объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р5-82-734

С.И.Сердюкова

ОПТИМАЛЬНЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ЛИПШИЦ-НЕПРЕРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Направлено в "Журнал вычислительной математики и математической физики"; в Оргкомитет Всесоюзной конференции "Вариационно-разностные методы в математической физике" /Москва, май 1983 г./

1982

В работах[1,2] обсуждаются оптимальные численные методы решения гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами. Оптимальность понимается в следующем смысле. При счете разрывных решений важно, чтобы ширина зоны "размывания" изолированного разрыва была как можно уже. Для схем порядка точности q при $t = n\tau \le 1$ ширина зоны "размывания" изолированного разрыва $W(n) = O(h^{-1/(q+1)})$[3-5]. В идеале хотелось бы иметь численные методы, "размывающие" изолированный разрыв на конечное число точек: при $n\tau \le 1$ $W(n) = O(1)$. Кроме того, известно, что функции из C_α^N по значениям в узлах сетки с шагом h могут быть восстановлены с точностью $O(h^{N+\alpha})$. Отсюда возникает естественное желание иметь численные методы с погрешностью $O(h^{N+\alpha})$ на решениях из C_α^N. Для простейшего гиперболического уравнения $u_t + u_x = 0$ построены методы, обладающие свойствами, близкими к оптимальным. Рассматривается класс явных разностных схем максимального нечетного порядка точности, написанных по несимметричному четному набору точек:

$$u_\nu^{n+1} = \sum_{\ell=-k}^{k-1} a_\ell u_{\nu+\ell}^n , \quad \nu = 0, \pm1, \pm2, \ldots,$$

$$u_\nu^\circ = f_\nu , \qquad /1/$$

$$a_\ell = a_{-k+r} = (-1)^{k+r} \frac{(k-\gamma)\ldots(1-\gamma)\gamma(1+\gamma)\ldots(k-1+\gamma)}{(2k-1)!} \cdot \frac{C_{2k-1}^r}{(-k+r+\gamma)}.$$

Доказано[1,2], что при естественном ограничении на отношение шагов сетки $\gamma = \tau/h \le 1$, $n\tau \le 1$ и $k = [b \ln h^{-1}]$

$$W(n) = O(\ln h^{-1}), \quad E(n) = O(h^{N+\alpha} \ln\ln h^{-1}) \qquad /2/$$

на решениях из C_α^N. Через $E(n)$ обозначена погрешность численного решения на n-м слое. Получена также оценка разностной функции Грина

$$\sum_\nu |\Gamma_\nu^n| = O(\ln\ln h^{-1}), \quad n\tau \le 1. \qquad /3/$$

В предлагаемой работе эти результаты переносятся на случай переменных коэффициентов. Исследуется /1/, аппроксимирующая уравнение $u_t + \rho(x) u_x = 0$, $\gamma = \tau\rho(x)/h$. Предполагается, что $\rho(x) \subset \mathrm{Lip}_\delta$, $0 < \delta < 1$, $\frac{1}{4} \le \gamma \le \frac{3}{4}$ для всех x. В этом случае доказывается справедливость оценок /2/-/3/. Промежуточное место между работами[1,2] и настоящей работой занимает работа[6], в которой доказана устойчивость в C для конечных "k" в предположении непрерывной дифференцируемости $\rho(x)$.

Переходим непосредственно к исследованию случая, когда $\rho(x)$ принадлежит классу Lip_δ. Чтобы получить в этом случае явный вид разностной функции Грина Γ_ν^n и "разностной ступеньки" G_ν^n, введем в рассмотрение оператор перехода от слоя к слою G. Оператор G преобразует последовательность

$$v^n = \{u_0^n,\ u_{\pm1}^n,\ u_{\pm2}^n, \dots, u_{\pm\nu}^n, \dots\}$$

в последовательность v^{n+1} по формулам /1/, где

$$a_\ell = a_\ell(\gamma(x)), \quad \gamma = \tau\rho(x)/h, \quad x = \nu \cdot h.$$

Предполагается, что $\frac{1}{4} \le \gamma_\nu \le \frac{3}{4}$. Решение /1/ может быть представлено с помощью интеграла от резольвенты

$$v^n = G^n \cdot v^0, \quad G^n = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (G - zI)^{-1} z^n\, dz.$$

