сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P5-82-657

Ву Суан Минь

НАБЛЮДАЕМОСТЬ И МИНИМАЛЬНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ БИЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

1982

I. Введение

Предлагаемая работа является продолжением работы /I/, в которой было получено необходимое и достаточное условие достижимости билинейных дискретных динамических систем, имеющих входное пространство произвольной конечной размерности, с помощью теории алгебраических эквивалентных преобразований билинейных систем. Ниже эта теория также позволит получить необходимое и достаточное условие наблюдаемости билинейных дискретных динамических систем с произвольными конечномерными входным и выходным пространствами. Что касается проблемы их минимальной реализации, она решится с помощью полученных теорем достижимости и наблюдаемости.

Все обозначения, используемые в /I/, сохраняются и в настоящей работе.

2. Наблюдаемость билинейных дискретных динамических систем

В этом параграфе мы будем строить наблюдаемую билинейную дискретную динамическую систему, эквивалентную заданной билинейной системе, и с ее помощью установим условия, при которых данная билинейная система наблюдаема.

(2.I) Определение

Пусть $S = \langle T, K, X, U, Y, \emptyset, \alpha, \beta \rangle$ - некоторая билинейная система и $\eta : X \longrightarrow Y$ - некоторое ее линейное выходное отображение. Система S называется наблюдаемой C η тогда и только тогда, когда для любых двух состояний x , $x' \in X$ из $x \neq x'$ следует $S_{x\eta} \neq S_{x'\eta}$.

(2.2) Определение

Пусть D - матрица линейного выходного отображения η билинейной системы S . Тогда вектором вход-выход каждого состояния $x \in X$ называется бесконечный вектор-столбец $[|x|]$, строки которого индексируются элементами свободного моноида Z^*, а значение каждой строки $\theta \in Z^*$ равно $Dh(\theta)x$, т.е.

$$[|x|] = \begin{bmatrix} Dx \\ DAx \\ DB_1x \\ \vdots \\ DB_px \\ DA^2x \\ DAB_1x \\ \vdots \\ DAB_px \\ DB_1^2x \\ \vdots \end{bmatrix} .$$

(2.3) <u>Предложение</u>

Для любых двух состояний $x, x' \in X$ билинейной системы S с линейным выходным отображением η отображения вход-выход $S_{x\eta}$ и $S_{x'\eta}$ равны тогда и только тогда, когда равны векторы вход-выход $[|x|] = [|x'|]$.

<u>Доказательство</u>

С помощью индукции по t мы покажем, что для любого $x \in X$, $v \in U^T$ и $t \geqslant 1$

$$\lambda(x, v|[0,t)) = \sum_{\substack{k_j=0,1,\dots,p \\ j=1,\dots,t}} v_{k_t}(t-1)v_{k_{t-1}}(t-2)\dots v_{k_1}(0)B_{k_t}B_{k_{t-1}}\dots B_{k_1}x, \qquad (I)$$

где $v_o(m) = 1$ для всех $m=0,1,\dots,t-1$ и $B_o = A$.

Для $t = 1$ имеем

$$\lambda(x, v|[0,1)) = Ax + \sum_{i=1,\dots p} v_i(0)B_ix = \sum_{\substack{k_j=0,1,\dots,p \\ j=1}} v_{k_1}(0)B_{k_1}x .$$

Предположим, что (I) удовлетворяется для некоторого $t \geqslant 1$. Тогда

$$\lambda(x, v|[0,t+1)) = A\lambda(x, v|[0,t)) + \sum_{i=1,\dots,p} v_i(t)B_i\lambda(x, v|[0,t)) =$$

$$= \sum_{\substack{k_j=0,1,\dots p \\ j=1,\dots,t}} v_o(t)v_{k_t}(t-1)v_{k_{t-1}}(t-2)\dots v_{k_1}(0)B_oB_{k_t}B_{k_{t-1}}\dots B_{k_1}x +$$

$$+ \sum_{\substack{k_j=0,1,\dots,p \\ j=1,\dots,t \\ i=1,\dots,p}} v_i(t)v_{k_t}(t-1)v_{k_{t-1}}(t-2)\dots v_{k_1}(0)B_iB_{k_t}B_{k_{t-1}}\dots B_{k_1}x =$$

$$= \sum_{\substack{k_j=0,1,\dots,p \\ j=1,\dots,t+1}} v_{k_{t+1}}(t)v_{k_t}(t-1)v_{k_{t-1}}(t-2)\dots v_{k_1}(0)B_{k_{t+1}}B_{k_t}B_{k_{t-1}}\dots B_{k_1}x.$$

Отсюда по индукции равенство (I) имеет место для любого $t \geqslant 1$, и отображение вход-выход вычисляется по формуле

$$S_{x\eta}(v)(t) = \sum_{\substack{k_j=0,1,\dots,p \\ j=1,\dots,t}} v_{k_t}(t-1)v_{k_{t-1}}(t-2)\dots v_{k_1}(0)DB_{k_t}B_{k_{t-1}}\dots B_{k_1}x \qquad (2)$$

для любого $x \in X$, $v \in U^T$ и $t \geqslant 1$.

