**ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ**

ДУБНА

Р5-82-544

В.Г.Одинцов

МЕТОД ОБРАЩЕНИЯ ОДНОГО СПЕЦИАЛЬНОГО КЛАССА БЛОЧНЫХ МАТРИЦ

Направлено в "Журнал вычислительной математики и математической физики"

1982

В настоящей работе описан способ и приведены эффективные алгоритмы обращения блочных симметричных матриц вида

$$A = \begin{bmatrix} W_1 & & 0 & V_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & W_m & V_m \\ V_1^T & \dots & V_m^T & U_{m+1} \end{bmatrix}, \qquad /1/^*$$

где $\{W_k\}_{k=1}^m$, $\{V_k\}_{k=1}^m$, U_{m+1} -квадратные неособенные матрицы, имеющие одинаковые размерности.

Во многих прикладных задачах возникают системы линейных алгебраических уравнений высокого порядка $Ax=G$, в которых либо матрица A имеет вид /1/, либо ее можно легко привести к этому виду с помощью простых преобразований. При решении упомянутых линейных систем прямым способом $x=A^{-1}G$ могут возникнуть трудности, связанные с обращением матрицы A. В некоторых случаях применение традиционных методов обращения матрицы A при расчетах на ЭВМ становится невозможным в связи со значительными размерами последней. Могут встретиться, например, следующие ситуации:

а/ размеры матрицы A превышают размеры доступной области оперативной памяти ЭВМ;

б/ вычисление детерминанта матрицы A и элементов обратной матрицы сопровождается переполнением слова ЭВМ либо потерей его порядка.

Способ обращения матрицы A, описанный ниже, помогает во многих случаях избежать указанных трудностей, поскольку позволяет производить обращение матрицы поблочно с использованием ограниченного набора элементов исходной матрицы.

Теорема. Если A - неособенная симметричная блочная матрица вида /1/, элементы-блоки которой $\{W_k\}_{k=1}^m$, $\{V_k\}_{k=1}^m$, U_{m+1} - квадратные неособенные матрицы, имеющие одинаковые размерности, а матрица

---

*Здесь и везде далее знак T означает операцию транспонирования.

$$B = \begin{bmatrix} \beta_1+\beta_2 & -\beta_2 & & & 0 \\ -\beta_2^T & \beta_2+\beta_3 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -\beta_m \\ 0 & & & -\beta_m^T & \beta_m+\beta_{m+1} \end{bmatrix}, \quad \beta_k = (V_k^T W^{-1} V_k)^{-1},\ k = 1,\dots,m, \quad \beta_{m+1} = -U_{m+1}^{-1} \qquad /2/$$

- неособенная матрица с отличными от нуля главными минорами и $\{\beta_k\}_{k=1}^{m}$ - неособенные матрицы, то для A^{-1} справедливо выражение

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \mu_1\rho_1 + W_1^{-1} & \dots & \mu_1\rho_k & \dots & \mu_1\rho_j & \dots & \mu_1\rho_m & \mu_1 R + M_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \rho_k^T\mu_1^T & \dots & \mu_k\rho_k + W_k^{-1} & \dots & \mu_k\rho_j & \dots & \mu_k\rho_m & \mu_k R + M_k \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \rho_j^T\mu_1^T & \dots & \rho_j^T\mu_k^T & \dots & \mu_j\rho_j + W_j^{-1} & \dots & \mu_j\rho_m & \mu_j R + M_j \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \rho_m^T\mu_1^T & \dots & \rho_m^T\mu_k & \dots & \rho_m^T\mu_j & \dots & \mu_m\rho_m + W_m^{-1} & \mu_m R + M_m \\ R^T\mu_1^T + M_1^T & \dots & R^T\mu_k^T + M_k^T & \dots & R^T\mu_j^T + M_j^T & \dots & R^T\mu_m^T + M_m^T & D \end{bmatrix}, \qquad /3/$$

где

$$\mu_k = W_k^{-1} V_k C, \quad \rho_k = V_k^T W_k^{-1}, \quad M_k = -W_k^{-1} V_k U_{m+1}^{-1}, \quad k = 1,\dots,m;$$

$$C = -\Big(\sum_{i=1}^{m+1} \beta_i^{-1}\Big)^{-1}, \quad R = -\Big(\sum_{i=1}^{m} \beta_i^{-1}\Big) U_{m+1}^{-1},$$

$$D = U_{m+1}^{-1} + U_{m+1}^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \beta_i^{-1} C \beta_j^{-1} + \sum_{i=1}^{m} \beta_i^{-1}\Big) U_{m+1}^{-1}.$$

