сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5-82-643

Ву Суан Минь

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ДОСТИЖИМОСТЬ БИЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

1982

I. Введение

Билинейные (однородные и неоднородные) и линейные дискретные динамические системы являются самыми распространенными численными моделями макрообъектов управления. На данном этапе развития теории управления макрообъектами центральными структурными проблемами являются достижимость, наблюдаемость и минимальная реализация их математических моделей/1-3/. Известно, что любая неоднородная билинейная (в частности,линейная) дискретная динамическая система сводится к однородной. Следовательно, исследование однородных билинейных дискретных динамических систем, которые в дальнейшем мы будем называть просто билинейными дискретными динамическими системами, имеет фундаментальное значение также для исследования остальных классов систем.

В настоящее время проблемы достижимости и наблюдаемости билинейных дискретных динамических систем решены только для случая, когда система имеет один управляющий и один управляемый параметр/4, 5/, а проблема их минимальной реализации решена для случая, когда входное пространство многомерно и выходное пространство одномерно/6-9/.

Следует отметить, что билинейные дискретные динамические системы составляют класс дискретных автоматов, входной и выходной алфавиты и множество состояний каждого из которых являются конечномерными векторными пространствами над некоторым фиксированным полем. В случаях, когда поле конечно, проблемы структур билинейных дискретных динамических систем могут быть решены с помощью методов К-значной логики/10/. Поэтому основное внимание в дальнейшем будет уделяться случаям бесконечных полей.

В теории автоматов эквивалетные преобразования являются весьма эффективными методами. Следовательно, в предлагаемой работе проблема достижимости билинейных дискретных динамических систем с произвольными многомерными входным и выходным пространствами решается с помощью теории эквивалентных преобразований, которая в дальнейшем также служит основным инструментом для исследования других проблем теории структур билинейных дискретных динамических систем.

II. Билинейные дискретные динамические системы и билинейные преобразования

В этом параграфе мы сформулируем билинейные дискретные динамические системы на языке алгебраических динамических систем /II, I2/ и разработаем элементы теории билинейных преобразований.

(2.I) Определение

Билинейной дискретной динамической системой над полем К называется восьмерка

$$S = \langle T, K, X, U, Y, \Phi, \alpha, \beta \rangle ,$$

где $T = \{0, 1, 2, \ldots\}$; $X = K^n$, $U = K^p$ и $Y = K^q$ – конечномерные векторные пространства над полем К с фиксированными базисами, называемые пространством состояний, входным пространством и выходным пространством соответственно; $\Phi: V \to Y^T$ – заданное отображение вход-выход, называемое дискретным динамическим процессом ($V \subseteq U^T$); $\alpha: X \to X: x \mapsto Ax$ – эндоморфизм пространства X с соответствующей матрицей $A \in K^{n\times n}$; $\beta: U \to End\, X$ – линейное преобразование векторного пространства U в векторное пространство эндоморфизмов векторного пространства X, такое, что для каждого $u \in U$ линейному преобразованию $\beta(u)$ соответствует матрица $B(u) = \sum_{i=1,\ldots,p} u_i B_i$ (здесь u_i – i-я координата входной величины $u \in U$ и $B_i \in K^{n\times n}$ – постоянная матрица для всех $i = 1, \ldots, p$). Операции α и $\beta(u)$ определяют в пространстве X одношаговую переходную функцию состояния

$$x(t+1) = x(t)\alpha + x(t)\beta(\vartheta(t))$$
$$= Ax(t) + \sum_{i=1,\ldots,p} \vartheta_i(t) B_i x(t)$$

для всех $t \in T$, $x(t) \in X$ и $\vartheta \in U^T$ (здесь эндоморфизмы α и $\beta(\vartheta(t))$ приписываются справа для отличия от преобразований двух разных векторных пространств). При этом требуется, чтобы для S существовала реализующая пара (x, η) начального состояния $x \in X$ и линейного выходного отображения $\eta: X \to Y: x \mapsto Dx$ (здесь $D \in K^{q\times n}$ – матрица преобразования η), такая, что для любого $\vartheta \in V$ удовлетворяется равенство

$$S_{x\eta}(\vartheta) = \Phi(\vartheta) ,$$

где $S_{x\eta}: U^T \to Y^T$ – отображение вход-выход системы S с начальным состоянием x и выходным отображением η.

