_0$. При $j > 0$, $t = \rho \cdot e^{i\omega}$, $0 \le \rho \le 1$, $0 \le \omega \le \pi$, $\mathrm{Re}(2i\gamma j \arcsin t) \le 0$. Ноль достигается лишь на вещественной оси. На рис.2 заштрихована область G

$$\mathrm{Re}(2i\gamma j \arcsin t - \tilde{n}\, t^{2k}) \le 0,$$

звездочками отмечены точки перевала, пунктиром даны линии наискорейшего спуска, их асимптотами являются лучи $\pi\ell/k$, $\ell = 0, 1, \ldots, k$. Проследим за возмущением границы области G и линий наискорейшего спуска. Граница G удовлетворяет соотношению:

$$\mathrm{Re}\{2i\gamma j \arcsin t (1 + O(\sqrt{\frac{\ln k}{k}})) - \tilde{n} t^{2k} / \sqrt{1 - t^2}\} =$$

$$= -\tilde{n}\rho^{2k} \cos 2k\omega + \mathrm{Re}\{2i\gamma j \arcsin t (1 + O(\sqrt{\frac{\ln k}{k}}))\} = 0.$$

При $|t| < 1 - \frac{\ln k}{k}$; $\rho^{2k} \le k^{-2}$. По предположению, $|j| < n(k \ln k)^{-1/\delta} \cdot k^{-\theta}$, $|j|/\tilde{n} = O(k^{-\theta + 1/2})$, $\theta = 8$, $\cos 2k\omega = \epsilon$, $\omega_\ell = \frac{\pi}{4k} + \frac{\pi\ell}{2k} + O(k^{-2-1/2})$.

Аналогично оцениваем возмущение линий наискорейшего спуска.

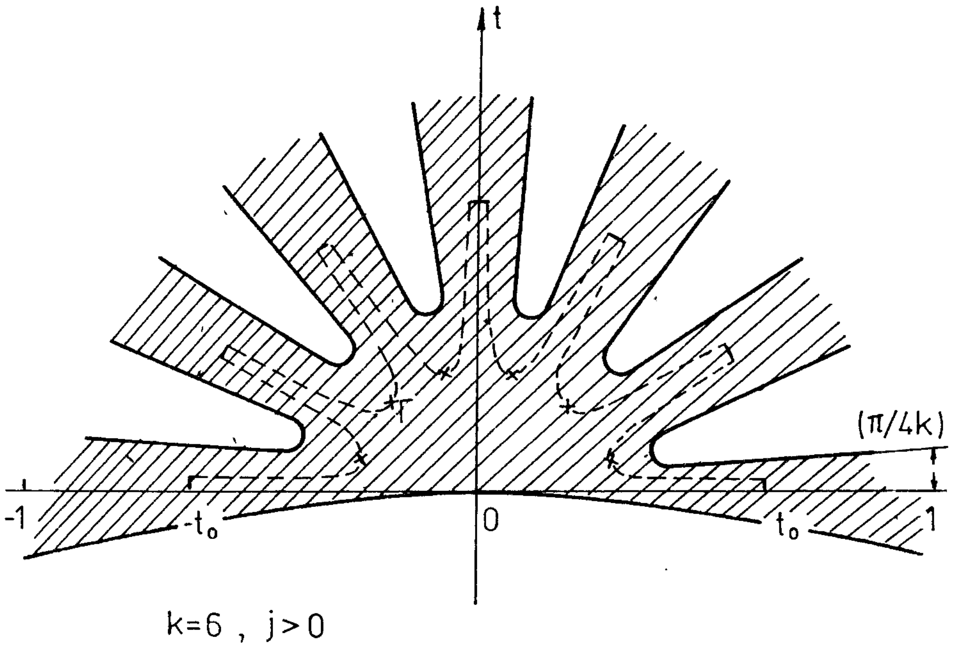

Рис.2.

Из этих оценок следует, что геометрическая картина при возмущении сохраняется и применим метод перевала [4]. Заметим, что особые точки $t = \pm 1$ находятся вне зоны влияния точек перевала [5], т.к. при $|j| > k^4$, ширина зоны влияния точек перевала $O(k^{-2})$, а точки перевала лежат в круге $|t| < 1 - \frac{\ln k}{k}$. При $j > 0$ асимптотика определяется совокупностью точек перевала, расположенных в верхней полуплоскости:

$$\mathrm{Res}(j) = \sum_{\ell:\, \mathrm{Im}\, t_\ell > 0} (-1)^\ell \sqrt{\frac{2\pi t_\ell}{2i\gamma j k \sqrt{1 - t_\ell^2}}} \exp\{2i\gamma j (\arcsin t_\ell - \frac{t_\ell}{k\sqrt{1 - t_\ell^2}}) \times$$

$$\times (1 + O(\sqrt{\frac{\ln k}{k}}))\}, \quad t_\ell = (\frac{\gamma j}{kn})^{1/(2k-1)} \exp(i \frac{\pi}{2(2k-1)} + \frac{2\pi i \ell}{2k-1}).$$

Для малых ℓ

$$\mathrm{Im}(\arcsin t_\ell) > \frac{d\ell}{k},$$

$$\mathrm{Im}\, t_\ell / (k \sqrt{1 - t_\ell^2}) = (k^{-8/2} / \sqrt{\ln k}), \quad |t| < 1 - (\ln k / k).$$

