сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна



P5-82-662

А.Двуреченский

# О ПЕРИОДЕ ЗАНЯТОСТИ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ

1982

## I. Введение

Одним из актуальных вопросов обработки экспериментальной информации, получаемой при использовании стримерных камер в физике высоких энергий, является проблема определения первичной ионизации треков событий по оцифрованным данным измерения.

Как было показано в работе [I], система массового обслуживания с бесконечным числом каналов обслуживания вида [2]

$$\langle E, 1, GI/\infty, 1 \rangle \tag{I.I}$$

является удобной моделью для описания изображений стримерных треков. Длину сгустка можно истолковать как период занятости системы (I.I), промежутки между сгустками - как период простоя, длину между двумя соседними левыми краями сгустков - как цикл системы.

Поскольку при любом автоматизированном измерении реальных стримерных треков происходит дискретизация их изображений, то естественно возникает проблема точного математического описания системы (I.I) при ее дискретизации по времени.

Задача нахождения закона распределения периода занятости такой дискретизованной системы исследовалась в [I,3] при некоторых упрощениях (верных, напр., для постоянного времени обслуживания). В работе[4] была решена эта задача без каких-либо ограничений. Были получены рекуррентные формулы, позволяющие вычислять искомые вероятности.

Сложный вид формул из работы[4] не позволил определить другие основные характеристики, такие, как средняя длина, преобразования Лапласа периода занятости и цикла. В настоящей работе эти задачи решены методом рекуррентных событий, описанных в [5]. Кроме того, исследуются те же характеристики для системы массового обслуживания вида $\langle E, GI, GI/\infty, GI \rangle$, где вход имеет дискретное геометрическое распределение.

## 2. Системы $\langle E, GI, GI/\infty, GI \rangle$ с дискретным входом

Будем предполагать, что имеем систему массового обслуживания вида

$$\langle E, GI, GI/\infty, GI \rangle \quad /2/ \tag{2.1}$$

с бесконечным числом каналов обслуживания. В систему в моменты $0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \infty$ поступает поток требований партиями с объемами $\nu_1, \nu_2, \ldots$ . На обслуживание каждого требования в партии потребуется время $\chi_{n,i} (1 \le i \le \nu_n, n=1,2,\ldots)$.

Предполагается, что случайные величины $\{\tau_n - \tau_{n-1}\}_{n=2}^{\infty}$, $\{\nu_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\chi_{n,i}, 1 \le i \le \nu_n\}_{n=1}^{\infty}$ являются взаимно независимыми и

$F(t) = P(\tau_n - \tau_{n-1} < t),\ n=2,3,\ldots,$

$p_k = P(\nu_n = k), k=1,2,\ldots, n=1,2,\ldots,$

$H(t) = P(\chi_{n,i} < t), 1 \le i \le \nu_n, n=1,2,\ldots$ .

Обозначение $\langle E, 1, GI/\infty, 1 \rangle$ говорит о том, что требования приходят в систему по одному. Для наших целей достаточно использовать эту систему, так как (2.1) легко к ней сводится (см. ниже).

В дальнейшем будем предполагать, что система

$$\langle E, 1, GI/\infty, 1 \rangle \tag{2.2}$$

имеет геометрическое распределение входного потока, т.е.

$$P(\tau_n - \tau_{n-1} = kh) = (1-p)p^{k-1}, \quad k \ge 1, n \ge 2, \tag{2.3}$$

для некоторого $h > 0$ и $0 < p < 1$ .

Обозначим через $\nu$ число требований, обслуженных за период занятости системы (2.2), $\varphi(z)$ – его производящую функцию, т.е.

$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\nu = n) z^n = \sum_{n=1}^{\infty} P_n z^n, \quad |z| \le 1$ .