Из определения следует, что переходная функция состояния системы $\lambda: X \times U^T_x\, T^* \to X$ (где $T^* = \{[0,t) : t \in T\}$) определяется индукцией по Т:

$$\lambda(x, \vartheta|[0,0)) = x,$$
$$\lambda(x, \vartheta|[0,t+1)) = \lambda(x, \vartheta|[0,t))\alpha + \lambda(x, \vartheta|[0,t))\beta(\vartheta(t))$$
$$= A\lambda(x, \vartheta|[0,t)) + \sum_{i=1,\ldots,p} \vartheta_i(t) B_i \lambda(x, \vartheta|[0,t))$$

для всех $x \in X$, $\vartheta \in U^T$ и $t \in T$ (здесь $\vartheta|[0,t)$ – ограничение функции ϑ на интервале $[0,t)$).

Тогда отображение вход-выход $S_{x\eta}: U^T \to Y^T$ определяется выражением

$$S_{x\eta}(\vartheta)(t) = \eta(\lambda(x, \vartheta|[0,t))) = D\lambda(x, \vartheta|[0,t))$$

для любого $\vartheta \in U^T$ и $t \in T$.

Следует отметить, что пространство состояний билинейной дискретной динамической системы представляет собой некоторую алгебру, в которой кроме операций векторного пространства еще определены одноместные операции α и $\beta(u)$ для каждого $u \in U$.

В дальнейшем, если (x, η) – реализующая пара системы S, то мы назовем η допустимым линейным выходным отображением системы S. Мы также будем называть билинейные дискретные динамические системы просто билинейными системами там, где это не приводит к путанице.

(2.2) Определение

Пусть $S = \langle T, K, X, U, Y, \Phi, \alpha, \beta \rangle$ – билинейная система и X' – векторное подпространство пространства X, замкнутое относительно α и β, т.е. $X'\alpha \subseteq X'$ и $X'\beta(u) \subseteq X'$ для всех $u \in U$. Тогда X' называется подпространством состояний пространства состояний X.

(2.3) Определение

Пусть $S = \langle T, K, X, U, Y, \Phi, \alpha, \beta \rangle$ – билинейная система и X' – подпространство состояний пространства X. Если для восьмерки $S' = \langle T, K, X', U, Y, \Phi, \alpha', \beta' \rangle$, где $\alpha' = \alpha|X'$ и $\beta'(u) = \beta(u)|X'$ для всех $u \in U$, существует реализующая пара, то S' называется билинейной подсистемой системы S. Кроме того, если X' – собственное подпространство X, то S' называется собственной подсистемой системы S.

(2.4) Определение

Областью достижимости состояния $x \in X$ билинейной системы $S = \langle T, K, X, U, Y, \Phi, \alpha, \beta \rangle$ называется множество R_x всех таких состояний $x' \in X$, для каждого из которых существует такая входная функция $\vartheta \in V$ и такой момент $t \in T$, что $\lambda(x, \vartheta | [0,t)) = x'$. Каждое состояние $x' \in R_x$ называется достижимым из состояния x.

(2.5) Предложение

Пусть X' – подпространство пространства состояний билинейной системы $S = \langle T, K, X, U, Y, \Phi, \alpha, \beta \rangle$. Тогда для любого $x \in X'$ $R_x \subseteq X'$.

Доказательство

Пусть $x' \in R_x$. Тогда $x' = \lambda(x, \vartheta | [0,t))$ для некоторого $\vartheta \in V$ и $t \in T$. Докажем индукцией по T, что для любого $t \in T$ $\lambda(x, \vartheta | [0,t) \in X'$. При $t=0$ имеем $\lambda(x, \vartheta | [0,0)) = x \in X'$. Предположим, что $\lambda(x, \vartheta | [0,t)) \in X'$ для некоторого t. Тогда $\lambda(x, \vartheta | [0,t+1)) = \lambda(x, \vartheta | [0,t))\alpha + \lambda(x, \vartheta | [0,t))\beta(\vartheta(t)) \in X'$, так как X' замкнуто относительно α и $\beta(\vartheta(t))$. Отсюда по индукции $\lambda(x, \vartheta | [0,t)) \in X'$ для любого $t \in T$. Таким образом, $x' \in X'$. □

(2.6) Предложение

Пусть $S' = \langle T, K, X', U, Y, \Phi, \alpha', \beta' \rangle$ – билинейная подсистема билинейной системы $S = \langle T, K, X, U, Y, \Phi, \alpha, \beta \rangle$ и $\eta' : X \to Y$ – допустимое линейное выходное отображение подсистемы S'. Тогда любое расширение η' до линейного отображения пространства X в пространство Y является допустимым линейным выходным отображением пространства S. В частности, если (x, η') – реализующая пара подсистемы S, то (x, η) – реализующая пара системы S.