Из этого выражения видно, что для каждого момента $t \in T$ $S_{x\eta}(v)(t)$ зависит только от тех последовательностей из Z^*, длина которых равна t. Пусть для двух состояний x и x' системы S среди последовательностей длины t имеется всего m последовательностей $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$, таких, что $Dh(\theta_\gamma)x \neq Dh(\theta_\gamma)x'$ $(\gamma=1,\dots,m)$. Очевидно, что m всегда конечно. Докажем, что мы всегда можем выбрать $v \in U^T$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\sum_{\gamma=1,\dots,m} v_{\gamma_t}(t-1)v_{\gamma_{t-1}}(t-2)\dots v_{\gamma_1}(0)DB_{\gamma_t}B_{\gamma_{t-1}}\dots B_{\gamma_1}x \neq$$

$$\neq \sum_{\gamma=1,\dots,m} v_{\gamma_t}(t-1)v_{\gamma_{t-1}}(t-2)\dots v_{\gamma_1}(0)DB_{\gamma_t}B_{\gamma_{t-1}}\dots B_{\gamma_1}x', \qquad (3)$$

где $h(\theta_\gamma) = B_{\gamma_t}B_{\gamma_{t-1}}\dots B_{\gamma_1}$.

Для каждой последовательности θ_γ обозначим число вхождений Z_o в нее через (θ_γ). Среди последовательностей $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ выделяем θ_τ, такую, что $(\theta_\tau) \geqslant (\theta_\gamma)$ для всех $\gamma = 1, \dots, m$, т.е. в $h(\theta_\tau)$ входит максимальное число A. Выбираем $v \in U^T$ так, чтобы $v_{\tau_t}(t-1) = v_{\tau_{t-1}}(t-2) = \dots = v_{\tau_1}(0) = 1$, а остальные $v_{\gamma_j}(j-1) = 0$ для всех $\gamma = 1, 2, \dots, \tau-1, \tau+1, \dots, m$ и $j = t, t-1, \dots, 1$, таких, что $\gamma_j \neq \tau_j$ и $\gamma_j \neq 0$. Покажем, что для каждого $\gamma = 1, 2, \dots, \tau-1, \tau+1, \dots, m$ существует по крайней мере один индекс j, такой, что $\gamma_j \neq \tau_j$ и $\gamma_j \neq 0$. Если $(\theta_\gamma) < (\theta_\tau)$, то существует индекс j, такой, что $\gamma_j \neq 0 = \tau_j$ (так как $\gamma_j = 0$ тогда и только тогда, когда $\theta_{\gamma_j} = Z_o$). Пусть $(\theta_\gamma) = (\theta_\tau)$. Обозначим через $\tau_o = \{01, 02, \dots, 0r\}$ множество всех индексов j, таких, что $\tau_j = 0$ (где $r = (\theta_\tau)$). Если $\theta_{\tau_{01}} = \theta_{\gamma_{01}}, \dots, \theta_{\tau_{0r}} = \theta_{\gamma_{0r}}$, то из условия максимальности (θ_τ) существует по крайней мере такой индекс j, не входящий в τ_o, что $0 \neq \gamma_j \neq \tau_j \neq 0$. Если среди τ_o существует $\theta_{\tau_j} \neq \theta_{\gamma_j}$, то $\gamma_j \neq 0 = \tau_j$. И так для каждого $\gamma = 1, 2, \dots, \tau-1, \tau+1, \dots, m$ существует по крайней мере индекс j, такой, что $v_{\gamma_j}(j-1) = 0$. Отсюда для выбранного $v \in U^T$ имеем

$$\sum_{\gamma=1,\dots,m} v_{\gamma_t}(t-1) v_{\gamma_{t-1}}(t-2) \dots v_{\gamma_1}(0) D B_{\gamma_t} B_{\gamma_{t-1}} \dots B_{\gamma_1} x = D B_{\tau_t} B_{\tau_{t-1}} \dots B_{\tau_1} x$$

и

$$\sum_{\gamma=1,\dots,m} v_{\gamma_t}(t-1) v_{\gamma_{t-1}}(t-2) \dots v_{\gamma_1}(0) D B_{\gamma_t} B_{\gamma_{t-1}} \dots B_{\gamma_1} x = D B_{\tau_t} B_{\tau_{t-1}} \dots B_{\tau_1} x' .$$

