сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

2/83

3/1-83

Р5-82-658

Ву Суан Минь

ДОСТИЖИМОСТЬ, НАБЛЮДАЕМОСТЬ И МИНИМАЛЬНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ НЕОДНОРОДНЫХ БИЛИНЕЙНЫХ И ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

1982

1. Введение

В работах[1,2] были получены условия достижимости, наблюдаемости и минимальной реализации билинейных (однородных) дискретных динамических систем. В предлагаемой работе мы будем исследовать эти проблемы для неоднородных билинейных и линейных дискретных динамических систем с помощью результатов, полученных в[1,2]. Для этого будет вводиться понятие бимодели, т.е. однородной билинейной модели, неоднородных билинейных и линейных дискретных динамических систем.

Напомним, что до сих пор в теории неоднородных билинейных дискретных динамических систем проблемы достижимости, наблюдаемости и минимальной реализации решены только для систем с одномерными входным и выходным пространствами при нулевом начальном состоянии[3-5], а в теории линейных дискретных динамических систем они решены для систем с многомерными входным и выходным пространствами, но с нулевым начальным состоянием[6-9]. Следовательно, в настоящей работе, в отличие от известных работ[3-9], мы будем исследовать системы с многомерными входным и выходным пространствами при произвольном начальном состоянии.

Все обозначения, используемые в[1,2], сохраняются в данной работе.

2. Неоднородные билинейные дискретные динамические системы

В этом параграфе мы будем устанавливать необходимые и достаточные условия достижимости, наблюдаемости и минимальной реализации неоднородных билинейных дискретных динамических систем с помощью результатов теории однородных билинейных дискретных динамических систем[1,2] на основе понятия бимодели неоднородных билинейных дискретных динамических систем.

Для сокращения мы будем называть неоднородную билинейную дискретную динамическую систему просто неоднородной билинейной системой.

(2.I) Определение

Неоднородной билинейной системой над полем K называется девятка:

$S = \langle T,K,X,U,Y,\emptyset,\alpha,\beta,\gamma \rangle$,

где $T,X,U,Y,\emptyset,\alpha$ и β такие же, как в билинейной системе (2.I) в [I], а $\gamma : U \to X : u \mapsto Cu$ – линейное преобразование векторного пространства U в векторное пространство X с соответствующей матрицей $C \neq 0$. Система определяет одношаговую переходную функцию состояния в пространстве X :

$$x(t+1) = x(t)\alpha + x(t)\beta(v(t)) + \gamma(v(t)) =$$
$$= Ax(t) + \sum_{i=1,\dots,p} v_i(t)B_i x(t) + Cv(t)$$

для всех $t \in T$, $x(t) \in X$ и $v \in U^T$. При этом требуется, чтобы для S существовала реализующая пара (x, η) начального состояния $x \in X$ и линейного выходного отображения $\eta : X \to Y : x \mapsto Dx$ (D – матрица преобразования η), такая, что для любого $v \in V$ удовлетворяется равенство

$S_{x\eta}(v) = \emptyset(v)$,

где $S_{x\eta} : U^T \to Y^T$ – отображение вход-выход системы S с начальным состоянием x и выходным отображением η .

Аналогично билинейной системе переходная функция состояния неоднородной билинейной системы $\lambda : X \times U^T \times T^* \to X$ определяется индукцией по T

$$\lambda(x,v|[0,0)) = x ,$$

$$\lambda(x,v|[0,t+1)) = \lambda(x,v|[0,t))\alpha + \lambda(x,v|[0,t))\beta(v(t)) + \gamma(v(t)) =$$
$$= A\lambda(x,v|[0,t)) + \sum_{i=1,\dots,p} v_i(t)B_i\lambda(x,v|[0,t)) + Cv(t)$$

для всех $x \in X$, $v \in U^T$ и $t \in T$.

Тогда отображение вход-выход $S_{x\eta} : U^T \to Y^T$ определяется выражением

$$S_{x\eta}(v)(t) = \eta(\lambda(x,v|[0,t))) = D\lambda(x,v|[0,t))$$

для любого $v \in U^T$ и $t \in T$.

Заметим, что пространство состояний неоднородной билинейной системы представляет собой алгебру, в которой кроме операций, определенных в пространстве состояний билинейной системы, определены еще нульарные операции $\gamma(u)$ для каждого $u \in U$.

(2.2) Определение

Пусть $S = \langle T,K,X,U,Y,\emptyset,\alpha,\beta,\gamma \rangle$ – неоднородная билинейная система и X' – векторное подпространство пространства X , замкнутое относительно α, β и γ , т.е. $X'\alpha \subseteq X'$, $X'\beta(u) \subseteq X'$ для всех $u \in U$ и $\gamma U \subseteq X'$. Тогда X' называется подпространством состояний пространства X . Если, кроме того, для X' существует реализующая пара, то девятка $S' = \langle T,K,X',U,Y,\emptyset,\alpha',\beta',\gamma' \rangle$, где $\alpha' = \alpha \mid X'$, $\beta'(u) = \beta(u) \mid X'$ и γ' – ограничение цели γ до X' , называется неоднородной билинейной подсистемой системы S .