Доказательство

Пусть $x \in X'$ – такое состояние, что (x, η') – реализующая пара подсистемы S' и η – произвольное линейное расширение η' до X. По (2.5) для любого $\vartheta \in V$ и $t \in T$ имеем $\lambda(x, \vartheta | [0,t)) \in X'$, тогда $S'_{x\eta'}(\vartheta)(t) = \eta'(\lambda'(x, \vartheta | [0,t))) = \eta'(\lambda(x, \vartheta | [0,t))) = \eta(\lambda(x, \vartheta | [0,t))) = S_{x\eta}(\vartheta)(t)$. Следовательно, $S_{x\eta}(\vartheta) = S'_{x\eta'}(\vartheta) = \phi(\vartheta)$ для любого $\vartheta \in V$. Таким образом, (x, η) является реализующей парой и η является допустимым линейным выходным отображением системы S. □

(2.7) Определение

Билинейным преобразованием билинейной системы $S = \langle T, K, X, U, Y, \Phi, \alpha, \beta \rangle$ в билинейную систему $S' = \langle T, K, X', U, Y, \Phi, \alpha', \beta' \rangle$ называется такое отображение $f : X \to X'$, которое является линейным преобразованием и согласовано с α и β, иными словами, f удовлетворяется условиям:

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \quad \text{для всех} \quad x_1, x_2 \in X;$$
$$f(rx) = r f(x) \quad \text{для всех и} \quad x \in X, \text{ и } r \in K;$$
$$f(x\alpha) = f(x)\alpha' \quad \text{для всех} \quad x \in X;$$
$$f(x\beta(u)) = f(x)\beta'(u) \quad \text{для всех и} \quad x \in X, \text{ и } u \in U.$$

Следует отметить, что билинейное преобразование представляет собой алгебраический гомоморфизм. Отсюда имеем

(2.8) Предложение

Образ билинейного преобразования $f : X \to X'$ является подпространством состояний пространства состояний X', а произведение двух билинейных преобразований есть снова билинейное преобразование. □

В дальнейшем мы будем исследовать отношения между билинейными системами с одними и теми же T, K, U, Y и Φ, т.е. они отличаются друг от друга только пространством состояний X и операциями α и β на нем. Следовательно, для сокращения мы условимся, что верхний индекс J системы S^J всегда означает, что соответствующее пространство состояний и операции на нем, а также переходная функция состояния имеют тот же верхний индекс, т.е. S^J обозначает билинейную систему $\langle T, K, X^J, U, Y, \Phi, \alpha^J, \beta^J \rangle$, а ее переходная функция состояния обозначается через $\lambda^J : X^J \times U^T \times T^* \to X^J$, когда все это не приводит к путанице.

(2.9) Лемма

Пусть S и S' – две билинейные системы и $f : X \to X'$ – их билинейное преобразование. Тогда для любого $x \in X$, $\vartheta \in U^T$ и $t \in T$ выполняется равенство

$$f(\lambda(x, \vartheta | [0,t))) = \lambda'(f(x), \vartheta | [0,t)).$$

Доказательство:

Для произвольного $x \in X$ и $\vartheta \in U^T$ докажем лемму индукцией по T. При $t=0$ $f(\lambda(x, \vartheta | [0,0))) = f(x) = \lambda'(f(x), \vartheta | [0,0))$. Предположим, что для некоторого $t \in T$ $f(\lambda(x, \vartheta | [0,t))) = \lambda'(f(x), \vartheta | [0,t))$. Тогда

$$\begin{aligned} f(\lambda(x, \vartheta | [0,t+1))) &= f(\lambda(x, \vartheta | [0,t))\alpha + \lambda(x, \vartheta | [0,t))\beta(\vartheta(t))), \\ &= f(\lambda(x, \vartheta | [0,t)))\alpha' + f(\lambda(x, \vartheta | [0,t)))\beta'(\vartheta(t)), \\ &= \lambda'(f(x), \vartheta | [0,t))\alpha' + \lambda'(f(x), \vartheta | [0,t))\beta'(\vartheta(t)), \\ &= \lambda'(f(x), \vartheta | [0,t+1)). \end{aligned}$$

Отсюда по индукции $f(\lambda(x, \vartheta | [0,t))) = \lambda'(f(x), \vartheta | [0,t))$ для всех $t \in T$. □

(2.10) Следствие

Пусть $f: X \to X'$ – билинейное преобразование билинейных систем S и S' и $\eta': X' \to Y$ – линейное выходное отображение системы S'. Тогда для любого $x \in X$ выполняется равенство $S_{x\eta} = S'_{f(x)\eta'}$, где $\eta = \eta' f$ – линейное выходное отображение системы S.