Отсюда вытекает справедливость неравенства (3) и $S_{x\eta}(v)(t) \neq S_{x'\eta}(v)(t)$, так как по условию $D B_{\tau_t} B_{\tau_{t-1}} \dots B_{\tau_1} x \neq D B_{\tau_t} B_{\tau_{t-1}} \dots B_{\tau_1} x'$ и $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ являются всеми последовательностями, такими, что $Dh(\theta_\gamma)x \neq Dh(\theta_\gamma)x'$. Таким образом, если для двух состояний x и x' среди последовательностей из Z^* длины t существует хоть одна последовательность θ^*, такая, что $Dh(\theta)x \neq Dh(\theta)x'$, то всегда найдется $v \in U^T$ такое, что $S_{x\eta}(v)(t) \neq S_{x'\eta}(v)(t)$. Следовательно, если $S_{x\eta} = S_{x'\eta}$, то $[|x|] = [|x'|]$. Обратное утверждение вытекает из выражения (2). □

(2.4) <u>Предложение</u>

Пусть $S = \langle T, K, X, U, Y, \emptyset, \alpha, \beta \rangle$ – некоторая билинейная система и $\eta : X \to Y$ – некоторое ее допустимое линейное выходное отображение. Тогда восьмерка $S^* = \langle T, K, X^*, U, Y, \emptyset, \alpha^*, \beta^* \rangle$

(где $X^* = \{[|x|] :, x \in X\}$, $[|x|] + [|x'|] = [|x+x'|]$, $r[|x|] = [|rx|]$, $[|x|]\alpha^* = [|x\alpha|]$ и $[|x|]\beta^*(u) = [|x\beta(u)|]$ для всех $x, x' \in X$, $r \in K$ и $u \in U$) является наблюдаемой билинейной системой с линейным выходным отображением $\eta^* : X^* \to Y : [|x|] \mapsto \eta(x)$ и отображение $S_\eta : X \to X^* : x \mapsto [|x|]$ является билинейным эквивалентным преобразованием системы S на систему S^*, которое мы назовем наблюдаемым преобразованием системы S с выходом η.

<u>Доказательство</u>

Очевидно, что операции на X^* однозначно определены. Действительно, если $[|x|] = [|x'|]$ и $[|x_1|] = [|x_1'|]$, то для любой $\theta \in Z^*$ $Dh(\theta)(x+x_1) = Dh(\theta)x + Dh(\theta)x_1 = Dh(\theta)x' + Dh(\theta)x_1' = Dh(\theta)(x+x_1')$, значит,

$[|x|] + [|x_1|] = [|x+x_1|] = [|x'+x_1'|] = [|x'|] + [|x_1'|]$, $Dh(\theta)(rx) = rDh(\theta)x = rDh(\theta)x' = Dh(\theta)(rx')$, т.е. $r[|x|] = [|rx|] = [|rx'|] = r[|x'|]$, $Dh(\theta)Ax = Dh(\theta Z_o)x = Dh(\theta Z_o)x' = Dh(\theta)Ax'$, $[|x|]\alpha^* = [|x\alpha|] = [|x'\alpha|] = [|x'|]\alpha^*$, и аналогичным образом $[|x|]\beta^*(u) = [|x'|]\beta^*(u)$ для всех $u \in U$. Сейчас мы проверим, что X^* с соответствующими операциями на нем является пространством состояний билинейной системы:

$([|x|] + [|x'|]) + [|x''|] = [|x+x'+x''|] = [|x|] + ([|x'|] + [|x''|])$, $[|x|] + [|x'|] = [|x+x'|] = [|x'+x|] = [|x'|] + [|x|]$, $[|x|] + [|0|] = [|x|] = [|0|] + [|x|]$, $[|x|] + [|-x|] = [|0|]$, $r([|x|] + [|x'|]) = r[|x+x'|] = [|r(x+x')|] = [|rx|] + [|rx'|] = r[|x|] + r[|x'|]$, $(r+r')[|x|] = [|(r+r')x|] = [|rx+r'x|] = r[|x|] + r'[|x|]$, $(rr')[|x|] = [|rr'x|] = r[|r'x|] = r(r'[|x|])$, $1[|x|] = [|x|]$, $([|x|] + [|x'|])\alpha^* = [|x+x'|]\alpha^* = [|(x+x')\alpha|] = [|x\alpha|] + [|x'\alpha|] = [|x|]\alpha^* + [|x'|]\alpha^*$, $r([|x|]\alpha^*) = r[|x\alpha|] = [|rx\alpha|] = [|rx|]\alpha^* = (r[|x|])\alpha^*$,

аналогично $\beta^*(u) \in \mathrm{End}X^*$ для всех $u \in U$, кроме того, $[|x|]\beta^*(u+u') = [|x\beta(u+u')|] = [|x\beta(u) + x\beta(u')|] = [|x\beta(u)|] + [|x\beta(u')|] = [|x|]\beta^*(u) + [|x|]\beta^*(u')$, т.е. $\beta^*(u+u') = \beta^*(u) + \beta^*(u')$, наконец, $[|x|]\beta^*(ru) = [|x\beta(ru)|] = [|rx\beta(u)|] = r[|x|]\beta^*(u)$.