(2.3) Определение

Билинейным преобразованием неоднородной билинейной системы $S = \langle T,K,X,U,Y,\emptyset,\alpha,\beta,\gamma \rangle$ в неоднородную билинейную систему $S' = \langle T,K,X',U,Y,\emptyset,\alpha',\beta',\gamma' \rangle$ называется такое отображение $f : X \to X'$, которое является линейным преобразованием векторного пространства X в векторное пространство X' и согласовано с α, β и γ , иными словами, f удовлетворяет условиям:

$f(x_1+x_2) = f(x_1)+f(x_2)$ для всех $x_1,x_2 \in X$;

$f(rx) = rf(x)$ для всех $x \in X$ и $r \in K$;

$f(x\alpha) = f(x)\alpha'$ для всех $x \in X$;

$f(x\beta(u)) = f(x)\beta'(u)$ для всех $x \in X$ и $u \in U$;

$f(\gamma(u)) = \gamma'(u)$ для всех $u \in U$.

Если, кроме того, образ отображения f является неоднородной билинейной подсистемой системы S' , то f называется билинейным эквивалентным преобразованием неоднородных билинейных систем.

Очевидно, что билинейное преобразование неоднородных билинейных систем также является алгебраическим гомоморфизмом.

Легко проверить, что все утверждения о билинейных системах и их билинейных преобразованиях, изложенные в параграфе 2 работы [I], справедливы и для неоднородных билинейных систем и их билинейных преобразований.

(2.4) Определение

Пусть $S = \langle T,K,X,U,Y,\emptyset,\alpha,\beta,\gamma \rangle$ – неоднородная билинейная система. Тогда любая билинейная система $S' = \langle T,K,X',U,Y,\emptyset,\alpha',\beta' \rangle$ называется бимоделью (однородной билинейной моделью) неоднородной билинейной системы S .

(2.5) Предложение

Пусть $S = \langle T,K,X,U,Y,\emptyset,\alpha,\beta,\gamma\rangle$ – неоднородная билинейная система. Тогда имеет место ее бимодель $S' = \langle T,K,X',U,Y,\emptyset,\alpha',\beta'\rangle$, где $X' = X \oplus K$, $A' = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B_i' = \begin{bmatrix} B_i & C_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ для всех $i=1,\dots p$ (C_i – i -й столбец матрицы $C=[C_1,C_2,\dots,C_p]$). При этом для любого $x \in X$, $v \in U^T$ и $t \in T$ выполняется равенство $\lambda'(x',v|[0,t)) = \begin{bmatrix} \lambda(x,v|[0,t)) \\ 1 \end{bmatrix}$, где $x' = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$, и для произвольной реализующей пары (x, η) состояния $x \in X$ и линейного выходного отображения η с соответствующей матрицей D системы S имеет место равенство $S_{x\eta} = S'_{x'\eta'}$ (где $x' = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$, $D' = [D0]$ – матрица преобразования η').

Доказательство

Сначала докажем индукцией по t, что для любого $x \in X$, $v \in U^T$ и $t \in T$ $\lambda'(x',v|[0,t)) = \begin{bmatrix} \lambda(x,v|[0,t)) \\ 1 \end{bmatrix}$. При $t=0$ имеем $\lambda'(x',v|[0,0)) = x' = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda(x,v|[0,0)) \\ 1 \end{bmatrix}$. Если равенство выполняется для некоторого t, то для момента $t+1$ имеем $\lambda'(x',v|[0,t+1)) =$
$$= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda(x,v|[0,t)) \\ 1 \end{bmatrix} + \sum_{i=1,\dots,p} v_i(t) \begin{bmatrix} B_i & C_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda(x,v|[0,t)) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\lambda(x,v|[0,t)) \\ 1 \end{bmatrix} +$$
$$+ \begin{bmatrix} \sum_{i=1,\dots,p} v_i(t) B_i \lambda(x,v|[0,t)) + Cv(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda(x,v|[0,t+1)) \\ 1 \end{bmatrix}.$$
Следовательно, по индукции $\lambda'(x',v|[0,t)) = \begin{bmatrix} \lambda(x,v|[0,t)) \\ 1 \end{bmatrix}$ для любого $t \in T$. Тогда $S'_{x'\eta'} = S_{x\eta}$, так как для любого $v \in U^T$ и $t \in T$
$$S'_{x'\eta'}(v)(t) = [D0] \begin{bmatrix} \lambda(x,v|[0,t)) \\ 1 \end{bmatrix} = D\lambda(x,v|[0,t)) = S_{x\eta}(v)(t).$$
В частности, если (x, η) – реализующая пара системы S, то $S'_{x'\eta'}(v) = S_{x\eta}(v) = \emptyset(v)$ для всех $v \in V$. Таким образом, S' является бимоделью неоднородной системы S с реализующей парой (x', η'). □

В дальнейшем под бимоделью неоднородной билинейной системы мы будем подразумевать ее бимодель, построенную в предложении (2.5).