Доказательство

Для произвольного $\vartheta \in V$ и $t \in T$ по (2.9) имеем
$S_{x\eta}(\vartheta)(t) = \eta(\lambda(x, \vartheta | [0,t))) = \eta' f(\lambda(x, \vartheta | [0,t))) = \eta'\lambda'(f(x), \vartheta | [0,t))) = S'_{f(x)\eta'}(\vartheta)(t)$. Отсюда $S_{x\eta} = S'_{f(x)\eta'}$. □

(2.11) Определение

Билинейным эквивалентным преобразованием билинейной системы S в билинейную систему S' называется такое билинейное преобразование $f: X \to X'$, образ которого образует билинейную подсистему системы S', иными словами, для восьмерки $S'' = \langle T, K, X'', U, Y, \Phi, \alpha'', \beta'' \rangle$, где $X'' = fX$, $\alpha'' = \alpha' | fX$ и $\beta''(u) = \beta'(u) | fX$ для всех $u \in U$, существует реализующая пара.

(2.12) Предложение

Пусть $f: X \to X'$ и $g: X' \to X''$ – два билинейных эквивалентных преобразования билинейных систем S, S' и S''. При этом f есть отображение на. Тогда произведение gf является билинейным эквивалентным преобразованием системы S в систему S''.

Доказательство

Из (2.8) произведение gf есть билинейное преобразование. Кроме того, образ gfX совпадает с образом gX'. Следовательно, для gfX существует реализующая пара. □

(2.13) Предложение

Пусть $f: X \to X'$ – взаимно однозначное билинейное преобразование билинейной системы S в билинейную систему S'. Тогда f является билинейным эквивалентным преобразованием.

Доказательство

Пусть (x, η) – некоторая реализующая пара системы S. Положим $\eta': fX \to Y : x' \mapsto \eta(f^{-1}(x'))$. Тогда по (2.10) $S_{x\eta} = S'_{f(x)\eta'}$, так как $\eta = \eta' f$. Таким образом, $(f(x), \eta')$ является реализующей парой для fX. □

(2.14) Предложение

Пусть S и S' – две билинейные системы и $f: X \to X'$ – их билинейное преобразование. Тогда f является билинейным эквивалентным преобразованием тогда и только тогда, когда существуют допустимые линейные выходные отображения η системы S и η' системы S', такие, что $\eta = \eta' f$. В частности, если f – билинейное эквивалентное преобразование и (x', η') – реализующая пара системы S', такая, что $x' \in fX$, то $(f^{-1}(x'), \eta' f)$ является реализующей парой системы S.

Доказательство

Если f – билинейное эквивалетное преобразование, то существует реализующая пара (x', η') для образа fX. Пусть x – прообраз состояния x', т.е. $f(x) = x'$. Тогда по (2.10) $S_{x\eta} = S'_{x'\eta'}$, где $\eta = \eta' f$. Следовательно, (x, η) является реализующей парой системы S. Наоборот, если существуют допустимые линейные выходные отображения η и η' систем S и S', соответственно такие, что $\eta = \eta' f$, то по (2.10) для реализующей пары (x, η) системы S имеем $S_{x\eta} = S'_{f(x)\eta'}$. Кроме того, по (2.5) $R_{f(x)} \subseteq fX$. Отсюда для восьмерки $S'' = \langle T, K, X'', U, Y, \Phi, \alpha'', \beta'' \rangle$ (где $X'' = fX$, $\alpha'' = \alpha' | fX$, $\beta''(u) = \beta'(u) | fX$ для всех $u \in U$) и $\eta'' = \eta' | fX$ имеем $S''_{f(x)\eta''} = S'_{f(x)\eta'} = S_{x\eta}$. Следовательно, f является эквивалентным преобразованием. □

Ш. Достижимость билинейных дискретных динамических систем

В этом параграфе мы будем исследовать область и пространство достижимости произвольного начального состояния билинейной системы и установим необходимое и достаточное условие для того, чтобы пространство состояний билинейной системы было достижимым из заданного начального состояния.

(3.1) Определение

Пространство достижимости состояния $x \in X$ билинейной системы S называется подпространством состояний пространства X, порождаемым областью достижимости R_x состояния x.

(3.2) Предложение

Подпространство X' пространства X билинейной системы S является пространством достижимости состояния $x \in X$ тогда и только тогда, когда X' совпадает с подпространством, порождаемым состоянием x.

Доказательство

Обозначим через (R_x) пространство достижимости состояния x и через (x) -пространство, порождаемое состоянием x. Очевидно, что $(x) \subseteq (R_x)$. С другой стороны, по (2,5) $R_x \subseteq (x)$, следовательно, $(R_x) \subseteq (x)$. Отсюда $(R_x) = (x)$. □

(3.3) Предложение

Пусть $f: X \to X'$ - билинейное преобразование билинейных систем S и S'. Тогда для любого $x \in X$ образ области достижимости R_x при преобразовании f совпадает с областью достижимости $R_{f(x)}$ состояния $f(x)$ системы S', т.е. $f | R_x = R_{f(x)}$.