Сейчас проверим, что η^* является линейным выходным отображением системы S^*. Если $[|x|] = [|x'|]$, то $Dx = Dx'$, т.е. $\eta(x) = \eta(x')$, $\eta^*([|x|] + [|x'|]) = \eta^*([|x+x'|]) = \eta(x+x') = \eta(x) + \eta(x') = \eta^*([|x|]) + \eta^*([|x'|])$, $\eta^*(r[|x|]) = \eta^*([|rx|]) = \eta(rx) = r\eta(x) = r\eta^*([|x|])$.

Проверим далее, является ли S_η билинейным преобразованием:

$$S_\eta(x+x') = [|x+x'|] = [|x|] + [|x'|] = S_\eta(x) + S_\eta(x'), \quad S_\eta(rx) = [|rx|] =$$
$$= r[|x|] = rS_\eta(x), S_\eta(x\alpha) = [|x\alpha|] = [|x|]\alpha^* = S_\eta(x)\alpha^*,$$
$$S_\eta(x\beta(u)) = [|x\beta(u)|] = [|x|]\beta^*(u) = S_\eta(x)\beta^*(u).$$

Сейчас покажем, что $S_{x\eta} = S^*_{[|x|]\eta^*}$. Действительно, для любого $v \in U^T$ и $t \in T$ по (2.9) в /I/ имеем $S^*_{[|x|]\eta^*}(v)(t) =$

$$= \eta^*(\lambda^*([|x|], v|[0,t))) = \eta^*(\lambda^*(S_\eta(x), v|[0,t))) = \eta^*(S_\eta(\lambda(x, v|[0,t)))) =$$
$$= \eta^*[|\lambda(x, v|[0,t))|] = \eta(\lambda(x, v|[0,t))) = S_{x\eta}(v)(t).$$

В частности, если (x, η) – реализующая системы S, то $S^*_{[|x|]\eta^*}(v) = S_{x\eta}(v) = \emptyset(v)$ для всех $v \in V$, т.е. $([|x|], \eta^*)$ является реализующей парой системы S^*. Следовательно, S_η является билинейным эквивалентным преобразованием системы S на систему S^*, так как для любого $[|x|] \in X^*$ $S_\eta(x) = [|x|]$.
Если $[|x|] \neq [|x'|]$, то по (2.3) $S_{x\eta} \neq S_{x'\eta}$, следовательно, $S^*_{[|x|]\eta^*} = S_{x\eta} \neq S_{x'\eta} = S^*_{[|x'|]\eta^*}$.

Таким образом, система S^* наблюдаема с выходом η^*. □

(2.5) <u>Теорема</u>

Пусть S – билинейная система и η – некоторое ее допустимое линейное выходное отображение. Тогда следующие условия эквивалентны:

(I) Система S наблюдаема с выходом η.

(2) Наблюдаемое преобразование S_η является изоморфным.

(3) $\operatorname{rank}[S_\eta] = \dim X$, где $[S_\eta]$ – матрица-столбец, строки которой индексируются элементами свободного моноида Z^*, а значение каждой строки $\Theta \in Z^*$ равно $Dh(\Theta)$, т.е.

$$[S_\eta] = \begin{bmatrix} D \\ DA \\ DB_1 \\ \vdots \\ DB_p \\ DA^2 \\ DAB_1 \\ \vdots \\ DAB_p \\ DB_1^2 \\ \vdots \end{bmatrix},$$

которая является матрицей наблюдаемого преобразования S_η.

<u>Доказательство</u>

(I) $\longleftrightarrow$ (2). Пусть система S наблюдаема с выходом η и $x \neq x'$. Предположим, что $[|x|] = [|x'|]$. Тогда по (2.3) $S_{x\eta} = S_{x'\eta}$, что противоречит тому, что $S_{x\eta} \neq S_{x'\eta}$, так как S наблюдаема. Следовательно, $[|x|] \neq [|x'|]$. Таким образом, по (2.4) S_η является изоморфным. Наоборот, если S_η – изоморфное преобразование, то из $x \neq x'$ следует $[|x|] \neq [|x'|]$. Тогда по (2.3) имеем $S_{x\eta} \neq S_{x'\eta}$. Следовательно, система S наблюдаема.

(2) $\longleftrightarrow$ (3). Для этого достаточно показать, что $[S_\eta]$ является матрицей преобразования S_η. Действительно, $S_\eta : X \to X^* :$ □
$: x \mapsto [|x|] = [S_\eta]\, x$.

(2.6) <u>Следствие</u>

Пусть $[S_\eta]_m$ – матрица, полученная из матрицы наблюдаемого преобразования $[S_\eta]$ отбрасыванием всех элементов, длина индекса строки каждого из которых больше m. Тогда, если для некоторого числа m $\operatorname{rank}[S_\eta]_m = \operatorname{rank}[S_\eta]_{m+1}$, то система S наблюдаема с η тогда и только тогда, когда $\operatorname{rank}[S_\eta]_m = \dim X$, т.е. $\operatorname{rank}[S_\eta] = \operatorname{rank}[S_\eta]_m$. Более того, среди чисел $0, 1, \dots, n-1$ существует такое число m.