Контур Γ охватывает все точки спектра оператора G, особые точки $(G-zI)^{-1}$. Нам потребуется явный вид резольвенты. Задача сводится к решению системы обыкновенных разностных уравнений с параметром z: $\sum_{\ell=-k}^{k-1} a_\ell(\nu h) u_{\nu+\ell} = z u_\nu + f_\nu$. Сделав замену переменных

$$y_\nu = (u_{\nu+k-1}, \dots, u_\nu, \dots, u_{\nu-k+1})^*,$$

получаем одношаговую формулу

$$y_\nu = M(z,\nu) y_{\nu-1} + g_\nu.$$

$M(z,\nu)$ - резольвентная матрица:

$$M(z,\nu) = \left\| \begin{matrix} -a_{k-1}^{-1}\cdot a_{k-2} & \dots & -a_{k-1}^{-1}(a_0 - z) & \dots & -a_{k-1}^{-1}\cdot a_{-k} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 \end{matrix} \right\|,$$

$$g_\nu = (a_{k-1}^{-1} f_\nu, 0, \dots, 0)^*, \quad a_\ell = a_\ell(\gamma(\nu h)).$$

$M(z,\nu)$ - аналитическая функция z и γ. Для каждого фиксированного ν при $\{|z| \ge 1\}$ $\{|z-1| > \epsilon\}$ спектр $M(z,\nu)$ разбивается на два непересекающихся подмножества $|\kappa| < 1$ и $|\kappa| > 1$. Согласно теореме Т.Като[7], определено аналитическое по z, γ преобразование подобия, которое приводит $M(z,\nu)$ к блочному виду:

$$TMT^{-1} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad |Sp\, A| < 1, \quad |Sp\, B^{-1}| < \sigma < 1.$$

$M(1,\nu)$ имеет собственное значение, равное единице. Соответственно при $|z-1| \le \epsilon$ определено аналитическое преобразование подобия, которое приводит $M(z,\nu)$ к такому виду:

$$TMT^{-1} = \left\| \begin{matrix} A' & 0 & 0 \\ 0 & \kappa & 0 \\ 0 & 0 & B \end{matrix} \right\|, \quad |Sp\, A'| < \sigma, \quad \kappa(1) = 1, \quad z = e^{i\psi}.$$

$\kappa(\psi)$ - обратная функция характеристического многочлена

$$\lambda = \sum_{\ell=-k}^{k-1} a_\ell e^{i\ell\phi}, \quad a_\ell = a_\ell(\gamma(\nu h)).$$

В окрестности $\phi = 0$ характеристический многочлен допускает разложение

$$\lambda(\phi) = \exp\{-i\gamma\phi - \beta\phi^{2k} + O(\phi^{2k+1})\},$$

$$\beta = \frac{(k-\gamma)\dots(1-\gamma)\gamma(1+\gamma)\dots(k-1+\gamma)}{2k(2k-1)!}.$$

Из разложения $\lambda(\phi)$ находим разложение $\kappa(\psi)$ в окрестности $\psi = 0$

$$\kappa(\psi) = \exp\{-i\frac{\psi}{\gamma} - \frac{\beta}{\gamma^{2k+1}}\psi^{2k} + O(\psi^{2k+1})\}.$$

<u>Замечание</u>. Предельные /при $k \to \infty$ / точки спектра $M(z,\nu)$, расположенные на единичной окружности, являются предельными точками $\kappa(\psi)$ на этой окружности. Отсюда следует, что для всех k спектры A', B находятся на конечном расстоянии от единичной окружности. В проведенных численных экспериментах точки спектров A', B подходили к единичной окружности не ближе, чем на (1/3).

