сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5-82-412

В.С.Герджиков, М.И.Иванов

ДИАГОНАЛЬ РЕЗОЛЬВЕНТЫ И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЛАКСА ДЛЯ РАЗНОСТНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

1982

1. В литературе известен ряд важных разностных эволюционных уравнений /РЭУ/, точно решаемых методом обратной задачи рассеяния /МОЗР/ [1,2]. Бо́льшая часть из них связана с разностными аналогами систем Штурма-Лиувилля и Захарова-Шабата. Для них уже известен ряд результатов, включающих: а/ солитонные решения и бесконечный набор законов сохранения; б/ описание класса РЭУ; в/ интерпретацию МОЗР как обобщенное преобразование Фурье; г/ полную интегрируемость РЭУ и явный вид переменных действие-угол /см. [1-12]/.

В настоящей работе мы рассмотрим РЭУ, связанные с разностным аналогом системы Захарова-Шабата:

$$\psi_{n+1}(z) = L_n(z)\psi_n(z), \qquad L_n(z) = E(z) + Q_n,$$

$$E(z) = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix}, \qquad Q_n = \begin{pmatrix} 0 & q_n \\ r_n & 0 \end{pmatrix}. \qquad /1/$$

Следуя Лаксу, их можно представить как условия совместности двух линейных задач: задачи /1/ и

$$i\frac{d\psi_n(z)}{dt} = M_n^{(f)}(z)\psi_n(z) - \psi_n(z)\sigma_3 f(z^2), \qquad /2/$$

где $f(z^2)$ - скалярная функция z^2, не зависящая от t и n. Рекуррентный способ вычисления $M_n^{(f)}(z)$ предложен в работе [4]. В ней Абловиц и Ладик рассматривали более общую, на первый взгляд, систему /мы запишем ее в виде, предложенном в [8] /:

$$u_{n+1}(\zeta) = \mathfrak{L}_n(\zeta)u_n(\zeta),$$

$$\mathfrak{L}_n(\zeta) = (\mu_n\nu_n)^{-1/2}\begin{pmatrix} 1 & S_n \\ T_n & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \zeta & \tilde{Q}_n \\ \tilde{R}_n & \zeta^{-1} \end{pmatrix}, \qquad /3/$$

$$\mu_n = 1 - \tilde{Q}_n\tilde{R}_n, \quad \nu_n = 1 - S_nT_n.$$

Оказывается, однако, что системы /1/ и /3/ эквивалентны *.

---

* Авторы благодарны И.Т.Хабибулину за это замечание.

Действительно, нетрудно увидеть, что если потенциалы и решения /1/ и /3/ связаны соотношениями:

$$S_n = q_{2n+1}, \quad \tilde{Q}_n = q_{2n}, \quad T_n = r_{2n+1}, \quad \tilde{R}_n = r_{2n},$$

$$u_n(\zeta)|_{\zeta=z^2} = \prod_{k=-\infty}^{2n-1} h_k E^{-1/2}(z)\psi_{2n}(z)E^{1/2}(z), \quad h_k = 1 - q_k r_k,$$

то мы получим

$$\mathfrak{L}_n(\zeta)|_{\zeta=z^2} = (h_{2n}h_{2n+1})^{-1/2} E^{-1/2}(z) L_{2n+1}(z) L_{2n}(z) E^{1/2}(z).$$

В результате все объекты, связанные с системой /1/, такие, как РЭУ, законы сохранения, гамильтоновские структуры и др., переходят в соответствующие объекты системы /3/. Поэтому мы ограничимся рассмотрением системы /1/.

Настоящая работа является непосредственным продолжением /11/. В разделе 2 приведены нужные в дальнейшем факты из прямой и обратной задачи рассеяния системы /1/ /см. /2,4,13/ /. В работе /11/ подробно обсуждалась важность разложений по "квадратам" решений системы /1/ и оператора Λ, для которого эти "квадраты" являются собственными функциями. При этом существенную роль играла функция $G_{nm}(z)$ /см. формулу /9//, для которой в разделе 3: а/ получено спектральное разложение и б/ показано, что $G_{nm}(z)$ является функцией Грина преобразования Кэли от оператора Λ. Это один из основных элементов построения спектральной теории оператора Λ, в котором проявляется специфика разностной задачи /1/; остальные этапы строятся аналогично работам /14/.

В разделе 4 вводится диагональ резольвенты $R_n(z)$ системы /1/ и показывается, что она, как и в непрерывном случае /15,16/, является порождающим функционалом представлений Лакса и законов сохранения для РЭУ. Получены также компактные выражения для $R_n(z)$ через оператор Λ.

В приложении приводится краткий вывод соотношения /17/, при помощи которого доказывается биортогональность "квадратов" решений системы /1/.

2. Начнем с перечисления некоторых известных фактов из прямой и обратной задачи рассеяния системы /1/ с потенциалом Q_n, удовлетворяющим условиям

$$0 < \prod_{k=-\infty}^{\infty} |h_k| < \infty, \qquad h_k = 1 - q_k r_k, \qquad /4/$$
$$\lim_{n\to\pm\infty} w_n n^k = 0, \qquad k = 0,1,2,\ldots, \qquad w_n = \begin{pmatrix} q_n \\ -r_n \end{pmatrix}.$$

Эти условия обеспечивают существование и свойства аналитичности решений Йоста системы /1/, определяемые при помощи:

$$\lim_{n\to-\infty} \psi_n(z)E^{-n}(z) = I, \qquad \lim_{n\to\infty} \phi_n(z)E^{-n}(z) = I,$$
$$\psi_n(z) = \| \psi^-, \psi^+ \|, \qquad \phi_n(z) = \| \phi^+, \phi^- \|.$$

Столбцы ψ^+, ϕ^+ (ϕ^-, ψ^-) аналитичны при $|z|>1$ ($|z|<1$). Введем матрицу перехода:

$$\phi_n(z) = \psi_n(z)S(z), \qquad S(z) = \begin{pmatrix} a^+, & -b^- \\ b^+, & a^- \end{pmatrix}, \qquad /5/$$
$$\det S(z) = v = \prod_{k=-\infty}^{\infty} h_k,$$

