сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5-82-663

А.Двуреченский

О ЧИСЛЕ НАБЛЮДАЕМЫХ ТРЕБОВАНИЙ, ОБСЛУЖЕННЫХ ЗА ПЕРИОД ЗАНЯТОСТИ СИСТЕМЫ $GI/GI/\infty$

1982

I. Введение

Одним из важнейших вопросов при определении параметра g первичной ионизации стримерных треков в физике высоких энергий является проблема определения числа стримерных разрядов в трековых камерах.

Вдоль траектории движения частицы в магнитном поле камеры появляется цепочка стримерных разрядов, изображение которых можно представить следующей моделью /I,2/: трек (след) частицы состоит из последовательности окружностей со случайными диаметрами и центрами, образующими процесс Пуассона с параметром g.

При этом отдельные стримеры (окружности) сливаются в сгустки, и при визуальном наблюдении структура трека описывается как последовательность сгустков и промежутков между ними.

Как было показано в работе /3/, система массового обслуживания (СМО) вида $E/GI/\infty$ /4/ является удобной моделью для описания изображений стримерных треков. При этом диаметры окружностей можно истолковать как время обслуживания, левые края окружностей – как моменты прибытий в СМО, сгусток – как период занятости. Моменты времени, соответствующие левым краям окружностей, образуют процесс Пуассона с тем же параметром g /I/. Поэтому число стримеров в сгустке равно числу требований, обслуженных за период занятости системы $E/GI/\infty$. Задача определения этого числа была полностью решена в /5/ методом рекуррентных событий для общей СМО типа $GI/GI/\infty$. Использованный метод прост в отличие от метода, примененного в /6/.

При практическом определении числа окружностей в сгустке возникают трудности из-за эффекта полного поглощения некоторых окружностей другими.

В настоящей работе исследуется распределение числа наблюдаемых окружностей в сгустке, т.е. число тех окружностей в сгустке, часть которых не поглощена другой или другими окружностями. Если трактовать времена обслуживания требований как случайные диаметры окружностей, расположенных на (временной) прямой, то задача является частным случаем определения числа наблюдаемых требований, обслуженных за период занятости системы $GI/GI/\infty$.

2. Система GI/GI/∞

Предположим, что в СМО с бесконечным числом каналов обслуживания приходят в моменты $0<\tau_1<\tau_2<\dots<\infty$ единичные требования. Будем считать, что требования обслуживаются по одному и обслуживание n-го требования длится в течение $D_n, n=1,2,\dots$. Последовательности $\{T_n=\tau_n-\tau_{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ $(\tau_0=0)$ и $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ рассматриваются как независимые последовательности взаимно независимых одинаково распределенных положительных случайных величин с функциями распределения

$$F(t) = P(T_1<t),\ t\geq 0,$$
$$H(t) = P(D_1<t),\ t\geq 0$$

соответственно.

Рассмотрим последовательность окружностей с центрами, расположенными на временной прямой, диаметрами, равными временам обслуживания D_n, и левыми краями, соответствующими приходу требований в систему. Будем называть требование наблюдаемым, если в указанной последовательности нет какой-то одной или нескольких окружностей, которые бы ее целиком поглощали.

Обозначим через ν число наблюдаемых требований, обслуженных за период занятости СМО.

Из работ /5,6/ вытекает, что условия

$$a = \int_0^\infty t\,dH(t) < \infty \tag{2.1}$$

и

$$P(T_2>D_1) = \int_0^\infty H(t)\,dF(t) > 0 \tag{2.2}$$

гарантируют конечность числа всех требований, обслуженных за период занятости, и конечность среднего числа.

Пусть $q(t)$ – число занятых каналов в момент t, $P_k(t) = P(q(t)=k)$, $k=0,1,2,\dots$, и пусть $P_0(0)=1$.