<u>Доказательство</u>

Обозначим строки матрицы D через $d_1, d_2, \dots, d_q$. Пусть для некоторого числа m $\operatorname{rank}[S_\eta]_m = \operatorname{rank}[S_\eta]_{m+1}$. Это означает, что для любой $\Theta \in Z^*$, такой, что $|\Theta| = m+1$, имеет место разложение

$$d_\mu h(\Theta) = \sum_{\substack{\gamma=1,\dots,q \\ 0 \leq |\Theta_i| \leq m}} \lambda_i^\gamma d_\gamma h(\Theta_i), \quad \text{где} \quad \lambda_i^\gamma \in K$$

для каждого $\mu = 1, 2, \dots, q$.

Пусть $\bar\Theta \in Z^*$ – произвольная последовательность длины $m+2$. Можно ее представить в виде $\bar\Theta = \Theta Z_j$, где $|\Theta| = m+1$. Обозначим $B_0 = A$. Тогда для каждого d_μ $(\mu = 1, 2, \dots, q)$ имеем

$$d_\mu h(\bar\Theta) = d_\mu h(\Theta) B_j = \sum_{\substack{\gamma=1,\dots,q \\ 0 \leq |\Theta_i| \leq m}} \lambda_i^\gamma d_\gamma h(\Theta_i) B_j =$$

$$= \sum_{\substack{\gamma=1,\dots,q \\ 0 \leq |\Theta_i| \leq m-1}} \lambda_i^\gamma d_\gamma h(\Theta_i) B_j + \sum_{\substack{\gamma=1,\dots,q \\ |\Theta_i| = m}} \lambda_i^\gamma d_\gamma h(\Theta_i) B_j =$$

$$= \sum_{\substack{\gamma=1,\dots,q \\ 0\leqq|\theta_i|\leqq m-1}} \lambda_i^{\gamma} d_{\gamma} h(\theta_i Z_j) + \sum_{\substack{\gamma=1,\dots,q \\ |\theta_i| = m}} \lambda_i^{\gamma} d_{\gamma} h(\theta_i Z_j) =$$

$$= \sum_{\substack{\gamma=1,\dots,q \\ 0\leqq|\theta_i|\leqq m-1}} \lambda_i^{\gamma} d_{\gamma} h(\theta_i Z_j) + \sum_{\substack{\gamma=1,\dots,q \\ 0\leqq|\theta_i|\leqq m}} \bar{\lambda}_i^{\gamma} d_{\gamma} h(\theta_i) \quad \text{, где } \bar{\lambda}_i^{\gamma} \in K.$$

Отсюда получим $\operatorname{rank}[S_\eta]_m = \operatorname{rank}[S_\eta]_{m+2}$. Следовательно, по индукции $\operatorname{rank}[S_\eta]_m = \operatorname{rank}[S_\eta]_{m'}$, для всех $m' \geqslant m$, т.е. $\operatorname{rank}[S_\eta]_m = \operatorname{rank}[S_\eta]$.

Пусть m – минимальное число, такое, что $\operatorname{rank}[S_\eta]_m = \operatorname{rank}[S_\eta]_{m+1}$. Предположим, что $m \geqq n$. Тогда по первой части доказательства существует по крайней мере $m+1$ линейно независимых строк $d_{i_0}, d_{i_1}h(\theta_1), \dots, d_{i_m}h(\theta_m)$, где $|\theta_1| = 1, \dots, |\theta_m| = m$ и $d_{ij} \in \{d_1, \dots, d_q\}$ для каждого $j = 0, 1, \dots, m$. Это противоречит тому, что максимальное число линейно независимых строк матрицы $[S_\eta]$ не может быть больше числа ее столбцов, которое равно n. Следовательно, $m \leqq n-1$.

Наконец, из (2.5) вытекает справедливость следствия. □

3. Минимальная реализация билинейных дискретных динамических систем

В этом параграфе на основе теоремы достижимости, изложенной в /I/ и теоремы наблюдаемости, изложенной в предыдущем параграфе, мы установим условия, при которых данная билинейная система минимальна.

(3.I). Определение

Билинейная система S называется минимальной тогда и только тогда, когда она проста (т.е. она не содержит никакой собственной билинейной подсистемы) и тупикова (т.е. любое эквивалентное преобразование ее в другую билинейную систему является взаимно однозначным).

(3.2) Теорема

Для любой билинейной системы $S = \langle T, K, X, U, Y, \emptyset, \alpha, \beta \rangle$ следующие условия эквивалентны:

(I) Система S минимальна

(2) Для любой реализующей пары (x, η) система S достижима из x и наблюдаема с выходом η.

(3) Для любой реализующей пары (x, η) $\operatorname{rank}\mathcal{H}(x,\eta) = \dim X$, где $\mathcal{H}(x,\eta) = [S_\eta][\Psi_x]$ – произведение матрицы наблюдаемого преобразования S_η и матрицы достижимого преобразования Ψ_x.