Доказательство

Пусть $x' \in R_x$, тогда существуют $\vartheta \in V$ и $t \in T$ такие, что $x' = \lambda(x, \vartheta | [0,t))$. Отсюда по (2.9) $f(x') = f(\lambda(x, \vartheta|[0,t))) = \lambda'(f(x), \vartheta | [0,t)) \in R_{f(x)}$.
Обратно, если $x'' \in R_{f(x)}$, то по (2.9) $x'' = \lambda'(f(x), \vartheta|[0,t)) = f(\lambda(x, \vartheta | [0,t)))$ для некоторого $\vartheta \in V$ и $t \in T$.
Отсюда $x'' \in f | R_x$. □

(3.4) Определение

Билинейная система S называется достижимой из состояния $x \in X$ тогда и только тогда, когда пространство достижимости состояния x совпадает с X.

Из (3.2) имеем:

(3.5) Предложение

Билинейная система S достижима из состояния $x \in X$ тогда и только тогда, когда x порождает X. □

(3.6) Предложение

Для каждой билинейной системы $S = \langle T, K, X, U, Y, \Phi, \alpha, \beta \rangle$ восьмерка $\bar{S} = \langle T, K, \bar{X}, U, Y, \Phi, \bar{\alpha}, \bar{\beta} \rangle$ (где $\bar{X} = K^{n \times n}$, $\bar{\alpha}: \bar{X} \to \bar{X}: G \mapsto AG$, $\bar{\beta}(u): \bar{X} \to \bar{X}: G \mapsto B(u)G$ для всех $u \in U$) является билинейной системой, которая обладает следующими свойствами:

(I) Для любого состояния $x \in X$ отображение $F_x: \bar{X} \to X: G \mapsto Gx$ является билинейным преобразованием системы $\bar{S}$ в систему S и $R_x = F_x | \bar{R}_I$, где $\bar{R}_I$ - область достижимости состояния единица I пространства $\bar{X}$;

(2) Для каждой реализующей пары (x, η) системы S F_x является билинейным эквивалентным преобразованием системы $\bar{S}$ в систему S, при этом $\bar{S}_{I\bar{\eta}_x} = S_{x\eta}$, где $\bar{\eta}_x = \eta F_x$.

Мы назовем систему $\bar{S}$ операторной системой билинейной системы S.

Доказательство

Очевидно, что $\bar{X}$ с операциями $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ удовлетворяет свойствам пространства состояний билинейной системы. Проверяем отображение F_x. $F_x(G + G') = (G + G')x = Gx + G'x = F_x(G) + F_x(G')$, $F_x(rG) = rGx = rF_x(G)$ (где $r \in K$), $F_x(G\bar{\alpha}) = AGx = F_x(G)\alpha$, $F_x(G\bar{\beta}(u)) = B(u)Gx = F_x(G)\beta(u)$. Отсюда F_x является билинейным преобразованием. Тогда по (3.3) $R_x = F_x | \bar{R}_I$, так как $F_x(I) = Ix = x$.

В частности, если (x, η) - реализующая пара системы S, то по (2.10) $\bar{S}_{I\bar{\eta}_x} = S_{x\eta}$. Следовательно, $(I, \bar{\eta}_x)$ является реализующей парой системы $\bar{S}$. Кроме того, по (2.14) F_x является эквивалентным преобразованием. □

Это предложение показывает существенное свойство операторной системы, такое, что исследование достижимости любого состояния билинейной системы S сводится к исследованию достижимости состояния единица операторной системы $\bar{S}$. Следует отметить, что пространство состояний $\bar{X}$ операторной системы $\bar{S}$ является К-алгеброй и действие операций $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ является умножением в К-алгебре. Ниже мы построим еще другую билинейную систему с пространством состояний, являющимся К-алгеброй, которая играет роль свободной алгебры в классе билинейных дискретных динамических систем.

(3.7) Определение

Под свободным пространством состояний билинейных систем с p-входами мы будем подразумевать такое пространство состояний $\tilde{X}$ (векторное пространство $\tilde{X}$ над полем К с соответствующими операциями $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$), что для произвольной билинейной системы $S = \langle T, K, X, U, Y, \Phi, \alpha, \beta \rangle$ с p входами восьмерка $\tilde{S} = \langle T, K, \tilde{X}, U, Y, \Phi, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \rangle$ является билинейной системой и существует билинейное эквивалентное преобразование системы $\tilde{S}$ в систему S.