Теорема. При выполнении условия (2.2) число наблюдаемых требований, обслуженных за период занятости системы GI/GI/∞, имеет геометрическое распределение

$$P_n = p(1-p)^{n-1},\ n=1,2,\dots, \tag{2.3}$$

где

$$p = \int_0^\infty P_0(t+0)\,dH(t). \tag{2.4}$$

Для среднего числа имеем

$$M(\nu) = 1/p. \tag{2.5}$$

Доказательство. Обозначим через q_n, $n=1,2,\dots$, число требований, обслуживаемых в момент поступления n-го требования. Пусть

$\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ – случайная подпоследовательность всех наблюдаемых требований.

Если обозначить

$$A_n = \{q_{k_{n+1}} = 0\},\ n=1,2,\dots,$$

то

$$P(\nu=1) = P(A_1),$$

$$P(\nu=n) = P(\bar A_1\dots\bar A_{n-1}, A_n),\ n=2,3,\dots$$

(событие $\bar A$ обозначает дополнительное событие к событию A). Ясно, что $P(A_n) = P(T_{k_n-1}+\dots+T_{k_n} > D_{k_{n-1}})$.

Из конструкции событий $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ вытекает, что они рекуррентные по Феллеру /7/, т.е.

$$P(A_{i_n}/A_{i_1}\dots A_{i_{n-1}}) = P(A_{i_n-i_{n-1}})$$

для любого набора индексов:

$$i_1<i_2<\dots<i_n \quad \text{и} \quad n=2,3,\dots.$$

Кроме того, имеет место

$$P(A_n/\bar A_{n-1}) = P(A_n),\ n=2,3,\dots$$

что может быть доказано методом полной математической индукции.

Поэтому рекуррентные события $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ образуют последовательность испытаний Бернулли. Введя обозначение $p=P(A_1)$, получаем формулу (2.3).

Остается доказать (2.4). Используя формулу полной вероятности, имеем

$$p = P(A_1) = P(T_2+\dots T_{k_2} > D_1) = P(q(D_1+0)=0) =$$
$$= \int_0^\infty P(q(t+0)=0)\,dH(t) = \int_0^\infty P_0(t+0)\,dH(t).$$

Теорема доказана.

Для получения вероятности $P_0(t)$ в (2.4) применим следующую лемму.

Лемма. Вероятность $P_0(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$P_0(t) = (1-F(t)) + \int_0^t P_0(t-x)H(t-x)\,dF(x). \tag{2.6}$$

Если обозначим через

$$B_r(t) = \sum_{k=r}^{\infty} \binom{k}{r} P_k(t), \quad r=0,1,2,\ldots,$$

биномиальные моменты, то они могут быть получены с помощью рекуррентных формул:

$$B_0(t) = 1,$$
$$B_r(t) = \int_0^t B_{r-1}(t-x)(1-H(t-x))dm(x) , \qquad (2.7)$$

где $m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x)$ и F_n – n-кратная свертка распределения F .

Решение уравнения (2.6) имеет вид

$$P_0(t) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r B_r(t) . \qquad (2.8)$$

Доказательство. Интегральное уравнение (2.6) и его решение (2.8) получаются как частный случай интегрального уравнения для производящей функции $G(t,z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) z^k , \ |z| \le 1$, как это следует из работы /8/.

Из свойств испытаний Бернулли вытекает следующее простое предельное утверждение, касающееся нормированной случайной величины $p\nu$.

Утверждение. При выполнении условия (2.I) справедливо

$$\lim_{p\to 0} P(p\nu > x) = e^{-x}, \quad x \ge 0 .$$

3. Примеры приложений

Пример I. Постоянное время обслуживания (система $GI/D/\infty$).

Эта модель использовалась в работе /9/ и для пузырьковых камер /10/.

Пусть $D > 0$ – постоянное время обслуживания и $F(D-0) \ne 1$. Тогда

$$p = 1-F(D-0), \qquad (3.I)$$

и число наблюдаемых требований и число всех требований, обслуженных за период занятости, одинаковы.

Изучая предельные свойства, получаем следующие утверждения.