(2.6) Теорема

Пусть $S = \langle T,K,X,U,Y,\emptyset,\alpha,\beta,\gamma\rangle$ – неоднородная билинейная система и $S' = \langle T,K,X',U,Y,\emptyset,\alpha',\beta'\rangle$ – ее бимодель. Тогда система S достижима из состояния $x \in X$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

(I) Система S' достижима из состояния $x' = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \in X'$, т.е. $\operatorname{rank}[\Psi x'] = \dim X \oplus K$, где $[\Psi x']$ – матрица достижимого преобразования состояния x' бимодели S'.

(2) $\operatorname{rank}[\Psi x'] = \dim X$ и для n некоторых линейно независимых состояний $x'_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ 1 \end{bmatrix}, \dots, x'_n = \begin{bmatrix} x_n \\ 1 \end{bmatrix}$, достижимых из состояния x' (где $n = \dim X$), векторы $x_1,\dots,x_n$ линейно независимы.

Доказательство.

Пусть система S достижима из состояния x, т.е. существует n линейно независимых состояний $x_1,x_2,\dots,x_n$, достижимых из состояния x. Тогда по (2.5) $\begin{bmatrix} x_1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ 1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} x_n \\ 1 \end{bmatrix}$ являются достижимыми из $x' = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$ для бимодели S'. Очевидно, что они также линейно независимы. Предположим, что мы выбираем векторы $x_1,x_2,\dots,x_n$ в качестве нового базиса пространства X. Если среди достижимых состояний R_x существует хоть одно состояние $\bar{x}$, такое, что сумма ее координат в новом базисе не равна единице (т.е. $\bar{x} = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ и $\lambda_1 + \dots + \lambda_n \neq 1$), то вектор $\begin{bmatrix} \bar{x} \\ 1 \end{bmatrix}$ линейно не зависит от $\begin{bmatrix} x_1 \\ 1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} x_n \\ 1 \end{bmatrix}$ и по (2.5) $\begin{bmatrix} \bar{x} \\ 1 \end{bmatrix} \in R_{x'}$. Следовательно, среди достижимых состояний $R_{x'}$ существует $n+1$ линейно независимых состояний. Таким образом, выполняется (I). Если для каждого $\bar{x} \in R_x$ сумма ее координат в новом базисе равна единице, то каждое состояние $\begin{bmatrix} \bar{x} \\ 1 \end{bmatrix} \in R_{x'}$ линейно зависит от состояний $\begin{bmatrix} x_1 \\ 1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} x_n \\ 1 \end{bmatrix}$. Отсюда выполняется условие (2).

Пусть, наоборот, выполняется условие (I), т.е. существует $n+1$ линейно независимых состояний $x'_1,x'_2,\dots,x'_{n+1} \in R_{x'}$. Тогда по (2.5) имеем $x'_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ 1 \end{bmatrix}, \dots, x'_{n+1} = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ 1 \end{bmatrix}$, где $x_1,\dots,x_{n+1} \in R_x$. Очевидно, что среди $x_1,\dots,x_{n+1}$ один вектор является линейно зависимым от остальных, так как $\dim X = n$. Пусть таким вектором является x_{n+1}. Тогда $x_1,\dots,x_n$ являются линейно независимыми, так как иначе $x'_1,\dots,x'_{n+1}$ являются линейно зависимыми. Следовательно, система S достижима из состояния x.

Пусть, в другом случае, выполняется условие (2). Тогда по (2.5) $x_1,\dots,x_n$ являются линейно независимыми состояниями, достижимыми из x. Следовательно, система S достижима из x. □

(2.7) Следствие

Неоднородная билинейная система S достижима из нулевого состояния тогда и только тогда, когда ее бимодель S' достижима из состояния $x' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, т.е. $\operatorname{rank}\left[\Psi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)\right] = \dim X \oplus K$.

Доказательство

Если $x_1,\dots,x_n$ – линейно независимые достижимые состояния из нулевого состояния системы S, то $\begin{bmatrix} x_1 \\ 1 \end{bmatrix}, \dots \begin{bmatrix} x_n \\ 1 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ линейно независимы. □

Для проверки условия (2) теоремы (2.6) достаточно выбрать произвольные линейно независимые состояния $x'_1,\dots,x'_n \in R_{x'}$. Это вытекает из следующего

(2.8) Предложение

Пусть S – неоднородная билинейная система, S' – ее бимодель и $\operatorname{rank}[\Psi_{X'}] = \dim X$, где $x' = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$ и $x \in X$. Тогда если для некоторого n линейно независимых состояний $x_1' = \begin{bmatrix} x_1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ldots, x_n' = \begin{bmatrix} x_n \\ 1 \end{bmatrix} \in R_{x'}$, векторы $x_1, \ldots, x_n$ линейно независимы, то для любого n линейно независимых состояний $\bar{x}_1' = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ldots, \bar{x}_n' = \begin{bmatrix} \bar{x}_n \\ 1 \end{bmatrix} \in R_{x'}$, векторы $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ также линейно независимы.