В обоих рассмотренных выше случаях T и T^{-1} - аналитические функции z,γ. По предложению, $\gamma(x)$ - липшиц-непрерывная функция x. Отсюда следует, что

$$\|T_\nu - T_{\nu-1}\| \le ch^\delta, \quad \|T_\nu\| = \max_{i,j} |t_{ij}(\gamma(\nu h), z)|.$$

Итак, всюду при $|z| \ge 1$ резольвентная матрица преобразуется к виду

$$\begin{pmatrix} A_\nu & 0 \\ 0 & B_\nu \end{pmatrix}, \quad |\mathrm{Sp}\, A_\nu| \le 1, \quad |\mathrm{Sp}\, B_\nu^{-1}| < \sigma < 1.$$

Чтобы получить явный вид резольвенты, сделаем еще одну замену переменных $w_\nu = T_\nu y_\nu$. Резольвентное уравнение принимает вид

$$w_\nu = \begin{pmatrix} A_\nu & 0 \\ 0 & B_\nu \end{pmatrix} w_{\nu-1} + T_\nu g_\nu + \begin{pmatrix} A_\nu & 0 \\ 0 & B_\nu \end{pmatrix} (T_\nu - T_{\nu-1}) T_{\nu-1}^{-1} w_{\nu-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} A_\nu & 0 \\ 0 & B_\nu \end{pmatrix} w_{\nu-1} + T_\nu g_\nu + h^\delta C_\nu w_{\nu-1}. \qquad /4/$$

Решение системы

$$w_\nu = \begin{pmatrix} A_\nu & 0 \\ 0 & B_\nu \end{pmatrix} w_{\nu-1} + Tg_\nu \qquad /5/$$

может быть выписано в явном виде

$$w_\nu^I = (Tg_\nu)^I + \sum_{s=1}^{\infty} A_\nu A_{\nu-1} \dots A_{\nu-s+1} (Tg_{\nu-s})^I,$$

$$w_\nu^{II} = -\sum_{s=0}^{\infty} B_\nu^{-1} B_{\nu+1}^{-1} \dots B_{\nu+s}^{-1} (Tg_{\nu+s})^{II}. \qquad /6/$$

Здесь w_ν^I, w_ν^{II} - соответственно верхние k и нижние $(k-1)$ компоненты вектора w_ν. При $\{|z| \ge 1\}$ $\{|z-1| > \epsilon\}$ эти ряды экспоненциально сходятся. Используя /6/ в качестве начального приближения, методом простых итераций можно получить решение возмущенной системы /4/. В самом деле, рассмотрим итерационный процесс

$$w_\nu^{(k+1)} = \begin{pmatrix} A_\nu & 0 \\ 0 & B_\nu \end{pmatrix} w_{\nu-1}^{(k+1)} + T_\nu g_\nu + h^\delta C_\nu w_{\nu-1}^{(k)},$$

$w_\nu^{(0)} = 0$, $w_\nu^{(1)}$ - решение системы /5/. Последующие приращения

удовлетворяют системе

$$\Delta_\nu^{(k)} = \begin{pmatrix} A_\nu & 0 \\ 0 & B_\nu \end{pmatrix} \Delta_{\nu-1}^{(k)} + h^\delta C_\nu \Delta_{\nu-1}^{(k-1)}.$$

Это система /5/, в которой правая часть Tg_ν заменена на $h^\delta C_\nu \Delta_{\nu-1}^{(k-1)}$. Отсюда и из /6/ при $|z| \ge 1$, $z \ne 1$ следует оценка

$$|\Delta_\nu^{(k)}| \le bh^\delta \max_\ell |\Delta_\ell^{(k-1)}|. \qquad /7/$$

Ряд, представляющий решение /4/

$$w_\nu(h) = w_\nu^{(1)} + \Delta_\nu^{(2)} + \Delta_\nu^{(3)} + \dots, \qquad /8/$$

экспоненциально сходится при $bh^\delta < 1$. Итак, резольвента не имеет особенностей при $|z| \ge 1$, $z \ne 1$. В качестве Γ может быть взята единичная окружность $|z| = 1$, $z = 1$ обходится по малой дуге вне единичного круга. Блок A_ν содержит выделенное собственное значение κ_ν, $\kappa_\nu(1) = 1$. Соответственно в /6/ выделяются ряды

$$\sum_{s=0}^{\infty} \kappa_\nu \kappa_{\nu-1} \dots \kappa_{\nu-s+1} (Tg_{\nu-s})_{(k)} =$$

$$= (Tg_\nu)_{(k)} + \sum_{s=1}^{\infty} \kappa_\nu \kappa_{\nu-1} \dots \kappa_{\nu-s+1} (Tg_{\nu-s})_{(k)}.$$