Доказательство

(I) $\to$ (2) $\to$ (3). Пусть S минимальна и (x, η) – произвольная ее реализующая пара. Предположим, что S недостижима из x. Тогда по (3.8) и (3.9) в /I/ образ достижимого преобразования Ψ_x является собственной билинейной подсистемой системы S. Это противоречит тому, что S проста. Таким образом, S достижима из x. Предположим далее, что, S не наблюдаема с выходом η. Тогда по (2.4) и (2.5) наблюдаемое преобразование S_η является эквивалентным преобразованием системы S, но не является изоморфным. Это противоречит тому, что S тупикова. Следовательно, S наблюдаема с выходом η. Если система S достижима из x и наблюдаема с η, то по (3.9) в /I/ Ψ_x является преобразованием на, а по (2.5) S_η является изоморфным. Следовательно, произведение $S_\eta \Psi_x$ является преобразованием на. Отсюда $\operatorname{rank}\mathcal{H}(x,\eta) = \operatorname{rank}[S_\eta][\Psi_x] = \dim X^* = \dim X$.
(3) $\to$ (2) $\to$ (I). Пусть $\operatorname{rank}\mathcal{H}(x,\eta) = \operatorname{rank}[S_\eta][\Psi_x] = \dim X$. Тогда $\operatorname{rank}[\Psi_x] = \dim X = \operatorname{rank}[S_\eta]$. Следовательно, по (3.9) в /I/ S достижима из x, а по (2.5) она наблюдаема с η. Пусть имеет место (2). Предположим, что S не проста и собственное подпространство $X' \subset X$ образует собственную билинейную подсистему S' системы S. Тогда по (2.6) в /I/ для произвольной реализующей пары (x, η') подсистемы $S'(x,\eta)$ (где η – любое линейное расширение η' до X) является реализующей парой системы S. Но по (2.5) в /I/ $R_x \subseteq X' \subset X$. Следовательно, $(R_x) \subseteq X' \subset X$ и система S не достижима из x, что противоречит условию (2). Предположим далее, что S не тупикова. Тогда существует билинейное эквивалентное преобразование f системы S на некоторую билинейную систему S'. Тогда по (2.4) в /I/ существуют допустимые линейные выходные отображения η и η' системы S и системы S' соответственно, такие, что $\eta = \eta' f$. С другой стороны, существуют $x_1, x_2 \in X$ такие, что $x_1 \neq x_2$ и $f(x_1) = f(x_2)$, так как f взаимно неоднозначно. Тогда по (2.I0) в /I/ имеем $S_{x_1\eta} = S'_{f(x_1)\eta'} = S'_{f(x_2)\eta'} = S_{x_2\eta}$. Отсюда

система S не наблюдаема с выходом η, что противоречит условию (2). Таким образом, S тупикова. Следовательно, система S минимальна. □

Мы назовем произведение $\mathcal{H}(x,\eta) = [S_\eta][\Psi_x]$ матрицей Ганкеля реализующей пары (x,η) системы S. Очевидно, что строки и столбцы матрицы $\mathcal{H}(x,\eta)$ индексируются элементами из Z^*, а значение каждого элемента (θ_1,θ_2) равно $Dh(\theta_1\theta_2)x$.

(3.3) Предложение

Пусть $\mathcal{H}(x,\eta)_{m_1 m_2}$ – матрица, полученная из матрицы $\mathcal{H}(x,\eta)$ отбрасыванием всех элементов, для каждого из которых либо длина индекса строки больше m_1, либо длина столбца больше m_2. Тогда существуют числа m_1 и m_2, такие, что $m_1 \leq n-1$, $m_2 \leq n-1$ и

$$\operatorname{rank} \mathcal{H}(x,\eta)_{m_1,m_2} = \operatorname{rank}\mathcal{H}(x,\eta).$$

Доказательство

По (2.6) существует число $m_1 \leq n-1$, такое, что $\operatorname{rank}[S_\eta]_{m_1} = \operatorname{rank}[S_\eta]$. Отсюда $\operatorname{rank}\mathcal{H}(x,\eta) = \operatorname{rank}[S_\eta][\Psi_x] = \operatorname{rank}[S_\eta]_{m_1}[\Psi_x]$, так как любая строка z матрицы $[S_\eta]$ является комбинацией $z = \lambda_1 z_1 + \ldots + \lambda_r z_r$, где $\lambda_i \in K$ и r – число строк матрицы $[S_\eta]_{m_1}$, т.е. $z[\Psi_x] = (\lambda_1 z_1 + \ldots + \lambda_r z_r)[\Psi_x] = \lambda_1 z_1[\Psi_x] + \ldots + \lambda_r z_r[\Psi_x]$.
По (3.10) в /1/ существует число $m_2 \leq n-1$, такое, что $\operatorname{rank}[\Psi_x] = \operatorname{rank}[\Psi_x]_{m_2}$, т.е. любой столбец $\bar{x}$ матрицы $[\Psi_x]$ является комбинацией $\bar{x} = \mu_1 x_1 + \ldots + \mu_s x_s$, где $\mu_i \in K$ и s – число столбцов матрицы $[\Psi_x]_{m_2}$. Отсюда $[S_\eta]_{m_1}\bar{x} = [S_\eta]_{m_1}(\mu_1 x_1 + \ldots + \mu_s x_s) = \mu_1 [S_\eta]_{m_1} x_1 + \ldots + \mu_s [S_\eta]_{m_1} x_s$.
Таким образом, $\operatorname{rank}[S_\eta]_{m_1}[\Psi_x] = \operatorname{rank}[S_\eta]_{m_1}[\Psi_x]_{m_2} = \operatorname{rank}\mathcal{H}(x,\eta)_{m_1,m_1} = \operatorname{rank}\mathcal{H}(x,\eta)$. □