Доказательство

По (2.5) для любого $\bar{x} \in R_x$ имеем $\begin{bmatrix} \bar{x} \\ 1 \end{bmatrix} \in R_{x'}$. По условию $\begin{bmatrix} \bar{x} \\ 1 \end{bmatrix}$ может выражаться в виде линейной комбинации $\begin{bmatrix} \bar{x} \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ 1 \end{bmatrix} + \cdots + \lambda_n \begin{bmatrix} \bar{x}_n \\ 1 \end{bmatrix}$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$. Отсюда $\bar{x} = \lambda_1 \bar{x}_1 + \ldots + \lambda_n \bar{x}_n$. Таким образом, $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ порождает X, так как по (2.6) система S достижима. Следовательно, $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ линейно независимы. □

(2.9) Определение

Изолированным состоянием неоднородной билинейной системы S с выходным линейным отображением η называется такое не нулевое состояние $x \in X$, при котором $R_x = \{x\}$ и $\eta(x) = 0$.

(2.10) Предложение

Состояние $x \in X$ является изолированным тогда и только тогда, когда $Ax = x$, $[B_1 x, \ldots, B_p x] + C = 0$ и $\eta(x) = 0$.

Доказательство

Пусть x изолировано. Тогда $\lambda(x, v | [0,t)) = x$ для любой $v \in U^T$ и $t \in T$. Для $v \in U^T$, такой, что $v(0) = 0$, имеем $x = \lambda(x, v | [0,1)) = Ax$. Отсюда для любого $u \in U$ $x = x + \sum_{i=1,\ldots,p} u_i B_i x + Cu$, т.е. $([B_1 x, \ldots, B_p x] + C) u = 0$. Таким образом, $[B_1 x, \ldots, B_p x] + C = 0$. Докажем обратное, $\lambda(x, v | [0,t)) = Ax = x$ для любого $v \in U^T$ и $t \in T$, т.е. $R_x = \{x\}$. □

Очевидно, что для проверки существования изолированных состояний достаточно проверить собственные векторы матрицы A.

(2.11) Теорема

Пусть $S = \langle T, K, X, U, Y, \emptyset, \alpha, \beta, \gamma \rangle$ – неоднородная билинейная система, η – произвольное ее линейное выходное отображение с соответствующей матрицей D и для них не существует изолированное состояние. Тогда система S наблюдаема с выходом η тогда и только тогда, когда ее бимодель S' наблюдаема с линейным выходным отображением η', которому соответствует матрица $D' = [D0]$, т.е. $\operatorname{rank}[S'_{\eta'}] = \dim X \oplus K$, где $[S'_{\eta'}]$ – матрица наблюдаемого преобразования бимодели S'.

Доказательство

Пусть S наблюдаема с выходом η. Тогда по (2.5) для любых $x_1, x_2 \in X$ $(x_1 \neq x_2)$ имеем $S'_{x_1' \eta'} = S_{x_1 \eta} \neq S_{x_2 \eta} = S'_{x_2' \eta'}$, где $x_1' = \begin{bmatrix} x_1 \\ 1 \end{bmatrix}$ и $x_2' = \begin{bmatrix} x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Следовательно, $\dim X \leq \dim X^*$, где X^* – пространство состояний наблюдаемой системы S^*, построенной по бимодели S'. Покажем, что в системе S не существует состояние x, такое, что $S_{x\eta} = 0$. Действительно, предположим противное. Тогда по условию $R_x \neq \{x\}$ (очевидно также, что $R_0 \neq \{0\}$) и $S_{\bar{x}\eta} = 0$ для всех состояний $\bar{x} \in R_x$, т.е. система S не наблюдаема, что противоречит наблюдаемости системы S. Итак, в системе S не существует состояние x, такое, что $S_{x\eta} = 0$. В то же время в бимоделе S' для нулевого состояния имеем $S'_{0\eta'} = 0$. Отсюда $\dim X < \dim X^*$, т.е. $n < \dim X^* \leq n+1$. Таким образом, $\dim X^* = n+1$ и по (2.5) в [2] бимодель S' наблюдаема с выходом η'.

Докажем обратное. Если бимодель S' наблюдаема с выходом η', то по (2.5) для любых $x_1, x_2 \in X$ $(x_1 \neq x_2)$ $S_{x_1 \eta} = S'_{x_1' \eta'} \neq S'_{x_2' \eta'} = S_{x_2 \eta}$, где $x_1' = \begin{bmatrix} x_1 \\ 1 \end{bmatrix}$ и $x_2' = \begin{bmatrix} x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Следовательно, система S наблюдаема с выходом η. □

Во второй части доказательства не используется условие отсутствия изолированного состояния. Следовательно, имеем

(2.12) Предложение

Пусть S' – бимодель неоднородной билинейной системы S и η' – линейное выходное отображение бимодели S', соответствующее линейному выходному отображению η системы S. Тогда если $\operatorname{rank}[S'_{\eta'}] = \dim X \oplus K$, то система S наблюдаема с выходом η. □

(2.13) Определение

Неоднородная билинейная система S называется минимальной тогда и только тогда, когда для любой ее реализующей пары (x, η) она достижима из x и наблюдаема с η.