Пусть Z - некоторый конечный алфавит и Z^* - свободный моноид конечных последовательностей элементов из Z (единица e является пустой последовательностью). Тогда формальным полиномом S с коэффициентами из поля К и ассоциативными переменными из Z называется формальная сумма

$$S = \sum_{\theta \in Z^*} (S, \theta)\theta \qquad (\text{где } (S, \theta) \in K),$$

такая, что $(s,\theta)=0$ для почти всех $\theta\in Z^*$, кроме конечного числа из Z^*. На множестве формальных полиномов определим операции сложения и умножения следующим образом:

$$(s_1+s_2)=\Big(\sum_{\theta\in Z^*}(s_1,\theta)\theta\Big)+\Big(\sum_{\theta\in Z^*}(s_2,\theta)\theta\Big)=\sum_{\theta\in Z^*}\big((s_1,\theta)+(s_2,\theta)\big)\theta,$$

$$s_1s_2=\Big(\sum_{\theta\in Z^*}(s_1,\theta)\theta\Big)\Big(\sum_{\theta\in Z^*}(s_2,\theta)\theta\Big)=\sum_{\theta\in Z^*}\Big(\sum_{\theta_1\theta_2=\theta}(s_1,\theta_1)(s_2,\theta_2)\Big)\theta.$$

Тогда множество всех формальных полиномов с коэффициентами из поля К и ассоциативными переменными из Z вместе с этими операциями образует К-алгебру, которую мы обозначим через $K\langle Z\rangle$.

(3.8) Предложение

К-алгебра формальных полиномов $K\langle Z\rangle$ с коэффициентами из K и ассоциативными переменными из $Z=\{z_0,z_1,\dots,z_p\}$ вместе с операциями $\tilde\alpha: s\mapsto z_0s$ и $\tilde\beta(u): s\mapsto\sum_{i=1,\dots,p}u_iz_is$ является свободным пространством состояний с p входами, и для любой билинейной системы $S=\langle T,K,X,U,Y,\Phi,\alpha,\beta\rangle$ справедливо следующее:

(1) Для каждого состояния $x\in X$ отображение $\Psi_x:\tilde X\to X$: $s\mapsto\sum_{\theta\in Z^*}(s,\theta)h(\theta)x$ (где $h: Z^*\to K^{n\times n}$ – гомоморфизм моноидов, полученный заменой e на I, z_0 на A и z_i $(i=1,\dots,p)$ на B_i) является билинейным преобразованием системы $\tilde S$ в систему S и $\Psi_x|\tilde R_e=R_x$;

(2) Для каждой реализующей пары (x,η) системы S Ψ_x является эквивалентным преобразованием системы $\tilde S$ в систему S, при этом $\tilde S_{e\eta_x}=S_{x\eta}$, где $\eta_x=\eta\Psi_x$.

Мы назовем систему $\tilde S$ свободной системой билинейной системы S, а преобразование Ψ_x – достижимым преобразованием состояния x.

Доказательство

Очевидно, что $K\langle Z\rangle$ с $\tilde\alpha$ и $\tilde\beta$ образуют пространство состояний билинейной системы. Рассмотрим отображение $\Psi:\tilde X\to K^{n\times n}$: $s\mapsto\sum_{\theta\in Z^*}(s,\theta)h(\theta)$. $\Psi(s_1+s_2)=\Psi\big(\sum_{\theta\in Z^*}((s_1,\theta)+(s_2,\theta))\theta\big)=\sum_{\theta\in Z^*}((s_1,\theta)+(s_2,\theta))h(\theta)=$

$$=\sum_{\theta\in Z^*}(s_1,\theta)h(\theta)+\sum_{\theta\in Z^*}(s_2,\theta)h(\theta)=\Psi(s_1)+\Psi(s_2);$$

$$\Psi(rs)=\Psi\Big(\sum_{\theta\in Z^*}r(s,\theta)\theta\Big)=\sum_{\theta\in Z^*}r(s,\theta)h(\theta)=r\sum_{\theta\in Z^*}(s,\theta)h(\theta)=r\Psi(s);$$

$$\Psi(s\tilde\alpha)=\Psi(z_0s)=\Psi\Big(\sum_{\theta\in Z^*}(s,\theta)z_0\theta\Big)=\sum_{\theta\in Z^*}(s,\theta)Ah(\theta)=A\sum_{\theta\in Z^*}(s,\theta)h(\theta)=$$

$$=A\Psi(s)=\Psi(s)\bar\alpha,\quad \Psi(s\tilde\beta(u))=\Psi\Big(\sum_{i=1,\dots,p}u_iz_is\Big)=\Psi\Big(\sum_{i=1,\dots,p}u_i\Big(\sum_{\theta\in Z^*}(s,\theta)z_i\theta\Big)\Big)=$$

$$=\sum_{i=1,\dots,p}u_i\Big(\sum_{\theta\in Z^*}(s,\theta)B_ih(\theta)\Big)=\sum_{i=1,\dots,p}u_iB_i\Big(\sum_{\theta\in Z^*}(s,\theta)h(\theta)\Big)=\sum_{i=1,\dots,p}u_iB_i\Psi(s)=\Psi(s)\bar\beta(u).$$