и фундаментальные решения χ^+, χ^-:

$$\chi^+(z) = \| \phi^+, \psi^+ \|, \qquad \chi^-(z) = \| \psi^-, \phi^- \|,$$
$$\det \chi_n^{\pm}(z) = v_n^{-1} a^{\pm}(z), \qquad v_n = \prod_{k=n}^{\infty} h_k, \qquad /6/$$

аналитические при $|z|>1$, $|z|<1$. Из них нетрудно построить ядро резольвенты системы /1/:

$$\mathcal{R}_{nm}(z) = \mathcal{R}^{\pm}_{nm}(z), \qquad |z| \gtrless 1, \qquad \Theta^+_{n-m} + \Theta^-_{m-n} = -I\delta_{nm},$$
$$\mathcal{R}^{\pm}_{nm}(z) = \chi^{\pm}_n(z)\,\Theta^{\pm}_{n-m}\,(\chi^{\pm}_{m+1}(z))^{-1}, \qquad \Theta^+_{n-m} = \begin{cases} \mathrm{diag}(0,1), & n > m, \\ \mathrm{diag}(-1,0), & n \le m. \end{cases} \qquad /7/$$

Действительно, из /1/ непосредственно следует, что $\mathcal{R}_{n+1,m}(z) - L_n(z)\mathcal{R}_{nm}(z) = \delta_{nm}$, а /4/ обеспечивает то, что $\mathcal{R}_{nm}(z)$ при $|z| \ne 1$ является ядром ограниченного оператора, аналитического при всех $|z| \ne 1$, за исключением точек дискретного спектра $z_{\alpha\pm}$, в которых $a^{\pm}(z_{\alpha\pm}) = 0$ /см. /6//. Для простоты в дальнейшем будем предполагать, что у $a^{\pm}(z)$ конечное число простых нулей.

<u>Замечание</u>. Если $\psi_n(z)$ - решение /1/, то $(-1)^n \sigma_3 \psi_n(-z)\sigma_3$ тоже будет решением /1/.

Из этого замечания следует, что $a^{\pm}(z)$ ($b^{\pm}(z)$) - четные /нечетные/ функции z. Таким образом, если $a^{\pm}(z_{\alpha\pm}) = 0$, то и $a^{\pm}(-z_{\alpha\pm}) = 0$.

Обратная задача рассеяния для системы /1/ подробно рассматривалась в работах [/2,4,13/]. Не останавливаясь на ее решении, отметим лишь, что потенциал Q_n восстанавливается однозначно по следующему минимальному набору данных рассеяния $\mathcal{T} = \mathcal{T}^{+} \cup \mathcal{T}^{-}$:

$$\mathcal{T}^{\pm} \equiv \{\rho^{\pm}(z) = -\rho^{\pm}(-z),\ \ z \in S^1,\ \ c^{\pm}_{\alpha},\ z_{\alpha\pm},\ |z_{\alpha\pm}| \gtrless 1,\ \ \mathrm{Re}\, z_{\alpha\pm} > 0\},$$

$$\rho^{\pm}(z) = b^{\pm}/a^{\pm}(z), \qquad c^{\pm}_{\alpha} = b^{\pm}_{\alpha}/\dot{a}^{\pm}_{\alpha}, \qquad \dot{a}^{\pm}_{\alpha} = \frac{da^{\pm}}{dz}\Big|_{z = z_{\alpha\pm}}, \qquad /8/$$

$$b^{\pm}_{\alpha}:\ \phi^{\pm}_{n}(z_{\alpha\pm}) = b^{\pm}_{\alpha}\psi^{\pm}_{n}(z_{\alpha\pm}),$$

где S^1 - единичная окружность. Матрица перехода $S(z)$ восстанавливается по набору /8/ при помощи дисперсионных соотношений:

$$\ln a^{+}(z) = \frac{1}{4\pi i}\oint_{S^1}\frac{d\zeta^2}{\zeta^2 - z^2}\ln(1+\rho^{+}\rho^{-}) + \sum_{\alpha=1}^{N}\ln\frac{z^2 - z^2_{\alpha+}}{z^2 - z^2_{\alpha-}}, \qquad |z| > 1,$$

$$-\ln a^{-}(z) = \frac{1}{4\pi i}\oint_{S^1}\frac{d\zeta^2 z^2}{\zeta^2(\zeta^2 - z^2)}\ln(1+\rho^{+}\rho^{-}) + \sum_{\alpha=1}^{N}\ln\frac{z^2 - z^2_{\alpha+}}{z^2 - z^2_{\alpha-}}\ \frac{z^2_{\alpha-}}{z^2_{\alpha+}}, \qquad |z| < 1.$$

3. Для описания класса РЭУ и их гамильтоновской интерпретации важную роль играют разложения по "квадратам" решений системы /1/. В [/11/] была доказана полнота систем $\{\Psi\}$ и $\{\Phi\}$:

$$\{\Psi\} = \{\Psi^{\pm}_{n}(z),\ \ z \in S^1;\ \ \Psi^{\pm}_{n,\alpha},\ \dot{\Psi}^{\pm}_{n,\alpha},\ \ \alpha = 1,\dots,N\},$$

$$\{\Phi\} \equiv \{\Phi^{\pm}_{n}(z),\ \ z \in S^1;\ \ \Phi^{\pm}_{n,\alpha},\ \dot{\Phi}^{\pm}_{n,\alpha},\ \ \alpha = 1,\dots,N\},$$

$$\Psi^{\pm}_{n}(z) = v_n \psi^{\pm}_{n} \circ \psi^{\pm}_{n}(z), \quad \Phi^{\pm}_{n} = v_n \phi^{\pm}_{n} \circ \phi^{\pm}_{n}(z), \quad \phi_n \circ \psi_m = \begin{pmatrix} \phi^{(1)}_{n}\psi^{(1)}_{m} \\ \phi^{(2)}_{n}\psi^{(2)}_{m} \end{pmatrix},$$

$$\Psi^{\pm}_{n,\alpha} = \Psi^{\pm}_{n}(z_{\alpha\pm}), \quad \dot{\Psi}^{\pm}_{n,\alpha} = \frac{d}{dz}\Psi^{\pm}_{n}(z)\Big|_{z = z_{\alpha\pm}} \quad \text{и т.д.}$$