Из результатов работы /5/ имеем следующее утверждение:

$$P_n = P(A_n) - \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i) P_{n-i}, \quad n=1,2,\ldots, \tag{2.4}$$

где

$$P(A_n) = ((1-p)/p)^{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} p^k \sum_{1 \le k_1 < \cdots < k_n < k} \prod_{j=1}^{n} H(hk_j) \tag{2.5}$$

$n = 0,1,2,\ldots$ ,

и

$$\varphi(z) = 1 - 1/f(z), \quad |z| \le 1, \tag{2.6}$$

здесь

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(A_n) z^n .$$



События $A_n = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} (\chi_i < \tau_n - \tau_i) \right\}$, $n=1,2,\ldots$ , из (2.5) являются рекуррентными по Феллеру /6/. Можно доказать, что среднее значение $M(\nu)$ конечно тогда и только тогда, когда /5,7/

$$a = \int_0^{\infty} t \, dH(t) < \infty . \tag{2.7}$$

В этом случае

$$M(\nu) = 1/\lim P(A_n) \tag{2.8}$$

и

$$\lim_n P(A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_n , \tag{2.9}$$

где $B_0 = 1$,

$$B_n = (1-p)^n \sum_{1 \le k_1 < \cdots < k_n} \prod_{j=1}^{n} (1 - H(hk_j)), \quad n \ge 1, \tag{2.10}$$

как вытекает из работы /8/.

Исходя из общей теории /5/ найдем преобразование Лапласа $\phi_T(s)$ цикла T-расстояния между левыми краями двух соседних периодов занятости. Тогда $T = B + L$ , где B – период занятости и $L$ – период простоя.

Пусть

$$a(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dF(t) = (1-p)e^{-sh}/(1-e^{-sh}p), \quad s \ge 0,$$

$$F^*(t,s) = a^{-1}(s) \int_0^{t} e^{-sx} dF(x), \quad t \ge 0,$$

тогда $F^*$ есть геометрическое распределение с параметром

$p^* = pe^{-sh}$

и

$\phi_T(s) = M(e^{-sT}) = \varphi^*(a(s))$ .

Здесь звездочка $*$ обозначает производящую функцию (2.6) для параметра $p^*$ . Поэтому

$$\phi_T(s) = 1 - pe^{-sh} \left\{ (1-e^{-sh}) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-p}{p}\right)^n \sum_{k=n+1}^{\infty} p^k e^{-shk} \times \right. \tag{2.11}$$

$$\left. \times \sum_{1 \le k_1 < \cdots < k_n < k} \prod_{j=1}^{n} H(hk_j) \right\}^{-1},$$

$$M(T) = M(\nu)/(1-p), \tag{2.12}$$

где $M(\nu)$ определяется по формуле (2.8).

Предположим, что распределение времени обслуживания есть дискретное с тем же шагом дискретизации $h > 0$ . Тогда период простоя L имеет геометрическое распределение с параметром $p$ . Учитывая независимость периодов простоя и занятости, можно доказать, что для преобразования Лапласа имеет место $\phi_B(s) = \phi_T(s) a^{-1}(s)$ .

Из (2.11) вытекает

$$\varnothing_B(s) = e^{sh}(1-pe^{-sh})/(1-p) - \\ - \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-p}{p}\right)^{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} p^k e^{-skh} \sum_{1 \le k_1 < \dots < k_n < k} \prod_{j=1}^{n} H(hk_j) \right\}^{-1} \tag{2.13}$$

и

$$M(B) = (M(\nu)-1)/(1-p) . \tag{2.14}$$

Пусть теперь $\langle E, GI, GI/\infty, GI \rangle$ – система с групповым прибытием требований и с функцией распределения времени обслуживания $H$. Положим $\tilde{H}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k H^k(t)$. Тогда $\tilde{H}$ – функция распределения времени обслуживания системы $\langle E, 1, GI/\infty, 1 \rangle$ с первоначальным входом. В этих двух системах периоды занятости, простоя и циклы одинаковы. Поэтому соответствующие преобразования Лапласа можно получить из (2.13) и (2.11), заменяя $H$ на $\tilde{H}$.