Отсюда Ψ является билинейным преобразованием системы $\tilde S$ в операторную систему $\bar S$. Очевидно, что $\Psi_x=F_x\Psi$. Тогда по (3.6) и (2.8) Ψ_x является билинейным преобразованием, а по (3.3) $\Psi_x|\tilde R_e=R_x$, так как $\Psi_x(e)=Ix=x$. В частности, если (x,η) – реализующая пара системы S, то по (2.10) $\tilde S_{e\eta_x}=S_{x\eta}$. Таким образом, (e,η_x) является реализующей парой системы $\tilde S$. Кроме того, по (2.14) Ψ_x является эквивалентным преобразованием. □

Свободный моноид Z^* является базисом векторного пространства $\tilde X$, следовательно, для каждого состояния $x\in X$ матрица достижимого преобразования Ψ_x имеет вид

$$[\Psi_x]=[x,Ax,B_1x,\dots,B_px,A^2x,AB_1x,\dots,AB_px,B_1Ax,B_1^2x,B_1B_2x,\dots],$$

т.е. столбцы индексируются элементами свободного моноида Z^*, а значение каждого столбца равно $h(\theta)x$.

(3.9) Теорема

Пусть задана билинейная система $S=\langle T,K,X,U,Y,\Phi,\alpha,\beta\rangle$. Тогда пространство достижимости любого состояния $x\in X$ совпадает с образом его достижимого преобразования Ψ_x, т.е. размерность его пространства достижимости равна рангу матрицы $[\Psi_x]$. Следовательно, система S достижима из состояния x тогда и только тогда, когда Ψ_x является преобразованием на, или $rank[\Psi_x]=dim X=n$.

Доказательство

Мы обозначим пространство достижимости состояния e в пространстве $\tilde X$ через (Re). Докажем, что $(Re)=\tilde X$. Для этого достаточно показать, что $Z^*\subseteq(Re)$, так как Z^* есть базис пространства $\tilde X$. Покажем это индукцией по длине $\theta\in Z^*$. Пусть $|\theta|=1$, т.е. $\theta=z_j$ для некоторого $j=0,1,\dots,p$. Если $j=0$, то $e\tilde\alpha=z_0e=z_0\in(Re)$. Если $j\neq0$, то при выборе $u_j=1$ и $u_i=0$ для всех $i\neq j$ имеем $e\tilde\beta(u)=\sum_{i=1,\dots,p}u_iz_i=z_j\in(Re)$. Пусть $\theta\in(Re)$ для всех таких $\theta\in Z^*$, что $|\theta|=m$, где m – некоторое положительное целое число. Тогда аналогичным образом получим $z_j\theta\in(Re)$ для всех $j=0,1,\dots,p$. Таким образом, $\theta\in(Re)$ для всех таких $\theta\in Z^*$, что $|\theta|=m+1$. Отсюда по индукции $z^* \subseteq (Re)$. Итак, $(Re) = \tilde{X}$. По (3.2) пространство достижимости состояния x совпадает с пространством, порождаемым состоянием x. Следовательно, согласно свойству алгебраического гомоморфизма оно совпадает с образом преобразования Ψ_x, так как $\Psi_x(e) = x$. Отсюда размерность пространства достижимости состояния x равна рангу матрицы $[\Psi_x]$. Таким образом, система S достижима из состояния x тогда и только тогда, когда Ψ_x является преобразованием на, т.е. $rank[\Psi_x] = dim\, X = n$. □

(3.10) Следствие

Пусть для состояния $x \in X$ $[\Psi_x]_m$ есть матрица, полученная из матрицы достижимого преобразования $[\Psi_x]$ отбрасыванием всех элементов, длина индекса столбца каждого из которых больше m. Тогда если для некоторого числа m $rank[\Psi_x]_m = rank[\Psi_x]_{m+1}$, то $rank[\Psi_x]_m$ есть размерность пространства достижимости состояния x, т.е. $rank[\Psi_x]_m = rank[\Psi_x]$. Более того, среди чисел $0, 1, \ldots, n-1$ существует такое число m.