(3.4) Предложение.

Пусть $x_1,\ldots,x_s$ – наименьшее число независимых столбцов матрицы $[\Psi_x]$ и $z_1,\ldots,z_r$ – наименьшее число независимых строк матрицы $[S_\eta]$. Тогда $\operatorname{rank}\mathcal{H}(x,\eta) = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{bmatrix}[x_1,\ldots,x_s]$.

Доказательство

Аналогично доказательству (3.3) имеем $\operatorname{rank}\mathcal{H}(x,\eta) =$

$$= \operatorname{rank}\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{bmatrix}[\Psi_x] = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{bmatrix}[x_1,\ldots,x_s].$$ □

Выше мы показали, что каждому отображению вход-выход билинейной системы S соответствует единственный вектор вход-выход $[|x|]$ (2.3), т.е. для заданной системы S и ее линейного выходного отображения η $S_{x\eta}$ однозначно характеризуется бесконечной последовательностью $\{Dh(\theta)x\}_{\theta \in Z^*}$. До сих пор в литературе по теории реализации билинейных систем /2-8/ для упрощения задачи минимальной реализации требовалось находить минимальную билинейную систему, реализующую бесконечную последовательность $\{Dh(\theta)x\}_{\theta \in Z^*}$ для некоторой реализующей пары (x,η) заданной билинейной системы S. В частности, если выходное пространство Y системы скалярно, то $\{Dh(\theta)x\}_{\theta \in Z^*}$ представляет собой бесконечную последовательность чисел из поля K. В настоящее время проблема минимальной реализации решена только для последнего случая. Ниже мы сформулируем эту задачу для общего случая с многомерным выходным пространством и установим условия минимальной реализации.

(3.5) Определение

Пусть (x,η) – фиксированная реализующая пара билинейной системы S. Тогда бесконечная последовательность $\{Dh(\theta)x\}_{\theta \in Z^*}$ называется структурой отображения вход-выход $S_{x\eta}$ системы S, а его реализующей парой называется реализующая пара (x',η') любой билинейной системы S', такая, что $Dh(\theta)x = D'h'(\theta)x'$ для всех $\theta \in Z^*$. При этом билинейная система S' называется билинейной $S_{x\eta}$ – системой, если для нее существует реализующая пара отображения вход-выход $S_{x\eta}$. В частности, если S' – билинейная подсистема системы S, то она называется билинейной $S_{x\eta}$ – подсистемой системы S.

(3.6) Определение

Пусть S' и S'' – две билинейные $S_{x\eta}$ – системы. Тогда билинейное преобразование системы S' в систему S'' называется билинейным $S_{x\eta}$ – эквивалентным преобразованием, если его образ является билинейной $S_{x\eta}$-подсистемой системы S''.

(3.7) Определение

Билинейная $S_{x\eta}$-система называется минимальной тогда и только тогда, когда она проста (т.е. она не содержит собственной билинейной $S_{x\eta}$ -системы) и тупикова (т.е. любое ее билинейное $S_{x\eta}$ -эквивалентное преобразование взаимно однозначно).

(3.8) Теорема

Пусть S – билинейная $S_{x\eta}$-система. Тогда эквивалентны следующие условия:

(I) S является минимальной билинейной $S_{x\eta}$-системой.

(2) Система S достижима из x и наблюдаема с выходом η .

(3) $\operatorname{rank} \mathcal{H}(x,\eta) = \dim X$.

Доказательство

(I)$\to$(2). Пусть S – минимальная билинейная $S_{x\eta}$ -система. Доказательство достижимости состояния x аналогично доказательству (I)$\to$(2) теоремы (3.2). Покажем, что если f -билинейное эквивалентное преобразование системы S в систему S' и $\eta = \eta' f$ (где η и η' – их допустимые линейные выходные отображения соответственно), то для любого $x \in X$ $Dh(\theta)x = D'h'(\theta)f(x)$ для всех $\theta \in Z^*$. Действительно, $D'h'(\theta)f(x) = D'f(h(\theta)x) = Dh(\theta)x$, так как f согласовано с $A, B_1, \ldots, B_p$. Тогда по (2.4) S_η является билинейным $S_{x\eta}$ -эквивалентным преобразованием системы S на систему S^* , так как $\eta = \eta^* S_\eta$. Отсюда по (2.5) система S наблюдаема.