(2.14) Теорема

Пусть $S = \langle T, K, X, U, Y, \emptyset, \alpha, \beta, \gamma \rangle$ – неоднородная билинейная система, для которой отсутствует изолированное состояние при любом ее допустимом линейном выходном отображении, и $S' = \langle T, K, X', U, Y, \emptyset, \alpha', \beta' \rangle$ – ее бимодель. Тогда система S минимальна тогда и только тогда, когда для любой ее реализующей пары (x, η) выполняется одно из следующих условий:

(1) $\operatorname{rank} \mathcal{H}(x', \eta') = \dim X \oplus K$, где $\mathcal{H}(x', \eta') = [S_{\eta'}][\Psi_{X'}]$, $x' = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$ и $D' = [D0]$ – матрица преобразования η',

(2) $\operatorname{rank} \mathcal{H}(x', \eta') = \dim X$, $\operatorname{rank}[S_{\eta'}] = \dim X \oplus K$ и для некоторого n линейно независимых состояний $x_1' = \begin{bmatrix} x_1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ldots, x_n' = \begin{bmatrix} x_n \\ 1 \end{bmatrix}$, достижимых из состояния x' (где $n = \dim X$), векторы $x_1, \ldots, x_n$ линейно независимы.

Доказательство

Пусть система S минимальна. Тогда она наблюдаема с η, следовательно, по (2.II) $\mathrm{rank}\,[S_{\eta'}] = \dim X \oplus K$, и она достижима из x, следовательно, выполняется одно из двух условий теоремы (2.6). Если выполняется условие (I) теоремы (2.6), т.е. $\mathrm{rank}\,[\Psi_{x'}] = \dim X \oplus K$, где $x' = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$, тогда по (3.9) в /I/ и (2.5) в /2/ бимодель S' достижима из x' и наблюдаема с η'. Отсюда бимодель S' минимальна и по (3.2) в /2/ $\mathrm{rank}\,\mathcal{H}(x', \eta') = \dim X \oplus K$. Если выполняется условие (2) теоремы (2.6), то по (3.9) в /I/ $\mathrm{rank}\,[\Psi_{x'}] = \dim X$. Кроме того, по (2.5) в /2/ $S_{\eta'}$ является изоморфным. Следовательно, $\mathrm{rank}\,\mathcal{H}(x', \eta') = \mathrm{rank}\,[S_{\eta'}][\Psi_{x'}] = \mathrm{rank}\,[\Psi_{x'}] = \dim X$ и выполняется условие (2) теоремы (2.I4).

Докажем обратное. Пусть выполняется одно из двух условий теоремы (2.4). Если выполняется условие (I), то $\mathrm{rank}\,[\Psi_{x'}] = \mathrm{rank}\,[S_{\eta'}] = \dim X \oplus K$ и по (2.6) и (2.II) система S достижима из x и наблюдаема с η, т.е. она минимальна. Если выполняется условие (2), то по (2.II) система S наблюдаема с выходом η и по (2.5) система S достижима из состояния x. Таким образом, система S минимальна. □

(2.I5) Следствие

Пусть $S = \langle T, K, X, U, Y, \emptyset, \alpha, \beta, \gamma \rangle$ — неоднородная билинейная система с нулевым начальным состоянием, т.е. для нее существует реализующая пара $(0, \eta)$, и для нее отсутствует изолированное состояние при любом ее допустимом линейном выходном отображении. Тогда система S минимальна тогда и только тогда, когда для любого допустимого линейного выходного отображения η выполняется равенство $\mathrm{rank}\,\mathcal{H}(x', \eta') = \dim X \oplus K$, где $\mathcal{H}(x', \eta') = [S_{\eta'}][\Psi_{x'}]$, $x' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ и $D' = [D0]$ — матрица преобразования η'.

Доказательство

Очевидно, что подпространство состояний, порождаемое нулевым состоянием, является наименьшим подпространством состояний. Следовательно, пространство достижимости нулевого состояния является наименьшим подпространством состояний пространства X. Таким образом, если система S достижима из нулевого состояния, то она достижима из любого состояния. Следовательно, по (2.7), (2.II), (3.9) в /I/ и (2.5) в /2/ имеем $\mathrm{rank}\,\mathcal{H}(x', \eta') = \dim X \oplus K$. □

3. Линейные дискретные динамические системы

Линейные дискретные динамические системы составляют подкласс неоднородных билинейных дискретных динамических систем, когда $\beta = 0$, поэтому мы можем получить теоремы достижимости, наблюдаемости и минимальной реализации линейных дискретных динамических систем непосредственно из теорем, доказанных в параграфе 2, приравнив $\beta = 0$, т.е. $B_1 = B_2 = \ldots = B_p = 0$. Кроме того, учитывая особенности линейных систем, мы получим некоторые упрощения.

В этом параграфе для сокращения мы будем называть линейную дискретную динамическую систему просто линейной системой.

(3.I) Определение

Линейной системой называется неоднородная билинейная система с нулевым преобразованием $\beta = 0$, т.е. восьмерка

$S = \langle T, K, X, U, Y, \emptyset, \alpha, \gamma \rangle$,

где все элементы такие же, как в определении (2.I) при $B_1 = B_2 = \ldots = B_p = 0$.

(3.2) Теорема

Пусть $S = \langle T, K, X, U, Y, \emptyset, \alpha, \gamma \rangle$ — линейная система, $x \in X$ и (R_x) — пространство достижимости состояния x. Тогда справедливы следующие условия:

(I) Если для некоторого числа m $\mathrm{rank}[C', AC', \ldots, A^m C'] = \mathrm{rank}[C', AC', \ldots, A^{m+1} C']$, где $C' = [x, C]$, то $\dim(R_x) = \mathrm{rank}[C', AC', \ldots, A^m C']$ и среди чисел $0, 1, \ldots, n-1$ существует такое число m.