Доказательство. Перепишем матрицу A в виде

$$A = \begin{bmatrix} W & H \\ H^T & U_{m+1} \end{bmatrix}. \qquad /4/$$

Здесь $W = \begin{bmatrix} W_1 & & \\ & \ddots & \\ & & W_m \end{bmatrix}$ - квазидиагональная матрица, $H = \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_m \end{bmatrix}$ - квазивектор. Обратная к A матрица согласно формуле Фробениуса [1] обращения блочных матриц будет иметь вид

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} F^{-1} & -F^{-1} H U_{m+1}^{-1} \\ -U_{m+1}^{-1} H^T F^{-1} & U_{m+1}^{-1} + U_{m+1}^{-1} H^T F^{-1} H U_{m+1}^{-1} \end{bmatrix}, \qquad /5/$$

где

$$F = W - H U_{m+1}^{-1} H^T.$$

Факторизуем матрицу F, представив ее следующим образом:

$$F = \begin{bmatrix} W_1 & & \\ & \ddots & \\ & & W_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V_1 & & \\ & \ddots & \\ & & V_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & & \\ \vdots & \ddots & \\ E & \dots & E \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & U_{m+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & & \\ \vdots & \ddots & \\ E & \dots & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 & & \\ & \ddots & \\ & & V_m \end{bmatrix}^T, \qquad /6/$$

E - единичная матрица.

Выполнив над /6/ преобразования, связанные с последовательным умножением /6/ слева на обратные матрицы

$$\begin{bmatrix} V_1 & & \\ & \ddots & \\ & & V_m \end{bmatrix}^{-1} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} E & & \\ \vdots & \ddots & \\ E & \dots & E \end{bmatrix}^{-T}$$

и их прямые, а справа на такие же транспонированные матрицы, получим для F^{-1} выражение

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} V_1 & & \\ & \ddots & \\ & & V_m \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} E & & & \\ -E & E & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -E & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1+\beta_2 & -\beta_2 & & \\ -\beta_2^T & \beta_2+\beta_3 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -\beta_m \\ & & -\beta_m^T & \beta_m+\beta_{m+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} E & -E & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -E \\ & & & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 & & \\ & \ddots & \\ & & V_m \end{bmatrix}^{-1}, \qquad /7/$$

где

$$\beta_k = (V_k^T W_k^{-1} V_k)^{-1}, \quad k = 1,\dots,m; \quad \beta_k^T = \beta_k.$$

Центральная в /7/ матрица B по условию есть симметричная квазитрехдиагональная матрица с отличными от нуля главными минорами, у которой $\{\beta_k\}_{k=1}^{m}$ - неособенные матрицы.

Следовательно, к B применима теорема [2], согласно которой для элементов-блоков матрицы B^{-1} справедливы выражения

$$(B^{-1})_{j\ell} = \begin{cases} \tilde V_j \tilde W_\ell & j \le \ell, \quad j = 1,2,\dots,m, \\ \tilde W_j^T \tilde V_\ell^T & \ell \le j, \quad \ell = 1,2,\dots,m, \end{cases} \qquad /8/$$

где $\tilde V_j$ и $\tilde W_\ell$ определяются по рекурсивным формулам /3/

$$\tilde W_{\ell-1} = -(\tilde W_\ell b_\ell + \tilde W_{\ell+1} a_{\ell+1}^T) a_\ell^{-1}, \quad \ell = m, m-1, \dots, 1,$$
$$\tilde V_{j+1} = -a_{j+1}^{-1} (b_j \tilde V_j + a_j \tilde V_{j-1}), \quad j = 1,2,\dots,m. \qquad /9/$$

Здесь

$$a_1 = a_{m+1} = E, \quad \tilde V_0 = \tilde W_{m+1} = 0, \quad \tilde W_m = (-E)^m, \quad \tilde V_1 = -\tilde W_0^{-1},$$
$$a_k = -\beta_k, \quad k = 2,\dots,m; \quad b_k = \beta_k + \beta_{k+1}, \quad k = 1,2,\dots,m. \qquad /10/$$