Через $w_{(k)}$ обозначается k-я компонента вектора w. Напомним, что Γ_ν^n и G_ν^n являются решениями задачи /1/ с такими начальными данными:

$$\Gamma_\nu^\circ = \begin{cases} 1, & \nu = 0, \\ 0, & \nu \ne 0, \end{cases} \qquad G_\nu^\circ = \begin{cases} 1, & \nu \ge 0, \\ 0, & \nu < 0. \end{cases}$$

Задача сводится к исследованию интегралов

$$\Gamma_\nu^n = \int_\Gamma \kappa_\nu \kappa_{\nu-1} \dots \kappa_1 t_{k,1}(z,0) z^n dz, \qquad /9/$$

$$G_\nu^n = \int_\Gamma \sum_{s=0}^{\nu} \kappa_\nu \kappa_{\nu-1} \dots \kappa_{\nu-s+1} t_{k,1}(z, \nu-s) z^n dz. \qquad /10/$$

Интегралы, содержание остальные компоненты /6/, экспоненциально малы при больших n. В /9/, /10/ $\nu \ge 1$, $t_{k,1}(z,\nu)$ - элемент матрицы $T_\nu(z)$. Определим положение характеристики, выпущенной при $t = 0$ из начала координат, при $t = n \cdot \tau$. Справедливо разложение

$$\kappa_\nu \kappa_{\nu-1} \dots \kappa_1 z^n = \exp\{i(n - \frac{1}{\gamma_1} - \dots - \frac{1}{\gamma_\nu})\psi - \sum_{s=1}^{\nu} \frac{\beta_s \psi^{2k}}{\gamma_s^{2k+1}} + \dots\}.$$

Положим $j = n - \frac{1}{\gamma_1} - \dots - \frac{1}{\gamma_\nu}$, $\omega_\nu = \frac{1}{\gamma_1} + \dots + \frac{1}{\gamma_\nu}$. Так как $\frac{1}{4} \le \gamma_\nu \le \frac{3}{4}$, ω_ν монотонно возрастает с ростом ν. При этом $\frac{4}{3}\Delta\nu \le \Delta\omega_\nu \le 4\Delta\nu$. $j = n - \omega_\nu$ монотонно убывает, и при некотором ν^* происходит смена знака j:

$$n - \frac{1}{\gamma_1} - \dots - \frac{1}{\gamma_\nu} > 0 \qquad \text{при} \quad \nu < \nu^*,$$

$$n - \frac{1}{\gamma_1} - \dots - \frac{1}{\gamma_\nu} \le 0 \qquad \text{при} \quad \nu \ge \nu^*.$$

Характеристика проходит в коридоре $t = n\tau$, $\nu^* = \nu^*(n)$, $(\nu^* - 1)h \le x \le \nu^* h$. Решение непрерывной задачи $u_t + \rho(x) u_x = 0$ с разрывными начальными данными

$$u(x,0) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \ge 0. \end{cases}$$

равно нулю слева от характеристики и единице справа от нее. Соответственно уклонение "разностной ступеньки" от "ступеньки" в матрике L_1 имеет вид

$$\sum_\nu |\Phi_\nu^n| = \sum_{\nu < \nu^*} |G_\nu^n| + \sum_{\nu \ge \nu^*} |G_\nu^n - 1|.$$

Асимптотика Γ_ν^n и G_ν^n зависит от поведения характеристической функции в окрестности определяющей точки $\phi = 0$. При $k = [b \ln h^{-1}]$ эта окрестность простирается над интервалом конечной длины, ее нельзя считать произвольно малой. B/1,2/ получено интегральное представление характеристической функции /1/

$$\lambda(\phi) = e^{-i\gamma\phi}(1 - A \int_0^\phi \sin^{2k-1} \frac{u}{2} \exp i(\gamma - \frac{1}{2}) u \, du), \tag{11}$$

$$A = 2^{2k-1} \frac{(k-\gamma)\dots(1-\gamma)\gamma(1+\gamma)\dots(k-1+\gamma)}{(2k-1)!} = \sin\gamma\pi\,(1 + O(k^{-1})).$$

Используя /11/, получим разложение характеристической функции в окрестности $\phi = 0$. В свою очередь, из этого разложения будет получено разложение выделенного собственного значения резольвентной матрицы $\kappa(\psi)$ в окрестности $\psi = 0$. Это разложение существенно используется при получении асимптотических оценок Γ_ν^n и G_ν^n