Для этого применялся метод контурного интегрирования к интегралу:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_+}\frac{dz}{z}G^{+}_{nm}(z) - \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_-}\frac{dz}{z}G^{-}_{nm}(z),$$

где функция $G_{nm}(z) = G^{\pm}_{nm}(z)$, $|z| \gtrless 1$ имеет следующий вид:*

$$G^{\pm}_{nm}(z) = \frac{2}{(a^{\pm}(z))^2}\{\Psi^{\pm}_{n}(z)\tilde{\Phi}^{\pm}_{m}(z)\theta_{n-m} +$$

$$+ \theta_{m-n}[2(\phi^{\pm}_{n} \circ \psi^{\pm}_{n+1})(z)\widetilde{(\phi^{\pm}_{m+1} \circ \psi^{\pm}_{m})}(z) - \Phi^{\pm}_{n}(z)\tilde{\Psi}^{\pm}_{m}(z)]\}, \qquad /9/$$

$$\theta_{n-m} = \begin{cases} 1, & n > m, \\ 1/2, & n = m, \\ 0, & n < m, \end{cases} \qquad \tilde{\Phi}_m = (\Phi^{(2)}_{m}, -\Phi^{(1)}_{m}).$$

Контуры $\gamma_+ = S^1 \cup \bar{S}^{\infty}$, $\gamma_- = S^1 \cup \bar{S}^{0}$, где S^1 - положительно ориентированная единичная окружность, а $\bar{S}^{\infty}$ и $\bar{S}^{0}$ - отрицательно ориентированные окружности бесконечно большого и бесконечно малого радиусов. В результате получаем

$$h_n\delta_{nm} = \frac{i}{2\pi}\oint_{S^1}\frac{dz}{z}\Big[\frac{\Psi^{+}_{n}(z)\tilde{\Phi}^{+}_{m}(z)}{(a^{+}(z))^2} - \frac{\Psi^{-}_{n}(z)\tilde{\Phi}^{-}_{m}(z)}{(a^{-}(z))^2}\Big] -$$

$$-2\sum_{\alpha=1}^{N}(X^{+}_{nm;\alpha} + X^{-}_{nm;\alpha}), \qquad /10/$$

$$X^{\pm}_{nm;\alpha} = \frac{1}{z_{\alpha\pm}(\dot{a}^{\pm}_{\alpha})}[\dot{\Psi}^{\pm}_{n,\alpha}\tilde{\Phi}^{\pm}_{m,\alpha} + \Psi^{\pm}_{n,\alpha}\dot{\tilde{\Phi}}^{\pm}_{m,\alpha}] - \frac{\dot{a}^{\pm}_{\alpha} + z_{\alpha\pm}\ddot{a}^{\pm}_{\alpha}}{z_{\alpha\pm}(\dot{a}^{\pm}_{\alpha})}\Psi^{\pm}_{n,\alpha}\tilde{\Phi}^{\pm}_{m,\alpha}.$$

Естественно наряду с системами $\{\Psi\}$ и $\{\Phi\}$ ввести операторы $\Lambda_{\pm}$, обладающие свойствами

$$\Lambda_{+}\Psi^{\pm}_{n}(z) = z^2\Psi^{\pm}_{n}(z), \qquad \Lambda_{-}\Phi^{\pm}_{n}(z) = z^2\Phi^{\pm}_{n}(z). \qquad /11/$$

Явный вид этих операторов и описание класса РЭУ были получены в работах [/4-6,8,10-12/]. Здесь нам будет удобно факторизовать их в следующем виде:

$$\Lambda_{\pm} = \Lambda_{2\pm}\Lambda_{1\pm}, \quad \Lambda_{1+}\Psi^{\pm}_{n}(z) = z\bar{\Psi}^{\pm}_{n}(z), \quad \Lambda_{2+}\bar{\Psi}^{\pm}_{n}(z) = z\Psi^{\pm}_{n}(z), \qquad /12/$$

$$\Lambda_{1-}\Phi^{\pm}_{n}(z) = z\bar{\Phi}^{\pm}_{n}(z), \quad \Lambda_{2-}\bar{\Phi}^{\pm}_{n}(z) = z\Phi^{\pm}_{n}(z),$$

$$\bar{\Psi}^{\pm}_{n}(z) = v_n\psi^{\pm}_{n} \circ \psi^{\pm}_{n}(z), \quad \bar{\Phi}^{\pm}_{n}(z) = v_n\phi^{\pm}_{n} \circ \phi^{\pm}_{n}(z).$$

---

*Функция $G_{nm}(z)$ в /9/ несущественно отличается от введенной в [/11/].