Утверждение I. Пусть $F(D_\infty)=1$ для некоторого $D_{пр.}$ ($D_{пр.}$ может быть и бесконечностью). Если для каждого $0<D<D_{пр.}$ $F(D-0) \ne 1$, то

$$\lim_{D\to D_\infty} P(p\nu > x) = e^{-x} , \quad x \ge 0 .$$

Утверждение 2. Пусть $F_n(t) = F(nt)$ и $F(nD-0) \ne 1$ при всех $n=1,2,\ldots$. Если ν_n – число наблюдаемых требований в системе $GI/D/\infty$ с функцией распределения входа $F_n(t)$ и $p_n = 1-F(nD-0)$, то

$$\lim_{n\to\infty} P(p_n \nu_n > x) = e^{-x} , \quad x \ge 0 .$$

Пример 2. Простейший входной поток (система $E/GI/\infty$). Пусть

$$F(t) = 1-e^{-gt}, \quad t \ge 0 .$$

Тогда из (2.7) вытекает, что

$$p = \int_0^\infty \exp(-g \int_0^t (1-H(x))dx)dH(t) \qquad (3.2)$$

и

$$M(\nu) = 1/p . \qquad (3.3)$$

Следующие утверждения дают предельные распределения числа наблюдаемых требований (условия большой загрузки).

Утверждение 3.

$$\lim_{g\to\infty} P(p\nu > x) = e^{-x}, x \ge 0 .$$

Утверждение 4. Обозначим $H_n(t) = H(t/n)$. Пусть ν_n – число наблюдаемых требований в системе $E/GI/\infty$ с функцией распределения времени обслуживания H_n и p_n – соответствующий параметр из (3.2). Тогда

$$\lim_{n\to\infty} P(p_n \nu_n > x) = e^{-x}, \quad x \ge 0 .$$

В заключение заметим, что число наблюдаемых стримеров в стримерном сгустке имеет геометрическое распределение с параметром p из выражения (3.2).

Литература

I. Кулюкина Л.А. и др. ОИЯИ, Р5-II143, Дубна, 1977.

2. Кадыков Г.М. и др. ОИЯИ, ДI0-70I0, Дубна, 1973.

3. Двуреченский А. и др. ОИЯИ, 5-8I-362, Дубна, 198I.

4. Боровков А.А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. "Наука", М., 1972.

5. Двуреченский А., Ососков Г.А. ОИЯИ, 5-82-63I, Дубна, 1982.

6. Афанасьева Л.Г., Михайлова И.В. Техническая кибернетика, 1978, № 6, с.I06.

7. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.I, "Мир", М., 1967.

8. Takács L. Acta Math. Acad. Scien. Hungar., 1958, 9, N° 1-2, p.166 .

9. Glückstern R.L. Nucl. Instr. Meth., 1966, 45, p.166 .

10. Иоселиани Ц.И., Ососков Г.А. ОИЯИ, I0-8I44, Дубна, 1974.

Рукопись поступила в издательский отдел
9 сентября 1982 года.

Двуреченский А. P5-82-663

О числе наблюдаемых требований, обслуженных за период занятости системы GI/GI/∞

Доказывается, что число наблюдаемых требований, обслуженных за период занятости системы массового обслуживания GI/GI/∞ с бесконечным числом каналов, имеет геометрическое распределение. Параметр этого распределения определен. Кроме того, доказано, что нормированные распределения сходятся к показательному. В частном случае имеем, что распределение числа непоглощенных стримеров в стримерном сгустке является геометрическим.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Dvurecenskij A. P5-82-663

On the Number of Observable Customers, Served During the Busy Period of GI/GI/∞ Queue

It is proved that the number of observable customers, served during the busy period of the GI/GI/∞ queue with infinitely many servers has a geometric distribution. The parameter of this distribution is determined, too. It is shown that the normalized distributions converge to the exponential distribution. As a particular result is obtained that the distribution of the number of nonabsorbing streamers in a streamer blob has a geometric distribution.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

Перевод О.С.Виноградовой.