в случае переменных коэффициентов. Простым интегрированием по частям находим, что при $|\phi| \le \pi - c\sqrt{\frac{\ln k}{k}}$ справедливо разложение

$$\lambda(\phi) = \exp\{-i\gamma\phi - \frac{A}{k} \frac{\sin^{2k}(\phi/2)}{\cos(\phi/2)} (\exp i(\gamma - \frac{1}{2})\phi)(1 + O(\ln^{-1} k))\} =$$

$$= \exp\{-2i\gamma \arcsin t - \frac{At^{2k}}{k\sqrt{1-t^2}} (\exp i(2\gamma - 1)\arcsin t)(1 + O(\ln^{-1} k))\}.$$

На рассматриваемом интервале изменения ϕ

$$|t| < \cos(c\sqrt{\frac{\ln k}{k}}), \quad |t^{2k}/\sqrt{1-t^2}| \le \frac{2\sqrt{k}}{c \ln k} k^{-\frac{c^2}{4}}, \quad t = \sin\frac{\phi}{2},$$

$(At^{2k}/(k\sqrt{1-t^2})) \cdot \exp(i(2\gamma - 1)\arcsin t)$ мало. Если ϕ определяется из $\lambda(\phi) = e^{i\psi}$, то $\kappa = e^{i\phi(\psi)}$. Положим $u = \sin(\frac{\psi}{2\gamma})$, $t = t(u)$ находим из уравнения

$$-2i\gamma \arcsin t - \frac{A}{k} \frac{t^{2k}}{\sqrt{1-t^2}} (\exp i(2\gamma - 1)\arcsin t)(1 + O(\ln^{-1} k)) =$$

$$= 2i\gamma \arcsin u,$$

$$t = -u - \frac{Au^{2k}}{2i\gamma k} (\exp -i(2\gamma - 1)\arcsin u)(1 + O(\ln^{-1} k)).$$

Отсюда следует, что при $|\psi| < \psi_0 = \gamma(\pi - c\sqrt{\frac{\ln k}{k}})$ справедливо разложение

$$\kappa = \exp\{-\frac{i\psi}{\gamma} - \frac{A(\gamma)\sin^{2k}(\psi/2\gamma)}{\gamma k \cos(\psi/2\gamma)} (\exp i(2\gamma - 1)\frac{\psi}{2\gamma})(1 + O(\ln^{-1} k))\}.$$

Далее положим $c = 2\sqrt{2}$, тогда

$$|\kappa(\psi_0)| = \exp\{-\frac{\sin^2\gamma\pi}{\gamma k^2 \sqrt{2\pi \ln k}} (1 + O(\ln^{-1} k))\} = 1 - \frac{b(\gamma)}{k^2}.$$

Из этого представления, в частности, следует, что $\kappa(\psi)$ на $[0, \psi_0]$ монотонно убывает от 1 до $1 - b(\gamma)k^{-2}$. Покажем, что при $|\psi| > \psi_0$ $|\kappa(\psi)| < 1 - b(\gamma)k^{-2}$. Используем известную нам информацию о поведении $\lambda(\phi)$ и тот факт, что λ и κ являются взаимно-обратными