Операторы $\Lambda_{i\pm}$ и их обратные $\Lambda_{i\pm}^{-1}$ задаются формальными выражениями:

$$\Lambda_{1\pm}X_n=\begin{pmatrix}X_n^{(1)}\\ X_{n-1}^{(2)}\end{pmatrix}\pm\begin{pmatrix}q_n\\ -r_{n-1}\end{pmatrix}\Sigma_n^{\pm}(r_kX_k^{(1)}+q_kX_k^{(2)})h_k^{-1},$$

$$\Lambda_{2\pm}X_n=h_n\begin{pmatrix}X_{n+1}^{(1)}\\ X_n^{(2)}\end{pmatrix}\pm\begin{pmatrix}q_n\\ -r_n\end{pmatrix}\Sigma_{n+1}^{\pm}(r_{k-1}X_k^{(1)}+q_kX_k^{(2)}),\qquad /13/$$

$$\Lambda_{1\pm}^{-1}X_n=h_n\begin{pmatrix}X_n^{(1)}\\ X_{n+1}^{(2)}\end{pmatrix}\mp\begin{pmatrix}q_n\\ -r_n\end{pmatrix}\Sigma_{n+1}^{\pm}(r_kX_k^{(1)}+q_{k-1}X_k^{(2)}),$$

$$\Lambda_{2\pm}^{-1}X_n=\begin{pmatrix}X_{n-1}^{(1)}\\ X_n^{(2)}\end{pmatrix}\mp\begin{pmatrix}q_{n-1}\\ -r_n\end{pmatrix}\Sigma_n^{\pm}(r_kX_k^{(1)}+q_kX_k^{(2)})h_k^{-1},$$

где $\Sigma_n^+\equiv\sum_{k=n}^{\infty}$; $\Sigma_n^-\equiv\sum_{k=-\infty}^{n-1}$. В качестве области определения операторов $\Lambda_{i\pm}$ можно выбрать пространство векторных последовательностей $X_n\ni\mathcal{S}(\mathbf{Z},\mathbf{C}^2)$, удовлетворяющих условию /4/; при этом очевидно, что действие операторов $\Lambda_{i\pm}$ и $\Lambda_{i\pm}^{-1}$ не выводит из этого пространства.

В пространстве $\mathcal{S}(\mathbf{Z},\mathbf{C}^2)$ удобно ввести кососкалярное произведение:

$$[X_n,Y_n]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\tilde X_nY_n,\qquad \tilde X_n=(X_n^{(2)},-X_n^{(1)}),$$

по отношению к которому операторы $\Lambda_{i\pm}$, $\Lambda_\pm$ удовлетворяют следующим соотношениям, аналогичным соотношениям сопряжения:

$$[Y_n,\Lambda_{1+}X_nh_n]=[\Lambda_{2-}Y_n,X_n],$$

$$[Y_n,\Lambda_{2+}X_n]=[\Lambda_{1-}h_nY_n,X_n],\qquad /14/$$

$$[Y_n,\Lambda_+h_nX_n]=[\Lambda_-h_nY_n,X_n].$$

Первые два равенства в /14/ получаются непосредственно из явного вида $\Lambda_{i\pm}$ /13/ и из определения [,]. Последнее равенство следует из первых двух и из /12/.

Кососкалярное произведение $[\Phi_n,X_n]$ возникает естественным образом при вычислении коэффициентов разложения векторной последовательности $h_n^{-1}X_n$ по системе $\{\Psi\}$ /см. /11//. Такие же произведения входят в выражения для симплектической формы и вариаций, гамильтонианов, порождающих РЭУ, связанные с /1/.

Между оператором Λ_+ и функцией $G_{nm}(z)$ существует тесная связь. Действительно, применив метод контурного интегрирования к интегралу:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_+}\frac{d\zeta}{\zeta}\frac{\zeta^2+z^2}{\zeta^2-z^2}G_{nm}^+(\zeta)-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_-}\frac{d\zeta}{\zeta}\frac{\zeta^2+z^2}{\zeta^2-z^2}G_{nm}^-(\zeta),$$

получим следующее спектральное разложение для $G_{nm}(z)$*:

$$G_{nm}(z)=\frac{i}{4\pi}\oint_{S^1}\frac{d\zeta^2}{\zeta^2}\frac{\zeta^2+z^2}{\zeta^2-z^2}\left[\frac{\Psi_n^+(\zeta)\tilde\Phi_m^+(\zeta)}{(a^+(\zeta))^2}-\frac{\Psi_n^-(\zeta)\tilde\Phi_m^-(\zeta)}{(a^-(\zeta))^2}\right]-$$
$$-2\sum_{\alpha=1}^{N}(Y^+_{nm;\alpha}+Y^-_{nm;\alpha}),\qquad /15/$$

$$Y^{\pm}_{nm;\alpha}=\lim_{\zeta\to z_{\alpha\pm}}\frac{d}{d\zeta}\left[\frac{(\zeta-z_{\alpha\pm})^2(\zeta^2+z^2)}{\zeta(\zeta^2-z^2)(a^{\pm}(\zeta))^2}\Psi_n^{\pm}(\zeta)\tilde\Phi_m^{\pm}(\zeta)\right].$$

Из /10/, /11/ и /15/ следует, что

$$(\Lambda_++z^2)^{-1}(\Lambda_+-z^2)G_{nm}(z)h_m^{-1}=\delta_{nm},\qquad /16/$$

то есть $G_{nm}(z)h_m^{-1}$ является функцией Грина для преобразования Кэли от оператора Λ_+. При $|z|=1$ спектральное разложение /15/ и соотношение /16/ сохраняются, если определить $G_{nm}(z)=\frac{1}{2}[G_{nm}^+(z)+G_{nm}^-(z)]$, а интеграл в правой части /15/ понимать в смысле главного значения.

Заметим, что этот результат отличается от аналогичного результата для системы Захарова-Шабата /см. /14/, где доказано, что непрерывный аналог G является функцией Грина для непрерывного аналога оператора Λ_+ /.

В конце этого раздела отметим, что системы $\{\Psi\}$ и $\{\Phi\}$ биортогональны и что каждая из них состоит из линейно независимых элементов. Доказательство этих фактов основывается на том, что решения системы /1/ удовлетворяют следующим биквадратным соотношениям:

$$[\Phi_n^{\pm}(z),\Psi_n^{\pm}(\zeta)h_n^{-1}]=\frac{\zeta}{z}\frac{v_n^2}{\zeta^2-z^2}[z\phi_n^{(2)\pm}(z)\psi_n^{(1)\pm}(\zeta)-$$
$$-\zeta\phi_n^{(1)\pm}(z)\psi_n^{(2)\pm}(\zeta)]^2\Big|_{n=-\infty}^{\infty}.\qquad /17/$$

---

* Из приведенного выше замечания следует, что $G_{nm}(z)$ является четной функцией z.