Учитывая /10/ и тот факт, что $\beta_{m+1}\beta_{m+1}^{-1} = E$, перепишем выражение /9/ для $\tilde W_{\ell-1}$ в виде

$$\tilde W_{m-\ell} = (-E)^m \beta_{m+1} \sum_{i=m-\ell+1}^{m+1} \beta_i^{-1}, \quad \ell = 0,1,\dots,m \qquad /11/$$

или

$$\tilde W_k = (-E)^m \beta_{m+1} \sum_{i=k+1}^{m+1} \beta_i^{-1}, \quad k = 0,1,\dots,m. \qquad /12/$$

Принимая во внимание, что $\tilde V_1 = -\tilde W_0^{-1} = \beta_1^{-1} (\sum_{i=1}^{m+1} \beta_i^{-1})^{-1} \beta_{m+1}^{-1} (-E)^m$, $\beta_1^{-1}\beta_1 = E$, получим для $\tilde V_{j+1}$ в /9/ следующую формулу:

$$\tilde V_k = (\sum_{i=1}^{k} \beta_i^{-1}) \beta_1 \tilde V_1 = (\sum_{i=1}^{k} \beta_i^{-1})(\sum_{i=1}^{m+1} \beta_i^{-1})^{-1} \beta_{m+1}^{-1} (-E)^m, \ k=1,\dots,m.$$

Перемножив в /7/ матрицы с учетом выражений /8/, /12/ и /13/, получим для матрицы

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} V_1 & & \\ & \ddots & \\ & & V_m \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \beta_1^{-1} C \beta_1^{-1} + \beta_1^{-1} & \cdots & \beta_1^{-1} C \beta_j^{-1} & \cdots & \beta_1^{-1} C \beta_m^{-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \beta_j^{-T} C^T \beta_1^{-T} & \cdots & \beta_j^{-1} C \beta_j^{-1} + \beta_j^{-1} & \cdots & \beta_j^{-1} C \beta_m^{-1} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_m^{-T} C^T \beta_1^{-T} & \cdots & \beta_m^{-T} C^T \beta_j^{-T} & \cdots & \beta_m^{-1} C \beta_m^{-1} + \beta_m^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 & & \\ & \ddots & \\ & & V_m \end{bmatrix}^{-1},$$

где

$$C = -(\sum_{i=1}^{m+1} \beta_i^{-1})^{-1}, \quad C^T = C.$$

Далее, перемножая матрицы в /14/ и вводя обозначения $\mu_k = W_k^{-1} V_k C$, $\rho_k = V_k^T W_k^{-1}$, $k = 1,2,\dots,m$, представим матрицу F^{-1} в следующем виде:

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} \mu_1\rho_1 + W_1^{-1} & \cdots & \mu_1\rho_k & \cdots & \mu_1\rho_m \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \rho_k^T\mu_1^T & \cdots & \mu_k\rho_k + W_k^{-1} & \cdots & \mu_k\rho_m \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_m^T\mu_1^T & \cdots & \rho_m^T\mu_k^T & \cdots & \mu_m\rho_m + W_m^{-1} \end{bmatrix}. \qquad /15/$$

Подставив /15/ в /5/ и выполнив соответствующие перемножения матриц, получим для A^{-1} окончательное выражение/3/.

Теорема доказана.

Сделаем некоторые замечания относительно обращения блочных симметричных неособенных матриц вида

$$A = \begin{bmatrix} W_1 & U_2 & \cdots & Z_k & & & V_1 \\ U_2^T & \ddots & \ddots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & Z_m & \vdots \\ Z_k^T & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \ddots & & \ddots & \ddots & U_m & V_{m-1} \\ & & Z_m^T & \cdots & U_m^T & W_m & V_m \\ V_1^T & \cdots & & \cdots & V_{m-1}^T & V_m^T & U_{m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W & H \\ H^T & U_{m+1} \end{bmatrix}, \qquad /16/$$

где $\{W_i\}_{i=1}^m, \{U_i\}_{i=2}^{m+1}, \dots, \{Z_i\}_{i=k}^m, \{V_i\}_{i=1}^m$ – матрицы одинаковой размерности $[\ell, \ell]$, а $\{V_i\}_{i=1}^m$, U_{m+1} – неособенные, W-квази-n-диагональная матрица $n = 2k-1$, $k = 1,2,\dots,n_1$.