В самом деле,

$$\mathrm{Im}(\arcsin t_\ell) = \mathrm{Im}(\arcsin (1 - \epsilon)\, e^{i \frac{\pi\ell}{2k-1} + i \frac{\pi}{2(2k-1)}} =$$

$$= \mathrm{Im}(1 + \Delta) = \sqrt{2} (\epsilon^2 + (\frac{\pi(\ell + 1/4)}{k})^2)^{1/4} \sin(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\pi(\ell + 1/4)}{k\epsilon})(1 + o(1)).$$

При $\epsilon < \pi(\ell + \frac{1}{4})/k$ $\quad \mathrm{Im}(\arcsin t_\ell) > \sqrt{2\pi} \frac{\ell}{k} \sin\frac{\pi}{8}$;
при $\epsilon \ge \pi(\ell + \frac{1}{4})/k$ $\quad \mathrm{Im}(\arcsin t_\ell) > \frac{\ell}{k}$.

Далее, повторяя дословно доказательство из [2], получаем такую оценку:

$$|\Gamma_j^n| < \frac{B \exp(-d|j|/k)}{\sqrt{|j| \sqrt{k \ln k}}}, \quad k^4 < |j| < n(k \ln k)^{-1/\delta} \cdot k^{-8}.$$

Аналогичная оценка верна для уклонения "разностной ступеньки" от "ступеньки" Φ_j^n. При $n > \tau^{-\sigma}$, $\sigma > 0$, метод перевала применим для более широкого интервала $ck < |j| < n(k \ln k)^{-1/\delta} \cdot k^{-8}$.

Точки перевала находятся на конечном расстоянии от особых точек. Для таких n и j справедлива оценка

$$|\Phi_j^n| < \frac{B}{\sqrt{|j| k}} \exp\{-d|j|/k\}.$$

Отсюда следует, что для $n > \tau^{-\sigma}$ ширина зоны "размывания" изолированного разрыва есть $O(\ln h^{-1})$. Итак, в случае липшиц-непрерывных коэффициентов получены те же оценки разностной функции Грина и "разностной ступеньки", что и для постоянных ρ. Отличие состоит в том, что наклон характеристики меняется от точки к точке. Но в /1/ было показано, что

$$j = -\frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma_2} - \ldots - \frac{1}{\gamma_\nu} + n$$

имеет конечную /сверху и снизу/ скорость изменения по ν. В результате оценки Γ^n_ν, Φ^n_ν в L_1 отличаются от соответствующих оценок для уравнений с постоянными коэффициентами лишь постоянным множителем. В заключение заметим, что развитый здесь метод исследования устойчивости в С может быть применен к разностным уравнениям с липшиц-непрерывными коэффициентами общего вида. При этом для схем конечного порядка точности доказательство существенно упрощается.

Приношу благодарность члену-корреспонденту АН СССР Н.С.Бахвалову за постановку задачи и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сердюкова С.И. ОИЯИ, Р5-82-734, Дубна, 1982.
2. Сердюкова С.И. ДАН СССР, 1980, т. 266, с. 1325-1328.
3. Сердюкова С.И. Мат.заметки, 1982, т.32, вып.4, с. 517.
4. Федорюк М.В. "Метод перевала", "Наука", М., 1977, с. 164.
5. де Брейн Н.Г. Асимптотические методы в анализе, М., ИЛ, 1961, с. 124.

Рукопись поступила в издательский отдел
18 октября 1982 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Сердюкова С.И. Р5-82-735

Асимптотические оценки функции Грина и "разностной ступеньки" в случае липшиц-непрерывных коэффициентов

Получены асимптотические оценки функции Грина и "разностной ступеньки" для разностных схем максимального нечетного порядка точности $2k-1$, $k = O(\ln\tau)$, τ – шаг по времени. Накладывается естественное ограничение на отношение шагов сетки $(\tau/h) \le 1$. Рассматриваются гиперболические уравнения с липшиц-непрерывными коэффициентами. Основные асимптотические оценки получены с помощью метода перевала. Основная трудность по сравнению со случаем постоянных коэффициентов состоит в том, что при $n \gg k^{\omega}$ под знаком интегралов стоят не степени одной функции, а произведение существенно различных множителей. Используя липшиц-непрерывность, получаем оценки в L_1, близкие к оптимальным, совпадающие с оценками для случая постоянных коэффициентов.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Serdyukova S.I. P5-82-735

Asymptotic Estimates of Green's Function and Difference Step Function in the Case of Lipschitz-Continuous Coefficients

Asymptotic estimates of Green's function and step function for difference schemes of maximum odd accuracy $2k-1$, $k = O(\ln\tau^{-1})$, obtained, τ is step in time. The natural restriction on the mesh ratio $(\tau/h) \le 1$ is imposed. The hyperbolic equations with lipschitz-continuous coefficients are concidered. Principal estimates are obtained by an application of the saddle point method. The main difficulty in comparison with the case of constant coefficients lies in the fact that, when $n \gg k^{\omega}$, the intagrand containes the product of essentially different factors instead of the power of one function. Using lipschitz-continuity we get estimates in L_1, close to optimum and coinciding with estimates for the case of constant coefficients.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982