Пользуясь /17/, асимптотиками решений Йоста при $n \to \pm\infty$ /5/ и равенством

$$\mathrm{P.v.}\lim_{n\to\infty} \frac{(z/\zeta)^n}{\zeta - z} = i\pi\delta(\arg z - \arg\zeta), \quad z, \zeta \in S^1 ,$$

можно проверить, что

$$[\Phi_n^{\pm}(z), \Psi_n^{\pm}(\zeta)h_n^{-1}] = \mp 2\pi(a^{\pm}(\zeta))^2\delta(\arg z - \arg\zeta),$$

$$[\Phi_n^{\pm}(z), \Psi_n^{\mp}(\zeta)h_n^{-1}] = 0, \quad [\Phi_{n,\alpha}^{\pm}, \Psi_{n,\beta}^{\pm} h_n^{-1}] = 0, \qquad /18/$$

$$[\dot\Phi_{n,\alpha}^{\pm}, \Psi_{n,\beta}^{\pm}h_n^{-1}] = [\Phi_{n,\alpha}^{\pm}, \dot\Psi_{n,\beta}^{\pm}h_n] = -\frac{1}{2}(\dot a_\alpha^{\pm})\, z_{\alpha\pm}\delta_{\alpha\beta},$$

$$[\dot\Phi_{n,\alpha}^{\pm}, \dot\Psi_{n,\beta}^{\pm} h_n^{-1}] = -\frac{1}{2}(\ddot a_\alpha^{\pm} z_{\alpha\pm} + \dot a_\alpha^{\pm})\dot a_\alpha^{\pm} .$$

Соотношения /18/ позволяют вычислить коэффициенты разложения любого элемента системы $\{\Psi\}$ по этой же системе. Подставив /18/ в /10/, мы, однако, получаем только очевидные тождества $\Psi_n^{\pm}(z) = \Psi_n^{\pm}(z)$ и т.п. Отсюда следует линейная независимость элементов системы $\{\Psi\}$.

Дальнейшее построение спектральной теории оператора Λ_+, включающее в себя: а/ теорему о спектральном разложении оператора $g(\Lambda_+)$, где $g(z^2)$ - мероморфная функция; б/ построение лагранжевого многообразия РЭУ и исследование его свойств на основе симплектического соотношения полноты [11], проводится аналогично работе[14], и мы на этом останавливаться не будем.

4. Традиционный подход к РЭУ [2,4] состоит в представлении их в виде условия совместности

$$\frac{dL_n(z)}{dt} + L_n(z)M_n^{(f)}(z) - M_{n+1}^{(f)}(z)L_n(z) = 0 \qquad /19/$$

двух линейных задач: /1/ и /2/. Предположив, что $M_n^{(f)}(z) = \sum_k M_{n,k} z^k$ является полиномом от z и z^{-1}, и подставив его в /19/, мы получим рекуррентные соотношения для коэффициентов $M_{n,k}$; можно проверить, что оператор Λ_+ разрешает их. Далее можно воспользоваться методом обобщенных вронскианских соотношений и получить общий вид РЭУ /см. [4-6,8] /:

$$i\sigma_3 \frac{dw_n}{dt} + f(\Lambda_+)w_n = 0, \qquad /20/$$

и соответствующую зависимость данных рассеяния от t:

$$i\frac{dS}{dt} = f(z^2)[\sigma_3, S(z,t)]. \qquad /21/$$

Здесь мы покажем, что диагональ резольвенты системы /1/, как и в непрерывном случае, является порождающим функционалом представлений Лакса и законов сохранения для РЭУ /20/. Впервые такой результат был получен Гельфандом и Диким для нелинейных эволюционных уравнений[15]; их метод основывается на изучении абстрактных операторных колец. Другой способ вывода этого результата состоит в использовании явного выражения диагонали резольвенты через кусочно-аналитические решения линейной задачи[16]. Ниже мы воспользуемся вторым способом, который позволяет также выявить естественную связь между Λ - оператором и диагональю резольвенты, которую определим как

$$R_n(z) = \mathcal{R}_{n,n-1}(z) - \frac{1}{2} = \mp\frac{1}{2}\chi_n^{\pm}(z)\sigma_3(\chi_n^{\pm}(z))^{-1}, \quad |z| \gtrless 1. \qquad /22/$$

Очевидно, $R_n(z)$ удовлетворяет уравнению

$$L_n(z)R_n(z) - R_{n+1}(z)L_n(z) = 0. \qquad /23/$$

Так как $R_n(z)$ аналитична по z, мы можем рассмотреть асимптотические разложения:

$$R_n^{+}(z) = -\frac{1}{2}\sigma_3 + \sum_{p=1}^{\infty} R_n^{(p)} z^{-p}, \quad |z| \gg 1,$$

$$R_n^{-}(z) = \frac{1}{2}\sigma_3 + \sum_{p=1}^{\infty} R_n^{(-p)} z^{p}, \quad |z| \ll 1.$$

Подставив их в /23/, мы получим для коэффициентов $R_n^{(p)}$ те же рекуррентные соотношения, что и для коэффициентов $M_{n,k}$. А с другой стороны, подставив /6/ в /22/, получим

$$R_n(z) = \mp\frac{v_n}{2a^{\pm}(z)}(\phi_n^{(1)\pm}\psi_n^{(2)\pm} + \phi_n^{(2)\pm}\psi_n^{(1)\pm})(z)\sigma_3 \pm \sigma_3\hat\eta v_n \frac{\phi_n^{\pm}\circ\psi_n^{\pm}}{a^{\pm}}(z),$$

$$\eta R_n^{\pm}(z) = \pm\sigma_3 v_n \frac{\phi_n^{\pm}\circ\psi_n^{\pm}}{a^{\pm}}(z);$$

$$\eta\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22}\end{pmatrix} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{pmatrix} Y_{12} \\ Y_{21}\end{pmatrix}, \quad \hat\eta\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2\end{pmatrix} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & Y_1 \\ Y_2 & 0\end{pmatrix}.$$