Доказательство

Пусть $rank[\Psi_x]_m = rank[\Psi_x]_{m+1}$. Это означает, что для любой последовательности $\theta \in z^*$, такой, что $|\theta| = m+1$, имеет место разложение

$$h(\theta)x = \sum_{0 \leq |\theta_i| \leq m} \lambda_i h(\theta_i)x, \qquad \text{где } \lambda_i \in K.$$

Обозначим $B_0 = A$. Тогда для любой $\bar{\theta} \in z^*$, такой, что $|\bar{\theta}| = m+2$, имеем $\bar{\theta} = z_j\theta$ (где $j \in \{0, 1, \ldots, p\}$ и $|\theta| = m+1$) и

$$h(\theta)x = B_j \sum_{0 \leq |\theta_i| \leq m} \lambda_i h(\theta_i)x = B_j \sum_{|\theta_i| = m} \lambda_i h(\theta_i)x + B_j \sum_{0 \leq |\theta_i| \leq m-1} \lambda_i h(\theta_i)x$$

$$= \sum_{|\theta_i| = m} \lambda_i h(z_j\theta_i)x + \sum_{0 \leq |\theta_i| \leq m-1} \lambda_i h(z_j\theta_i)x$$

$$= \sum_{0 \leq |\theta_i| \leq m} \lambda'_i h(\theta_i)x + \sum_{0 \leq |\theta_i| \leq m-1} \lambda_i h(z_j\theta_i)x,$$

где $\lambda'_i \in K$.

Отсюда получим $rank[\Psi_x]_m = rank[\Psi_x]_{m+2}$. Следовательно, по индукции $rank[\Psi_x]_m = rank[\Psi_x]_{m'}$ для всех $m' \geq m$, т.е. $rank[\Psi_x]_m = rank[\Psi_x]$.

Пусть m – минимальное число, такое, что $rank[\Psi_x]_m = rank[\Psi_x]_{m+1}$. Предположим, что $m \geq n$. Тогда по первой части доказательства существует по крайней мере $m+1$ линейно независимых векторов $x, h(\theta_1)x, \ldots, h(\theta_m)x$, таких, что $|\theta_1| = 1, \ldots, |\theta_m| = m$. Это противоречит тому, что для

множества n-мерных векторов максимальное число линейно независимых векторов равно n. Следовательно, $m \leq n-1$.

Наконец, из (3.9) вытекает справедливость следствия. □

ЛИТЕРАТУРА

I. Kalman R.E. Lecture on Controlobility and Observability. Centro Inter. Matematico, Bologna, Italy, 1968.

2. Калман Р., Фалб П.Л., Арбиб М.А. Очерки по математической теории систем. "Мир", М., 1971.

3. Математические методы в теории систем. Под ред. Журавлева, "Мир", М., 1979.

4. Isidori A. IEEE Trans. Automat. Contr. vol. AC-18, pp.623-631, 1973.

5. d'Alessandro P., Isidori A., Ruberti A. SIAM J.Control, vol.12, pp.517-535, 1974.

6. Fliess M. C.R. Acad. Sci., T.277, serie A, p.923-926, 1973.

7. Fliess M. J.Math. pures et appl., T.53, Fasc.2, p.197-224, 1974.

8. Fliess M. C.R. Acad. Sci., T. 278, serie A, p.1147-1149, 1974.

9. Fliess M. C.R. Acad. Sci., T.279, serie A, p.243-246, 1974.

10. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику "Наука", М., 1979.

11. Ву Суан Минь. ОИЯИ, 5-81-266, Дубна, 1981.

12. Ву Суан Минь. ОИЯИ, 5-81-267, Дубна, 1981.

13. Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. Физматгиз, М., 1962.

14. Кон. П. Универсальная алгебра. "Мир", М., 1968.

Рукопись поступила в издательский отдел
1 сентября 1982 года.

Ву Суан Минь.

P5-82-643

Эквивалентные преобразования и достижимость билинейных дискретных динамических систем.

Разработаны элементы алгебраической теории эквивалентных преобразований билинейных дискретных динамических систем, операторной и свободной билинейной систем. С ее помощью получено необходимое и достаточное условие достижимости билинейных дискретных динамических систем с произвольными многомерными входным и выходным пространствами.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Vu Xuan Minh.

P5-82-643

Equivalent Transformations and Achievement of Bilinear Discrete-Time Dynamical Systems

The elements of the algebraic theory of equivalent transformations of belinear discrete-time dynamical systems, operating and free belinear systems are elaborated. The necessary and sufficient condition of achievement of belinear discrete-time dynamical systems with any multidimensional input and output spaces is obtained with the use of the elaborated theory.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques an Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

Перевод автора.