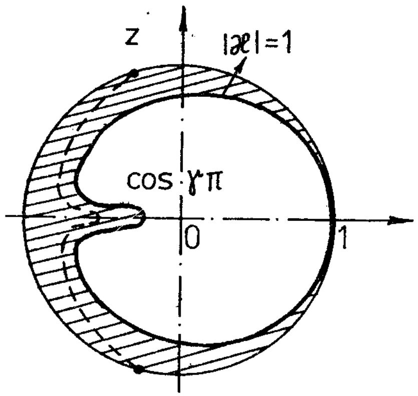

Рис.1

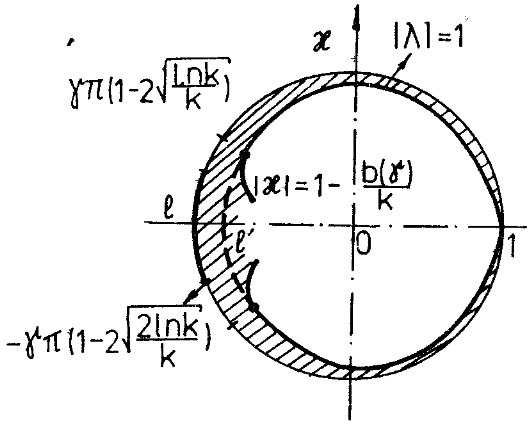

Рис.2

алгебраическими функциями. Нам известно поведение $|\lambda(e^{i\phi})|$. График $\lambda(e^{i\phi})$, $-\pi \le \phi \le \pi$, дает линию уровня $|\kappa(\psi)|=1$. Наоборот, график $\kappa(e^{i\psi})$, ψ вещественны, дает линию уровня $|\lambda(\phi)|=1$.

На рис.1,2 заштрихованы области $|\kappa|<1$, $|\lambda|<1$ соответственно. На первом рисунке пунктиром дана дуга линии уровня $|\kappa|=1-b(\gamma)k^{-2}$. Из рис.2 видно, что эта дуга с концами на единичной окружности лежит внутри единичного круга /больше нигде не пересекает единичной окружности/. Из асимптотики $\kappa(\psi)$ ясно; что вблизи точек $\pm\gamma(\pi-2\sqrt{\frac{2\ln k)}{k}})$ график $|\lambda|=1$ "загибается" внутрь и не может пересечь дугу ℓ', на которой $|\kappa|=1-b(\gamma)\cdot k^{-2}$. Далее, используя информацию о поведении $|\lambda|$ на дуге единичной окружности в /6/ и оценку в полосе между ℓ и ℓ', можно показать, что на оставшейся части дуги ℓ' $|\lambda|<1$. В самом деле,

$$\lambda = e^{-i\gamma\phi}(1-A\int_0^{\phi}\sin^{2k-1}\frac{u}{2}(\exp i(\gamma-\frac{1}{2})u)\,du),$$

$$\lambda' = -i\gamma\lambda - e^{-i\gamma\phi}A\sin^{2k-1}\frac{\phi}{2}\exp i(\gamma-\frac{1}{2})\phi.$$

На ℓ при $|\phi|>\pi-2\sqrt{\frac{\ln k}{k}}$

$$|\lambda|<|\lambda(\pi-2\sqrt{\frac{\ln k}{k}})|=1-\frac{\sin^2\gamma\pi}{k\sqrt{\pi\ln k}}(1+O(\ln^{-1}k)).$$

В полосе между ℓ и ℓ':

$$\phi=\omega+\frac{i}{k^2}t,\quad \operatorname{Im}\omega=0,\quad \pi-2\sqrt{\frac{\ln k}{k}}\le|\omega|\le\pi,\quad 0\le t\le b(\gamma),$$

справедлива оценка

$$|\lambda'|\le\gamma(1+A|\int_{\omega}^{\omega+itk^{-2}}\sin^{2k-1}\frac{u}{2}(\exp i(\gamma-\frac{1}{2})u)\,du|)+$$

$$+A\max_{0\le t\le b(\gamma)}|\sin^{2k-1}\frac{\phi}{2}e^{i\frac{\phi}{2}}|,\quad \omega=\pi-c\sqrt{\frac{\ln k}{k}},\quad 0\le c\le 2.$$

Оцениваем степень синуса

$$\sin^{2k-1}(\frac{\pi}{2}-\frac{c}{2}\sqrt{\frac{\ln k}{k}}+\frac{it}{2k^2})=\cos^{2k-1}(\frac{c}{2}\sqrt{\frac{\ln k}{k}}-\frac{it}{2k^2})=$$

$$=(1-\frac{c^2}{8}\frac{\ln k}{k}+\frac{ict}{4k^3}\sqrt{\frac{\ln k}{k}}+\dots)^{2k-1}=k^{-\frac{c^2}{4}}(1+O(\frac{\ln^2 k}{k})).$$

Отсюда и из оценки $e^{-i\gamma\phi}=e^{-i\gamma\omega}(1+O(k^{-2}))$ получаем, что

$$|\lambda'|\le\gamma(1+O(k^{-1}))+Ak^{-\frac{c^2}{4}}(1+O(k^{-1}\ln^2 k)),$$

$$|\Delta\lambda|=|\lambda(\phi)-\lambda(\omega)|\le b(\gamma)k^{-2}\max|\lambda'|=O(k^{-\frac{3}{2}}).$$