Перейдем к выяснению связей между оператором Λ_+ и $R_n(z)$. Пользуясь явным видом оператора Λ_+ /13/ и асимптотикой решений Йоста при $n \to \pm\infty$ /5/, нетрудно показать, что

$$(\bar{\Lambda}_{+}-z^{2})v_n\frac{\phi_n^{\pm}\circ\psi_n^{\pm}}{a^{\pm}}(z)=z\Lambda_{1+}w_n\,,$$

$$\bar{\Lambda}_{+}=\Lambda_{1+}\Lambda_{2+}\,,\qquad w_n=\begin{pmatrix}q_n\\ -r_n\end{pmatrix}, \tag{/24/}$$

откуда непосредственно следует, что

$$\eta R_n^{\pm}(z)=\pm z\sigma_3\Lambda_{1+}(\Lambda_{+}-z^{2})^{-1}w_n\,.$$

Из /1/ и /24/ можно убедиться в правильности соотношения

$$(R_n^{\pm})_{11}(z)=\mp\frac{1}{2}\sum_{k=n}^{\infty}\tilde{w}_k v_{k+1}\frac{\phi_k^{\pm}\circ\psi_{k+1}^{\pm}+\psi_k^{\pm}\circ\phi_{k+1}^{\pm}}{a^{\pm}}(z)=$$

$$=\mp\frac{1}{2}\mp\frac{1}{z}\sum_{k=n}^{\infty}\tilde{w}_k h_k^{-1}\Lambda_{2+}v_k\frac{\phi_k^{\pm}\circ\psi_k^{\pm}}{a^{\pm}}(z)=\mp\frac{1}{2}\mp\sum_{k=n}^{\infty}\tilde{w}_k h_k^{-1}\Lambda_{+}(\Lambda_{+}-z^{2})^{-1}w_k\,.$$

Это приводит сразу к следующим компактным формулам для $R_n(z)$:

$$R_n^{(2p)}=\sigma_3\sum_{k=n}^{\infty}\tilde{w}_k h_k^{-1}\Lambda_{+}^{p}w_k,\qquad p=\pm1,\pm2,\dots, \tag{/25/}$$

$$R_n^{(2p-1)}=-\hat{\eta}\sigma_3\Lambda_{\epsilon+}^{-1}\Lambda_{+}^{p}w_n\,,\qquad p=\pm1,\pm2,\dots,\quad \epsilon=\begin{cases}2, & p>0,\\ 1, & p<0.\end{cases}$$

Операторы $M_n^{(f)}(z)$ для РЭУ /20/ являются линейными комбинациями $R_n^{(p)}$. Мы выпишем $M_n^{(f)}(z)$ только в двух простейших случаях, когда в /2/ $f(z^2)=\nu z^{2N}$ и $f(z^2)=\nu z^{-2N}$, $N>0$, $\nu=\mathrm{const}$:

$$M_n^{(N)}(z)=\nu\Big[\sum_{p=0}^{2N-1}z^{2N-p}R_n^{(p)}+\frac{1}{2}R_n^{(2N)}(I+\sigma_3)\Big],$$

$$M_n^{(-N)}(z)=\nu\Big[\sum_{p=0}^{2N-1}z^{p-2N}R_n^{(-p)}+\frac{1}{2}R_n^{(-2N)}(I-\sigma_3)\Big].$$

Действительно, подставив $M_n^{(\pm N)}(z)$ в /19/ и воспользовавшись компактными формулами /25/, мы получим РЭУ $iw_{n,t}+\nu\Lambda_{+}^{\pm N}w_n=0$, соответствующие /20/ с $f(z^2)=\nu z^{\pm 2N}$. Таким образом, $R(z)$ можно рассматривать как порождающий функционал представлений Лакса для РЭУ. Очевидно, общему случаю с $f(z^2)=\sum_N f_N z^{2N}$ соответствует $M_n^{(f)}(z)=\sum_N f_N M_n^{(N)}(z)$.

Несложно также убедиться, что $R_n(z)$ порождает плотности законов сохранения РЭУ. Из /1/, /5/ и /6/ следует

$$z\frac{dA}{dz}=\frac{1}{2}\mathrm{tr}\Big\{\Big[\pm z(\chi_n^{\pm}(z))^{-1}\frac{d\chi_n^{\pm}}{dz}-n\sigma_3\Big](I\pm\sigma_3)\Big\}\Big|_{n=-\infty}^{\infty}=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Big\{\pm\frac{1}{2}\mathrm{tr}\big[(\chi_n^{\pm}(z))^{-1}\sigma_3\chi_n^{\pm}(z)(I\pm\sigma_3)\big]-1\Big\}, \tag{/26/}$$

$$A(z)=\ln a^{+}(z),\quad |z|>1;\quad A(z)=-\ln a^{-}(z),\quad |z|<1.$$

Сравнив /26/ с выражением для $R_n(z)$ /22/, тут же получим

$$z\frac{dA}{dz}=\mp\sum_{n=-\infty}^{\infty}\big[\mathrm{tr}(R_n^{\pm}(z)\sigma_3)\pm1\big].$$

Тот факт, что $A(z)$ не зависит от t, следует непосредственно из /19/.