(2)$\to$(3). Аналогично доказательству (2)$\to$(3) теоремы (3.2).

(3)$\to$(I). Пусть $\operatorname{rank} \mathcal{H}(x,\eta) = \dim X$. Предварительно заметим, что для произвольной реализующей пары (x',η') отображения вход-выход $S_{x\eta}$ имеем $\mathcal{H}(x',\eta') = \mathcal{H}(x,\eta)$, так как по определению $Dh(\theta)x = Dh(\theta)x'$ для всех $\theta \in Z^*$. Предположим, что S не является минимальной билинейной $S_{x\eta}$ -системой, т.е. либо она не проста, либо она не тупикова. Если она не проста, то по (3.9) в [I] $\operatorname{rank}[\Psi_{x'}] < \dim X$ для реализующей пары (x',η') собственной билинейной $S_{x\eta}$ – подсистемы системы S . Отсюда $\operatorname{rank} \mathcal{H}(x',\eta') = \operatorname{rank}[\Psi_{x'}]\,[S_{\eta'}] < \dim X = \operatorname{rank} \mathcal{H}(x,\eta)$. Это противоречит тому, что $\mathcal{H}(x',\eta') = \mathcal{H}(x,\eta)$. Следовательно, система S является простой билинейной $S_{x\eta}$ -системой. Далее, если система S не является тупиковой $S_{x\eta}$ -системой, то существует билинейное $S_{x\eta}$ -эквивалентное преобразование системы S на другую билинейную $S_{x\eta}$-систему S', которое не является изоморфным. Пусть (x',η')-реализующая пара отображения вход-выход $S_{x\eta}$ -системы системы S' . Тогда $\operatorname{rank} \mathcal{H}(x',\eta') \leq \dim X' < \dim X = \operatorname{rank} \mathcal{H}(x,\eta)$. Это противоречит тому, что $\mathcal{H}(x',\eta') = \mathcal{H}(x,\eta)$. Отсюда система S является тупиковой $S_{x\eta}$ -системой. Таким образом, она является минимальной билинейной $S_{x\eta}$ -системой. □

(3.9) Следствие

Любые две минимальные билинейные $S_{x\eta}$ -системы имеют одинаковую размерность.

Доказательство

По (3.8) размерность минимальной билинейной $S_{x\eta}$ -системы равна рангу матрицы $\mathcal{H}(x,\eta)$. Но по определению для любой реализующей пары (x',η') отображения вход-выход $S_{x\eta}$ $\mathcal{H}(x,\eta) = \mathcal{H}(x',\eta')$. Отсюда вытекает следствие. □

В заключение следует отметить, что обычно под минимальной билинейной системой подразумевают достижимую и наблюдаемую систему. Однако в данной работе понятие минимальной системы формулировалось полностью на алгебраическом языке, т.е. система минимальна тогда и только тогда, когда она проста и тупикова. Затем была доказана эквивалентность этих понятий минимальности для билинейных систем.

Литература

I. Ву Суан Минь. ОИЯИ, Р5-82-643 , Дубна, 1982.

2. Fliess M. C.R.Acad.Sci.,T.277, série A,p.923-926,1973 .

3. Fliess M. J.Math.pures et appl.,T.53,Fasc.2,p.197-224,1974 .

4. Fliess M. C.R.Acad.Sci.,T.278,série A,p.1147-1149,1974 .

5. Fliess M. C.R.Acad.Sci.,T.279,série A,p.243-246,1974 .

6. d'Alessandro P.Ricerche di Automatica,1972,vol.3,N°2 .

7. Isidori A.IEEE Trans.Automat.Contr.vol AC-18,pp.623-631,1973 .

8. d'Alessandro P.,Isidori A.,Ruberti A. SIAM J.Control,vol.12, pp.517-535,1974 .

Рукопись поступила в издательский отдел
8 сентября 1982 года.

Ву Суан Минь P5-82-657

Наблюдаемость и минимальная реализация
билинейных дискретных динамических систем

С помощью теории билинейных эквивалентных преобразований исследуется наблюдаемость и минимальная реализация билинейных дискретных динамических систем с произвольными многомерными входным и выходным пространствами. Для них получено необходимое и достаточное условие наблюдаемости, а также необходимое и достаточное условие минимальной реализации.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Vu Xuan Minh P5-82-657

Observability and Minimal Realization
of Belinear Discrete-Time Dynamical Systems

The observability and the minimal realization of belinear discrete-time dynamical systems with any multidimensional input and output spaces are investigated with the use of the theory of belinear equivalent transformations. The necessary and sufficient condition of observability and one of minimal realization are obtained for these systems.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

Перевод автора.