(2) Система S достижима из состояния x тогда и только тогда, когда существует число $m \leq n-1$, такое, что

$\mathrm{rank}[C', AC', \ldots, A^m C'] = \dim X = n$.

Доказательство

Рассмотрим матрицу достижимого преобразования состояния $x' = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$ бимодели S' линейной системы S: $[\Psi_x] = [x', B_1'x', \ldots, B_p'x', A'x', B_1'B_2'x', \ldots, B_{p-1}'B_p'x', B_1A'x', \ldots, B_p'A'x', A'B_1'x', \ldots, A'B_p'x', A^{2\prime}x', \ldots]$.

Из свойств $x' = \begin{bmatrix} x_1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $A' = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ и $B_i' = \begin{bmatrix} 0 & c_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $(i = 1, \ldots, p)$ имеем $(A')^k x' = \begin{bmatrix} A^k x \\ 1 \end{bmatrix}$ для всех $k \in N$, $B_i'x' = \begin{bmatrix} c_i \\ 0 \end{bmatrix}$, $B_i'A' = B_i'$, $B_i'B_j' = 0$ для всех $i, j = 1, \ldots, p$. Подставляя их в $[\Psi_{x'}]$, получим

$$[\Psi_{x'}] = \begin{bmatrix} x & c_1 \ldots c_p & Ax & Ac_1 \ldots Ac_p & A^2x & A^2c_1 \ldots A^2c_p \ldots \\ 1 & 0 \ldots 0 & 1 & 0 \ldots 0 & 1 & 0 \ldots 0 \ldots \end{bmatrix}.$$

Пусть $[D_x]$ — матрица, полученная из $[\Psi_{x'}]$ отбрасыванием последней строки, т.е.

$[D_x] = [x, c_1, \ldots, c_p, A_x, Ac_1, \ldots, Ac_p, A^2x, A^2c_1, \ldots, A^2c_p, \ldots]$.

Сейчас мы докажем, что система S достижима из состояния x тогда и только тогда, когда $\operatorname{rank}[D_x] = \dim X$.

Пусть S достижима из x. По (3.9) в /I/ векторы-столбцы матрицы $[\Psi_{x'}]$ порождают пространство достижимости ($R_{x'}$) состояния $x' = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$ бимодели S'. Тогда по (2.5) каждое состояние, достижимое из x, является линейной комбинацией векторов-столбцов матрицы $[D_x]$, т.е. последние порождают (R_x). Следовательно, $\operatorname{rank}[D_x] = \dim X$. Пусть, наоборот, $\operatorname{rank}[D_x] = \dim X$. По (3.9) в /I/ каждый вектор-столбец матрицы $[\Psi_{x'}]$ является линейной комбинацией состояний, достижимых из состояния x' бимодели S'. Тогда по (2.5) каждый вектор-столбец матрицы $[D_x]$ является линейной комбинацией состояний, достижимых из x системы S, т.е. $\operatorname{rank}[D_x] \leqq \dim(R_x) \leqq \dim X = \operatorname{rank}[D_x]$. Отсюда $\dim(R_x) = \dim X$, и система S достижима из x.

Далее аналогично доказательству (3.10) в /I/ получим, что если для некоторого числа m $\operatorname{rank}[D_x]_m = \operatorname{rank}[D_x]_{m+1}$, где $[D_x]_m = [x, C_1, \dots, C_p, A_x, AC_1, \dots, AC_p, \dots, A^m x, A^m C_1, \dots, A C_p]$, то $\dim X = \operatorname{rank}[D_x] = \operatorname{rank}[D_x]_m$ и среди чисел $0, 1, \dots, n-1$ существует такое число. Тем самым доказано (I) и (2). □

В частности, если $x = 0$, то $C' = [0, C]$. Отсюда имеем

(3.3) Следствие

Для любой линейной системы S справедливы следующие условия:

(I) Если для некоторого числа m $\operatorname{rank}[C, AC, \dots, A^m C] = \operatorname{rank}[C, AC, \dots, A^{m+1} C]$, то $\dim(R_0) = \operatorname{rank}[C, AC, \dots, A^m C]$ и среди чисел $0, 1, \dots, n-1$ существует такое число m.

(2) Система S достижима из нулевого состояния тогда и только тогда, когда существует число $m \leqq n-1$, такое, что

$$\operatorname{rank}[C, AC, \dots, A^m C] = \dim X = n .$$ □

(3.4) Теорема

Пусть $S = \langle T, K, X, U, Y, \emptyset, \alpha, \gamma \rangle$ – линейная система и η -некоторое ее линейное выходное отображение с матрицей D. Тогда справедливы следующие условия:

(I) Если для некоторого числа m

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} D \\ DA \\ DA^2 \\ \vdots \\ DA^m \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} D \\ DA \\ DA^2 \\ \vdots \\ DA^{m+1} \end{bmatrix}, \text{ то } \operatorname{rank}\begin{bmatrix} D \\ DA \\ DA^2 \\ \vdots \\ DA^m \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} D \\ DA \\ DA^2 \\ \vdots \\ DA^k \end{bmatrix} \text{ для всех } k \geqq m$$

и среди чисел $0, 1, \dots, n-1$ существует такое число m.