Авторы благодарны П.П.Кулишу за полезные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Здесь мы приведем краткий вывод соотношения /17/. Для этого начнем с тождества:

$$zD_{n+1}-\zeta B_{n+1}=\zeta D_n-zB_n, \tag{/27/}$$

$$D_n=v_n\phi_n^{(2)}(z)\psi_n^{(1)}(\zeta),\qquad B_n=v_n\phi_n^{(1)}(z)\psi_n^{(2)}(\zeta),$$

где $\phi_n(z)$ и $\psi_n(\zeta)$ – два любых решения системы /1/ при разных значениях z и ζ спектрального параметра. Возведем обе стороны /27/ в квадрат; это дает

$$z^{2}(D_{n+1}^{2}-B_n^{2})+\zeta^{2}(B_{n+1}^{2}-D_n^{2})=2\zeta z\,(D_{n+1}B_{n+1}-B_nD_n).$$

Просуммировав по $-\infty<n<\infty$, получим

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(D_n^{2}-B_n^{2})=\frac{1}{\zeta^{2}-z^{2}}(zD_n-\zeta B_n)\Big|_{n=-\infty}^{\infty},$$

то есть

$$[v_n\phi_n\circ\phi_n(z),\ v_n\psi_n\circ\psi_n(\zeta)]=\frac{v_n^{2}}{\zeta^{2}-z^{2}}\big[z\phi_n^{(2)}(z)\psi_n^{(1)}(\zeta)-\zeta\phi_n^{(1)}(z)\psi_n^{(2)}(\zeta)\big]^{2}\Big|^{\infty}.$$

Для того чтобы получить /17/, остается заметить, что из /12/ и /14/ следует цепочка равенств:

$$[\bar{\Phi}_n(z),\ \bar{\Psi}_n^{\pm}(\zeta)]=[\Phi_n^{\pm}(z),\ \frac{1}{\zeta}\Lambda_{1+}\Psi_n^{\pm}(\zeta)]=$$

$$=\frac{1}{\zeta}[\Lambda_{2-}\bar{\Phi}_n^{\pm}(z),\ \Psi_n^{\pm}(\zeta)h_n^{-1}]=\frac{z}{\zeta}[\Phi_n^{\pm}(z),\ \Psi_n^{\pm}(\zeta)h_n^{-1}].$$

$$(\bar{\Lambda}_+ - z^2) v_n \frac{\phi_n^\pm \circ \psi_n^\pm}{a^\pm}(z) = z\Lambda_{1+} w_n\,,$$

$$\bar{\Lambda}_+ = \Lambda_{1+}\Lambda_{2+}\,, \qquad w_n = \begin{pmatrix} q_n \\ -r_n \end{pmatrix}, \qquad /24/$$

откуда непосредственно следует, что

$$\eta R_n^\pm(z) = \pm z\sigma_3 \Lambda_{1+}(\Lambda_+ - z^2)^{-1} w_n\,.$$

Из /1/ и /24/ можно убедиться в правильности соотношения

$$(R_n^\pm)_{11}(z) = \mp\frac{1}{2}\sum_{k=n}^{\infty}\tilde{w}_k v_{k+1}\frac{\phi_k^\pm \circ \psi_{k+1}^\pm + \psi_k^\pm \circ \phi_{k+1}^\pm}{a^\pm}(z) =$$

$$= \mp\frac{1}{2} \mp \frac{1}{z}\sum_{k=n}^{\infty}\tilde{w}_k h_k^{-1}\Lambda_{2+} v_k \frac{\phi_k^\pm \circ \psi_k^\pm}{a^\pm}(z) = \mp\frac{1}{2} \mp \sum_{k=n}^{\infty}\tilde{w}_k h_k^{-1}\Lambda_+(\Lambda_+ - z^2)^{-1} w_k\,.$$

Это приводит сразу к следующим компактным формулам для $R_n(z)$:

$$R_n^{(2p)} = \sigma_3\sum_{k=n}^{\infty}\tilde{w}_k h_k^{-1}\Lambda_+^p w_k, \qquad p = \pm 1, \pm 2, \dots, \qquad /25/$$

$$R_n^{(2p-1)} = -\hat{\eta}\sigma_3\Lambda_{\epsilon+}^{-1}\Lambda_+^p w_n\,, \qquad p = \pm 1, \pm 2, \dots, \qquad \epsilon = \begin{cases} 2, & p > 0, \\ 1, & p < 0. \end{cases}$$

Операторы $M_n^{(f)}(z)$ для РЭУ /20/ являются линейными комбинациями $R_n^{(p)}$. Мы выпишем $M_n^{(f)}(z)$ только в двух простейших случаях, когда в /2/ $f(z^2) = \nu z^{2N}$ и $f(z^2) = \nu z^{-2N}$, $N > 0$, $\nu = \mathrm{const}$:

$$M_n^{(N)}(z) = \nu\Big[\sum_{p=0}^{2N-1} z^{2N-p} R_n^{(p)} + \frac{1}{2}R_n^{(2N)}(I + \sigma_3)\Big],$$

$$M_n^{(-N)}(z) = \nu\Big[\sum_{p=0}^{2N-1} z^{p-2N} R_n^{(-p)} + \frac{1}{2}R_n^{(-2N)}(I - \sigma_3)\Big].$$

Действительно, подставив $M_n^{(\pm N)}(z)$ в /19/ и воспользовавшись компактными формулами /25/, мы получим РЭУ $i w_{n,t} + \nu\Lambda_+^{\pm N} w_n = 0$, соответствующие /20/ с $f(z^2) = \nu z^{\pm 2N}$. Таким образом, $R(z)$ можно рассматривать как порождающий функционал представлений Лакса для РЭУ. Очевидно, общему случаю с $f(z^2) = \sum_N f_N z^{2N}$ соответствует $M_n^{(f)}(z) = \sum_N f_N M_n^{(N)}(z)$.

Несложно также убедиться, что $R_n(z)$ порождает плотности законов сохранения РЭУ. Из /1/, /5/ и /6/ следует

$$z\frac{dA}{dz} = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\Big\{\Big[\pm z(\chi_n^\pm(z))^{-1}\frac{d\chi_n^\pm}{dz} - n\sigma_3\Big](I \pm \sigma_3)\Big\}\Big|_{n=-\infty}^{\infty} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\Big\{\pm\frac{1}{2}\mathrm{tr}\big[(\chi_n^\pm(z))^{-1}\sigma_3\chi_n^\pm(z)(I \pm \sigma_3)\big] - 1\Big\}, \qquad /26/$$

$$A(z) = \ln a^+(z), \quad |z| > 1; \quad A(z) = -\ln a^-(z)\,, \quad |z| < 1.$$

Сравнив /26/ с выражением для $R_n(z)$ /22/, тут же получим

$$z\frac{dA}{dz} = \mp\sum_{n=-\infty}^{\infty}\big[\mathrm{tr}(R_n^\pm(z)\sigma_3) \pm 1\big].$$

Тот факт, что $A(z)$ не зависит от t, следует непосредственно из /19/.