## 3. Дискретизованная система обслуживания

Цель этой части – определение основных характеристик периода занятости системы $\langle E, GI, GI/\infty, GI \rangle$ /4/. Эта система получилась дискретизацией начальной системы $\langle E, 1, GI/\infty, 1 \rangle$, в которой вход имеет экспоненциальное распределение с параметром $g > 0$:

$$F(t) = 1 - e^{-gt}, \quad t \ge 0 , \tag{3.1}$$

и функцию распределения времени обслуживания $H$. Подробное описание дискретизации можно найти в работах /1,3,4/.

Из /4/ вытекает, что в этой системе

$$P(\tilde{\tau}_n - \tilde{\tau}_{n-1} = kh) = (1-p)p^{k-1}, \quad k \ge 1, \quad n \ge 2 ,$$

где

$$p = e^{-gh} , \tag{3.2}$$

$$P(\tilde{\nu}_n = k) = p(-\ln p)^k/((1-p)k!), \quad k \ge 1, \quad n \ge 1 ,$$

$$P(\tilde{\chi}_n = kh) = 1/h \int_{-S_0 h}^{(1-S_0)h} \{ H(h(k+S_0)-u) - H(h(k-1+S_0)-u \} \, du , \\ k \ge 1, \quad n \ge 1 . \tag{3.3}$$

Здесь $S_0$ – сагитта /4/ и $\tilde{\tau}, \tilde{\nu}, \tilde{\chi}$ – соответствующие случайные величины дискретизованной системы.



Пусть $H_1(t)$ – функция распределения времени обслуживания системы после дискретизации. Из (3.3) имеем

$$H_1(t) = 1/h \int_{-S_0 h}^{(1-S_0)h} \{ H(h([t/h]+S_0)-u) - H(h(S_0-1)-u \} \, du ,$$

где $[x]$ – целая часть $x$,

$$\tilde{H}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k H^k(t) = \frac{p}{1-p} (e^{-\ln p \cdot H_1(t)} - 1) .$$

Заменяя $H$ в (2.5) на $\tilde{H}$, получаем

$$P(A_n) = \left(\frac{1-p}{p}\right) \sum_{k=n+1}^{\infty} p^k \sum_{1 \le k_1 < \dots < k_n < k} \prod_{j=1}^{n} (e^{-\ln p \, H_1(hk_j)} - 1) , \tag{3.4}$$

$$n = 0, 1, 2, \dots .$$

Преобразования Лапласа периода занятости $B$ и цикла $T$ определяются выражениями

$$\varnothing_B(s) = \frac{1-pe^{-sh}}{(1-p)e^{-sh}} - \frac{p(1-pe^{-sh})}{(1-p)^2 e^{-sh}} \times \\ \times \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(1-p)\, e^{-sh}}{p(1-pe^{-sh})} \right\}^{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} p^k e^{-shk} \times \right. \\ \left. \times \sum_{1 \le k_1 < \dots < k_n < k} \prod_{j=1}^{n} (e^{-\ln p \cdot H_1(hk_j)} - 1) \right\}^{-1} , \tag{3.5}$$

$$\varnothing_T(s) = \varnothing_B(s) \frac{(1-p)e^{-sh}}{(1-e^{-sh})p} . \tag{3.6}$$

Для среднего значения периода занятости имеем

$$M(B) = (1/\lim_{n} P(A_n) - 1)/(1-p) . \tag{3.7}$$

Из вышесказанного следует, что если $\int_0^{\infty} t dH_1(t) < \infty$, то $M(B) < \infty$. Действительно, учитывая условие (2.7), получаем, что

$$0 \le \int_0^{\infty} t d\tilde{H}(t) = \frac{-p}{1-p} \ln p \int_0^{\infty} t e^{-\ln H_1(t)} dH_1(t) \le \\ \le - \frac{\ln p}{1-p} \int_0^{\infty} t dH_1(t) < \infty .$$