(2) Система S наблюдаема с η тогда и только тогда, когда существует число $m \leqq n-1$, такое, что

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} D \\ DA \\ DA^2 \\ \vdots \\ DA^m \end{bmatrix} = \dim X = n .$$

<u>Доказательство</u>

Сначала покажем, что для линейной системы не существует изолированное состояние. Предположим противное. Тогда по (2.10) $\gamma = 0$, что противоречит (2.I). Отсюда для S не существует изолированное состояние.

Рассмотрим матрицу наблюдаемого преобразования бимодели S' с выходом $\eta'(D' = [D0])$:

$$[S_{\eta'}] = \begin{bmatrix} D' \\ D'A' \\ D'B_1' \\ \vdots \\ D'B_p' \\ D'(A')^2 \\ D'A'B_1' \\ \vdots \\ D'A'B_p' \\ D'B_1' \\ \vdots \\ D'(B_p')^2 \\ D'(A')^3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & 0 \\ DA & 0 \\ 0 & DC_1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & DC_p \\ DA^2 & 0 \\ 0 & DAC_1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & DAC_p \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ DA^3 & 0 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} .$$

Таким образом, крайний правый столбец линейно не зависит от остальных. Следовательно, по (2.II) линейная система наблюдаема с выходом η тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} D \\ DA \\ DA^2 \\ DA^3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \dim X .$$

Наконец, с помощью (2.6) в /2/ доказательство завершено. □

В доказательстве теоремы (3.4) мы показали, что для линейной системы отсутствует изолированное состояние. Отсюда из (2.I4) имеем

(3.5) Теорема

Пусть $S = \langle T,K,X,U,Y,\emptyset,\alpha,\gamma \rangle$ – линейная система и $S' = \langle T,K,X', U,Y,\emptyset,\alpha',\beta' \rangle$ – ее фимодель. Тогда система S минимальна тогда и только тогда, когда для любой ее реализующей пары (x, η) выполняется одно из следующих условий:

(I) $\operatorname{rank} \mathcal{H}(x',\eta') = \dim X \oplus K$, $\mathcal{H}(x',\eta') = [S_{\eta'}][\Psi_{x'}]$, $x' = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$ и $D' = [D0]$ – матрица преобразования η'.

(2) $\operatorname{rank} \mathcal{H}(x',\eta') = \dim X$, $\operatorname{rank}[S_{\eta'}] = \dim X \oplus K$ и для некоторого n линейно независимых состояний $x_1' = \begin{bmatrix} x_1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ldots, x_n' = \begin{bmatrix} x_n \\ 1 \end{bmatrix}$, достижимых из состояния x', векторы $x_1,\ldots,x_n$ линейно независимы. □

Мы обозначим через $[Z_o]^*$ множество всех конечных последовательностей буквы Z_o. Для каждого линейного выходного отображения η с соответствующей матрицей D линейной системы S мы построим матрицу $\mathcal{H}(0,\eta)$, строки и стобцы которой индексируются элементами из $\{Z_o\}^*$, а значение каждого элемента (θ_1, θ_2) (где $\theta_1, \theta_2 \in \{Z_o\}^*$) равно $Dh(\theta_1 \theta_2)$ ($h: \{Z_o\}^* \to K^{n\times n}: Z_o \mapsto A$), т.е.

$$\mathcal{H}(0,\eta) = \begin{bmatrix} DC & DAC & DA^2C & DA^3C & \ldots \\ DAC & DA^2C & DA^3C & DA^4C & \ldots \\ DA^2C & DA^3C & DA^4C & DA^5C & \ldots \\ DA^3C & DA^4C & DA^5C & DA^6C & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix},$$

мы назовем ее матрицей Ганкеля нулевого состояния линейной системы S с выходом η. При этом мы обозначим через $\mathcal{H}(0,\eta)_{m_1,m_2}$ матрицу, полученную из $\mathcal{H}(0,\eta)$ отбрасыванием всех элементов, для каждого из которых либо длина строки больше m_1, либо длина столбца больше m_2, т.е.

$$\mathcal{H}(0,\eta)_{m_1,m_2} = \begin{bmatrix} DC & DAC & \cdots\cdots & DA^{m_2}C \\ DAC & DA^2C & \cdots\cdots & DA^{m_2+1}C \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ DA^{m_1}C & DA^{m_1+1}C & \cdots & DA^{m_1+m_2}C \end{bmatrix}.$$

(3.6) Следствие

Пусть $S = \langle T,K,X,U,Y,\emptyset,\alpha,\gamma \rangle$ – линейная система с нулевым начальным состоянием, т.е. для нее существует реализующая пара ($0,\eta$). Тогда система S минимальна тогда и только тогда, когда для любого допустимого линейного выходного отображения с соответствующей матрицей D существуют числа m_1 и m_2, такие, что $m \leqq n-1$, $m_2 \leqq n-1$ и $\operatorname{rank} \mathcal{H}(0,\eta)_{m_1,m_2} = \dim X = n$.