Авторы благодарны П.П.Кулишу за полезные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Здесь мы приведем краткий вывод соотношения /17/. Для этого начнем с тождества:

$$zD_{n+1} - \zeta B_{n+1} = \zeta D_n - zB_n\,, \qquad /27/$$

$$D_n = v_n\phi_n^{(2)}(z)\psi_n^{(1)}(\zeta), \qquad B_n = v_n\phi_n^{(1)}(z)\psi_n^{(2)}(\zeta),$$

где $\phi_n(z)$ и $\psi_n(\zeta)$ - два любых решения системы /1/ при разных значениях z и ζ спектрального параметра. Возведем обе стороны /27/ в квадрат; это дает

$$z^2(D_{n+1}^2 - B_n^2) + \zeta^2(B_{n+1}^2 - D_n^2) = 2\zeta z\,(D_{n+1}B_{n+1} - B_nD_n).$$

Просуммировав по $-\infty < n < \infty$, получим

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(D_n^2 - B_n^2) = -\frac{1}{\zeta^2 - z^2}(zD_n - \zeta B_n)\Big|_{n=-\infty}^{\infty},$$

то есть

$$[v_n\phi_n \circ \phi_n(z),\ v_n\psi_n \circ \psi_n(\zeta)] = -\frac{v_n^2}{\zeta^2 - z^2}\big[z\phi_n^{(2)}(z)\psi_n^{(1)}(\zeta) - \zeta\phi_n^{(1)}(z)\psi_n^{(2)}(\zeta)\big]^2\Big|^{\infty}.$$

Для того чтобы получить /17/, остается заметить, что из /12/ и /14/ следует цепочка равенств:

$$[\bar{\Phi}_n(z),\ \bar{\Psi}_n^\pm(\zeta)] = [\Phi_n^\pm(z),\ \frac{1}{\zeta}\Lambda_{1+}\Psi_n^\pm(\zeta)] =$$

$$= \frac{1}{\zeta}[\Lambda_{2-}\bar{\Phi}_n^\pm(z),\ \Psi_n^\pm(\zeta)h_n^{-1}] = \frac{z}{\zeta}[\Phi_n^\pm(z),\ \Psi_n^\pm(\zeta)h_n^{-1}].$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров В.Е. и др. Теория солитонов: Метод обратной задачи. "Наука", М., 1980.
2. Ablowitz M.J. Studies in Appl.Math., 1978, 58, No.1, p.17.
3. Манаков С.В. ЖЭТФ, 1974, 67, с.543; Flaschka H. Progr. Theor.Phys., 1974, 51, p.703.
4. Ablowitz M.J., Ladik J.F. J.Math.Phys., 1975, 16, No.3, p.598; ibid, 1976, 17, No.6, p.1011.
5. Chiu S.C., Ladik J.F. J.Math.Phys., 1977, 18, No.4,p.690.
6. Levi D., Ragnisco O. Lett.Nuovo Cim., 1978, 22, No.17, p.691; J.Phys.A: Math.&Gen., 1979, No.12, p.L163.
7. Dodd R.K. J.Phys.A: Math.&Gen., 1978, 11, No.1, p.81.
8. Kako F., Mugibayashi N. Progr.Theor.Phys., 1979, 61, No.3, p.776.
9. Bruschi M. et al. J.Math.Phys., 1980, 21, No.12, p.2749.
10. Bruschi M., Ragnisco O. J.Phys.A: Math.&Gen., 1981, 14, No. 5, p.1075.
11. Gerdjikov V.S., Ivanov M.I., Kulish P.P. JINR, E2-80-882, Dubna, 1980.
12. Gerdjikov V.S., Ivanov M.I. JINR, E2-81-811, E2-81-812, Dubna, 1981.
13. Хабибулин И.Т. ДАН СССР, 1979, 249, №1, с.67.
14. Герджиков В.С., Христов Е.Х. Мат.заметки, 1980, 28, №4, с.501; Болгарский физ.журн., 1980, 7, №1, с.28.
15. Гельфанд И.М., Дикий Л.А. Функц.анализ и его прил., 1977, 11, №2, с.1-1.
16. Gerdjikov V.S. JINR, E2-81-652, Dubna, 1981.

Рукопись поступила в издательский отдел
3 июня 1982 года.

Герджиков В.С., Иванов М.И. — Р5-82-412

Диагональ резольвенты и представления Лакса для разностных эволюционных уравнений

Рассматриваются разностные эволюционные уравнения /РЭУ/, связанные с дискретным аналогом системы Захарова-Шабата. Выявлены специфические особенности разностной задачи при построении спектральной теории нелокального оператора Λ, порождающего эти РЭУ. Показано, что диагональ резольвенты линейной задачи $R_n(z)$ является порождающим функционалом для представлений Лакса и законов сохранения РЭУ. Получены компактные выражения для $R_n(z)$ через оператор Λ.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Gerdjikov V.S., Ivanov M.I. — P5-82-412

The Diagonal of the Resolvent and the Lax Representations of the Difference Evolution Equations

The difference evolution equations (DEE), related to the discrete analog of the Zakharov-Shabat problem,are considered. The specific features of the difference problem in the construction of the spectral theory of the nonlocal operator Λ, generating the DEE, are outlined. The diagonal of the resolvent of the linear problem $R_n(z)$ is shown to be the generating functional both of the Lax representation and the conservation laws of the DEE. Compact expressions for $R_n(z)$ through the operator Λ are derived.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

Перевод О.С.Виноградовой.