В зависимости от шага дискретизации h преобразование Лапласа периода занятости есть функция от $h: \emptyset_B(s) = \emptyset_{B_h}(s)$. В предельном переходе при $h \to 0$ имеем

$$\lim_{h\to 0} \emptyset_{B_h}(s) = 1 + \frac{s}{g} - \frac{1}{g}\left\{\int_0^\infty e^{-st} e^{-g\int_0^t (1-H(x))dx}\, dt\right\}^{-1}, \qquad (3.8)$$

аналогично для $M(B) = M(Bh)$ :

$$\lim_{h\to 0} M(B_h) = 1/g(e^{ga}-1), \qquad (3.9)$$

где $a$ определено в (2.7).

На самом деле в /4/ доказана слабая сходимость распределений дискретизованных периодов занятости к распределению недискретизованного периода занятости системы $< E,1,GI/\infty,1 >$. Поэтому соответствующие преобразования Лапласа сходятся к преобразованию Лапласа недискретизованного периода занятости. Аналогичное свойство справедливо для средних значений.

В заключение заметим, что формулы (3.5), (3.7)-(3.9) описывают преобразования Лапласа и средние значения длин сгустков как после дискретизации, так и до нее.

## Литература


1. Двуреченский А. и др. ОИЯИ, 5-81-362, Дубна, 1981.
2. Боровков А.А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. "Наука", М., 1972.
3. Кулюкина Л.А. и др. ОИЯИ, Р5-11143, Дубна, 1977.
4. Dvurečenskij A. et al. JINR,E10-82-136, Dubna, 1982.
5. Двуреченский А., Ососков Г.А. ОИЯИ, 5-82-631, Дубна, 1982.
6. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее применения. Т.I, "Мир", М., 1967.
7. Афанасьева Л.Г., Михайлова И.В. Техническая кибернетика, 1978,№6, с.88.
8. Takács L.RAIRO Rech.Oper.,1980,14,N°2,p.109 .



Рукопись поступила в издательский отдел
9 сентября 1982 года.

## ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

| Индекс | Тематика |
|---|---|
| 1. | Экспериментальная физика высоких энергий |
| 2. | Теоретическая физика высоких энергий |
| 3. | Экспериментальная нейтронная физика |
| 4. | Теоретическая физика низких энергий |
| 5. | Математика |
| 6. | Ядерная спектроскопия и радиохимия |
| 7. | Физика тяжелых ионов |
| 8. | Криогеника |
| 9. | Ускорители |
| 10. | Автоматизация обработки экспериментальных данных |
| 11. | Вычислительная математика и техника |
| 12. | Химия |
| 13. | Техника физического эксперимента |
| 14. | Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами |
| 15. | Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях |
| 16. | Дозиметрия и физика защиты |
| 17. | Теория конденсированного состояния |
| 18. | Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники |
| 19. | Биофизика |

Двуреченский А. P5-82-662
О периоде занятости дискретной системы обслуживания

Методом рекуррентных событий исследуются производящая функция, среднее число и распределение числа требований, обслуженных за период занятости системы массового обслуживания $GI/GI/GI/\infty$ с дискретным входом и бесконечным числом каналов. В случае простейшего входного потока и дискретных времен обслуживания определяются преобразования Лапласа периода занятости, цикла и их средние значения. Как частный результат получены средние значения и преобразования Лапласа дискретной длины стримерного сгустка.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Dvurecenskij A. P5-82-662
On the Busy Period of Discretization Queuing System

By the method of recurrent events the reproducing function, the mean value, and the distribution of the number of customers, served during the busy period of a queueing system $GI/GI/GI/\infty$ with a discretized input and infinitely many servers are investigated. In the case of the simplest flow and the discrete service time, the Laplace transforms and the mean values of the busy period and their cycle are determined. As a particular result the mean value and the Laplace transform of the discretized streamer blob length are obtained.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

Перевод О.С.Виноградовой.