Тем самым доказано, что на ℓ'

$$|\lambda|<1-\frac{\sin^2\gamma\pi}{k\sqrt{\pi\ln k}}+O(k^{-\frac{3}{2}})<1-\frac{\sin^2\gamma\pi}{k\sqrt{2\pi\ln k}}.$$

Итак, установлено, что линия уровня $|\kappa|=1-b(\gamma)k^{-2}$ проходит внутри единичного круга. Значит, на единичной окружности при $|\psi|>\gamma(\pi-2\sqrt{\frac{2\ln k)}{k}})$ справедлива оценка $|\kappa|<1-b(\gamma)k^{-2}$.

В этой работе исследование устойчивости схемы /1/ с липшиц-непрерывными коэффициентами сведено к исследованию интегралов /9/-/10/. Под знаком интегралов стоят значения выделенного собственного значения резольвентной матрицы при различных $x=\nu h$. В следующей работе будут получены асимтотические оценки интегралов /9/-/10/, аналогичные асимптотическим оценкам Γ_ν^n, G_ν^n в случае постоянных коэффициентов. Из этих и приведенных выше оценок скорости изменения j следует справедливость оценок /2/. Это означает, что и в случае липшиц-непрерывных коэффициентов схема /1/ обладает свойствами, близкими к оптимальным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сердюкова С.И. ДАН СССР, 1980, т.255, №6, с.1325-1328.
2. Сердюкова С.И. Мат.заметки, 1982, т.32, вып.4, с.517.
3. Thomee V. Numerical Solution of Partial Differential Equations. (Ed. by J.H.Bramble), New York, 1966, p.125.
4. Hedstrom G.H. The Rate of Convergence of Some Difference Schemes. J.SIAM Numer.Anal., 1969, 5, No.2, p.363.
5. Сердюкова С.И. ЖВМ и МФ, 1971, 11, №2, с.411-424.
6. Сердюкова С.И. ОИЯИ, Р5-81-829, Дубна, 1981.
7. Kato T. Perturbation Theory for Linear Operators. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1966, p.99.

Рукопись поступила в издательский отдел
18 октября 1982 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Сердюкова С.И. Р5-82-734

Оптимальные численные методы решения гиперболических уравнений с липшиц-непрерывными коэффициентами

Доказано, что разностные схемы максимального нечетного порядка точности $(2k-1)$ при $k = O(\ln \tau^{-1})$, τ - шаг сетки по времени, при естественном ограничении на отношение шагов сетки $(\tau/h) \le 1$ обладают свойствами, близкими к оптимальным, и для липшиц-непрерывных коэффициентов. Случай постоянных коэффициентов исследован в предшествующих работах автора /ДАН СССР, т.255, №6; Мат.заметки, 1982, т.32, вып.4, с.517/. Задача сводится к асимптотическим оценкам функции Грина и "разностной ступеньки". Используется представление решения через оператор резольвенты. Резольвентная матрица липшиц-непрерывна и имеет единственное выделенное собственное значение, определяющее асимптотику функции Грина и "разностной ступеньки". Выделенное собственное значение является обратной функцией характеристического многочлена. На основе интегрального представления характеристического многочлена исследуются свойства выделенного собственного значения.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Serdyukova S.I. P5-82-734

Optimum Numerical Methods of Solution of Hyperbolic Equations with Lipschitz-Continuous Coefficients

The difference schemes of maximum odd accuracy $2k-1$, $k = O(\ln \tau^{-1})$, τ - is step in time, are proved to have properties close to optimum and in the case of lipschitz-continuous coefficients under the natural restriction on the mesh ratio $(\tau/h) \le 1$. The case of constant coefficients was investigated in previous works of author (DAN USSR, 1980, vol.255, no.6; Mat.zametki, 1982, vol.32, 4, p.517). The problem is reduced to asymptotic estimates of Green's function and difference step function. The presentation of solution through resolvent is used. The resolvent matrix is lipschitz-continuous and has unique distinguished eigenvalue, defining asymptotic behaviour of Green's function and difference step function. Distinguished eigenvalue is inverse function of characteristic polygon. Using the integral representation of characteristic polygon, we investigate the properties of distinguished eigenvalue.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

Перевод О.С.Виноградовой.