Выполнив над A преобразования, аналогичные /5/-/7/, представим центральную в /7/ матрицу B в виде:

$$B = \begin{bmatrix} \tilde W_1 & \tilde U_2 & \cdots & \tilde Z_k & \tilde P_{k+1} & \\ \tilde U_2^T & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \tilde P_m \\ \tilde Z_k^T & & \ddots & \ddots & \ddots & \tilde Z_m \\ \tilde P_{k+1}^T & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \ddots & & & \ddots & \tilde U_m \\ & & \tilde P_m^T & \tilde Z_m^T & \cdots \ \tilde U_m^T & \tilde W_m \end{bmatrix} \qquad /17/$$

Матрица B является квази- $(n+2)$-диагональной симметричной матрицей, $n+2=2k+1$, $k=1,2,\dots,n_1$.

Эту матрицу всегда можно представить как квазитрехдиагональную, например, следующим способом:

$$B=\begin{bmatrix} \tilde{b}_1 & \tilde{a}_2 & & & \\ \tilde{a}_2^T & \tilde{b}_2 & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \tilde{a}_{m_1} \\ & & & \tilde{a}_{m_1}^T & \tilde{b}_{m_1} \end{bmatrix} . \qquad /18/$$

Здесь $\{\tilde{b}_j\}_{j=1}^{m_1-1}$, $\{\tilde{a}_j\}_{j=2}^{m_1-1}$ - квадратные матрицы размерности

$[\ell_1,\ell_1]$, $\ell_1=[\frac{n}{2}]\cdot\ell$, $n=2k+1$, $k=1,\dots,n_1$; $m_1=[\frac{m}{[n/2]}]+1$;

$\tilde{b}_{m_1}$ - квадратная матрица размерности $[\ell_1,\ell_1]$ или $[\ell_2,\ell_2]$;

$\ell_2=(m-[\frac{m}{[n/2]}][\frac{n}{2}])$;

$\tilde{a}_{m_1}$ - либо квадратная матрица размерности $[\ell_1,\ell_1]$, либо прямоугольная размерности $[\ell_1,\ell_2']$.

Если B - неособенная матрица с отличными от нуля главными минорами, то для ее обращения применимы способы, описанные в работе /2/. В частности, если $\{\tilde{b}_j\}_{j=1}^{m_1}$ - квадратные, а $\{\tilde{a}_j\}_{j=2}^{m_1}$ - квадратные и неособенные, то для элементов-блоков матрицы B^{-1} справедливы выражения /8/-/9/.

Выполнив обращение матрицы B одним из указанных в работе /2/ и настоящей работе способов и произведя перемножения матриц в /7/ и /5/, получим окончательное выражение для A^{-1}.

Описанные выше алгоритмы обращения блочных матриц вида /1/ и /16/ были реализованы в виде программ для ЕС ЭВМ и использовались при расчете геометрических констант экспериментальной установки ГИПЕРОН /4/.

Автору принятно выразить свою признательность В.П.Джелепову, Ю.А.Будагову и В.Б.Флягину за постоянный интерес к работе, Е.П.Жидкову, Г.А.Емельяненко за критические замечания и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. "Наука", М., 1967.
2. Емельяненко Г.А. ОИЯИ, Р11-6933, Дубна, 1973.
3. Будагов Ю.А. и др. ОИЯИ, Р10-9950, Дубна, 1976.
4. Акименко С.А. и др. ОИЯИ, 1-8948, Дубна, 1975.

Рукопись поступила в издательский отдел
9 июля 1982 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Одинцов В.Г. Метод обращения одного специального класса блочных матриц P5-82-544

Описан метод и приведены эффективные алгоритмы обращения блочных квазидиагональных окаймленных симметричных матриц. Доказана теорема о существовании матриц, обратных к указанным, и приведен их конкретный вид. Практическая ценность работы заключается в возможности поблочного обращения рассматриваемого класса матриц сколь угодно высокого порядка.

Работа выполнена в Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Odintsov V.G. Method of Inversion of a Special Class of Block Matrices P5-82-544

The method and effective algorithm of inversion of block quasidiagonal outline symmteric matrices are presented. The theorem about the existense of matrixes opposite to the mentioned is proved and their concrete representationis described. The practical value of the work is the possibility of inversion by blocks of the described class of matrix of unlimited great dimension.

The investigation has been performed at the Laboratory of Nuclear Problems, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

Перевод О.С.Виноградовой.