Доказательство

Из (3.I5) и (2.I5) следует, что линейная система S с нулевым начальным состоянием минимальна тогда и только тогда, когда для любого допустимого линейного выходного отображения η $\operatorname{rank} \mathcal{H}(x',\eta') = \dim X \oplus K$. По (3.3) в /2/ существуют числа m_1 и m_2, такие, что $m_1 \leqq n-1$, $m_2 \leqq n-1$ и $\operatorname{rank} \mathcal{H}(x',\eta')_{m_1+1,m_2+1} = \operatorname{rank} \mathcal{H}(x',\eta')$.
Подставляя матрицы A', B_i' $(i=1,\ldots,p)$, полученные из линейной системы S, в матрицу $\mathcal{H}(x',\eta')$ имеем

$D'(A')^k x' = 0$ для всех $k \in N$,

$D'(A')^{k_1} B_i' (A')^{k_2} x' = DA^{k_1} C_i$ для всех $k_1, k_2 \in N$ и $i=1,\ldots,p$,

$h(\theta) = 0$ для любой последовательности $\theta \in Z^*$, такой, которая содержит больше двух переменных из $\{Z_1,\ldots,Z_p\}$.

Отсюда получим

$$\operatorname{rank}\mathcal{H}(x'\eta') = \operatorname{rank} \begin{bmatrix}
0 & DC_1 \cdots & DC_p \cdots & DAC_1 \cdots & DAC_p \cdots & DA^{m_2}C_1 \cdots & DA^{m_2}C_p \\
DC_1 & 0 \cdots & 0 & 0 \cdots & 0 \cdots & 0 \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
DC_p & 0 \cdots & 0 & 0 \cdots & 0 \cdots & 0 \cdots & 0 \\
0 & DAC_1 \cdots & DAC_p & DA^2C_1 \cdots & DA^2C_p \cdots & DA^{1+m_2}C_1 \cdots & DA^{1+m_2}C_p \\
DAC_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \cdots & 0 \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
DAC_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & DA^2C_1 & DA^2C_p & DA^3C_1 & DA^3C_p & DA^{2+m_2}C_1 & DA^{2+m_2}C_p \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
DA^{m_1-1}C_1 & 0 \cdots & 0 & 0 \cdots & 0 \cdots & 0 \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
DA^{m_1-1}C_p & 0 \cdots & 0 & 0 \cdots & 0 \cdots & 0 \cdots & 0 \\
0 \cdots & DA^{m_1}C_1 \cdots & DA^{m_1}C_p \cdots & DA^{m_1+1}C_1 \cdots & DA^{m_1+1}C_p \cdots & DA^{m_1+m_2}C_1 \cdots & DA^{m_1+m_2}C_p
\end{bmatrix} =$$

$$= \dim X \oplus K,$$

крайний левый столбец линейно не зависит от остальных столбцов, так как иначе $\mathcal{H}(0,\eta)=0$. Следовательно, $\mathrm{rank}\,\mathcal{H}(x',\eta')=\mathrm{rank}\,\mathcal{H}(0,\eta)_{m_1,m_2}+1$. Тем самым завершено доказательство. $\square$

Литература

1. Ву Суан Минь. ОИЯИ, Р5-82-643, Дубна, 1982.
2. Ву Суан Минь. ОИЯИ, Р5-82-657, Дубна, 1982.
3. d'Alessandro P. Ricerche di Automatica, 1972, vol.3, N°2.
4. Isidori A. IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-18, pp.623-631, 1973.
5. d'Alessandro P., Isidori A., Ruberti A. SIAM J. Control, vol.12, pp.517-535, 1974.
6. Kalman R.E. Lecture on Controlobility and Observability. Centro Inter. Matematico, Bologna, Italy, 1968.
7. Калман Р., Фалб П.Л., Арбиб М.А. Очерки по математической теории систем. "Мир", М., 1971.
8. Anderson B.D.O., Arbib M.A., Manse E.G. Journ. of the Franklin Inst., vol.301, N°6, 1976, pp.497-508.
9. Математические методы в теории систем /под ред. Ю.А.Журавлева/. "Мир", М., 1979.

Рукопись поступила в издательский отдел
8 сентября 1982 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Ву Суан Минь
P5-82-658

Достижимость, наблюдаемость и минимальная реализация неоднородных билинейных и линейных дискретных динамических систем

С помощью теории билинейных /однородных/ дискретных динамических систем исследуются проблемы достижимости, наблюдаемости и минимальной реализации неоднородных билинейных и линейных дискретных динамических систем с произвольным начальным состоянием и произвольными многомерными входным и выходным пространствами. Получено необходимое и достаточное условие для каждой из этих проблем.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Vu Xuan Minh
P5-82-658

Reachability, Observability and Minimal Realization of Inhomogeneous Belinear and Linear Discrete-Time Dynamical Systems

The problems of reachability, observability and minimal realization of inhomogeneous belinear and linear discrete-time dynamical systems with any initial state and any multidimensional input and output spaces are investigated with use of the theory belinear /inhomogeneous/ discrete-time dynamical systems. The necessary and sufficient cindition is obtained for every of these problems.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

Перевод автора.