сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5-82-395

Г.И.Назин

КОВАРИАНТНОСТЬ УРАВНЕНИЯ БОГОЛЮБОВА ДЛЯ ПРОИЗВОДЯЩЕГО ФУНКЦИОНАЛА РАВНОВЕСНЫХ КЛАССИЧЕСКИХ СИСТЕМ

1982

Равновесные состояния системы точечных частиц в классической статистической физике могут быть охарактеризованы производящим функционалом $\mathcal{L}(t)$ [1]. Для краткости в дальнейшем мы будем просто говорить о состоянии $\mathcal{L}(t)$. Функциональные производные $\mathcal{L}(t)$ в нуле $\mathcal{D}(x_1,\dots,x_s)\mathcal{L}(0)$ определяют набор частичных плотностей

$$\rho(x_1,\dots,x_s) = \mathcal{D}(x_1,\dots,x_s)\mathcal{L}(0), \tag{/1/}$$

где $x_i \in R^{\nu}$ - набор координат i -ой частицы.

$\mathcal{L}(t)$ определен на пространстве $L^1(R^{\nu})$ комплекснозначных функций $t(x)$, аналитичен, и для систем с бинарным взаимодействием удовлетворяет уравнению Боголюбова следующего вида:

$$\mathcal{D}(x)\mathcal{A}(t) = z(x)\mathcal{A}(t + (1+t)f[x]), \tag{/2/}$$

где $z(x) = z\exp\{-\beta\Phi_1(x)\} \in L^{\infty}(R^{\nu})$, z - активность, $\beta = 1/kT$, $\Phi_1(x)$ - потенциал внешнего поля, $f(x)$ - функция Майера:

$$f(x) = \exp\{-\beta\Phi_2(x)\} - 1 \in L^1(R^{\nu}) \cap L^{\infty}(R^{\nu}), \tag{/3/}$$

$\Phi_2(x)$ - бинарный потенциал, $\mathcal{A}(t)$ - аналитический на $L^1(R^{\nu})$ функционал, $f[x](y) = f(x-y)$, (z, f) - параметры уравнения Боголюбова.

Нормированные ($\mathcal{A}(0) = 1$) положительные решения этого уравнения определяют производящие функционалы $\mathcal{L}(t)$ [2].

Уравнение /2/ является основным в равновесной классической статистической физике. Вся информация о термодинамическом поведении системы должна извлекаться из этого уравнения.

В данной работе мы рассмотрим преобразование уравнения /2/ при замене независимой функциональной переменной $t(x)$

$$t(x) = (Tu)(x), \tag{/4/}$$

$u(x) \in L^1(R^{\nu})$, T - аналитический оператор, действующий в $L^1(R^{\nu})$. Из всех операторов T мы выделим класс операторов, оставляющих неизменным вид уравнения /2/. Введем точное определение.

Мы будем говорить, что уравнение Боголюбова с данными (z, f) ковариантно по отношению к преобразованию /4/, если функционал $\mathcal{A}_T(u) \equiv \mathcal{A}(Tu)$, построенный по любому решению $\mathcal{A}$ уравнения /4/, удовлетворяет этому же уравнению разве что с измененными параметрами (z_T, f_T)

$$\mathfrak{D}(x)\mathfrak{A}_T(u) = z_T(x)\mathfrak{A}_T(u + (1+u)f_T[x]). \qquad /5/$$

Параметры $z_T \in L^\infty(R^\nu)$ и $f_T \in L^1(R^\nu)$ строятся по оператору T. Если для некоторого оператора ковариантности T выполняется дополнительно условие

$$z_T(x) = z(x), \qquad f_T(x) = f(x), \qquad /6/$$

такой оператор естественно называть оператором инвариантности /или симметрии/ уравнения Боголюбова.

Отметим следующие задачи, приводящие к проблеме отыскания операторов ковариантности уравнения Боголюбова: 1/ Упрощение операторов ковариантности уравнения /2/ выбором параметров (z_T, f_T) и, соответственно, уравнения /2/ выбором подходящей замены переменной /4/, 2/. Сокращенное описание состояний системы /в этом случае целесообразно брать $u(x)$ из более узкого, чем $L^1(R^\nu)$, пространства/. 3/ Изучение симметрии термодинамических состояний системы. На последней из этих задач мы сосредоточим свое внимание.

Состояние системы в равновесной классической статфизике можно характеризовать мерой в пространстве конфигураций. Такая мера однозначно восстанавливается по производящему функционалу [2]. Точное определение симметрии состояния может быть дано на основе понятия инвариантности меры относительно преобразований в пространстве конфигураций [3]. Столь общее определение трудно использовать для анализа свойств конкретных систем, поэтому используют часто более узкое определение [4].

Преобразование g из евклидовой группы движений пространства R^ν является элементом симметрии данного состояния $\mathfrak{L}(t)$, если

$$\forall s \in Z, \quad x_i \in R^\nu \quad \rho(gx_1, \dots, gx_s) = \rho(x_1, \dots, x_s), \qquad /7/$$

где $\rho(x)_s$ - частичные плотности состояния $\mathfrak{L}(t)$. Набор всех элементов симметрии g образует группу симметрии $G_{\mathfrak{L}}$ данного состояния $\mathfrak{L}(t)$. Этому узкому определению симметрии состояния мы придадим другую эквивалентную форму, которая допускает существенное расширение данного определения.

Лемма 1. Элемент $g \in G$ принадлежит группе $G_{\mathfrak{L}}$ тогда и только тогда, когда $\forall t \in L^1(R^\nu)$

$$\mathfrak{L}(T_g t) = \mathfrak{L}(t), \qquad /8/$$

где T_g действует по правилу $\forall u \in L^1(R^\nu)$,

$$(T_g u)(x) = u(g^{-1}x). \qquad /9/$$

Для доказательства воспользуемся разложением функционала $\mathfrak{L}(t)$ в ряд Тейлора

$$\mathfrak{L}(t) = \sum_{s \geq 0} \frac{1}{s!} \int \rho(x_1, \dots, x_s) \prod_{i=1}^{s} t(x_i) dx_i. \qquad /10/$$

Пусть выполнено условие /7/. Умножая эти равенства на $(s!)^{-1} \prod t(x_i)$, интегрируя и суммируя по s полученные уравнения, имеем

$$\sum_{s \geq 0} \frac{1}{s!} \int \rho(gx_1, \dots, gx_s) \prod_{i=1}^{s} t(x_i) dx_i = $$

$$= \sum_{s \geq 0} \frac{1}{s!} \int \rho(x_1, \dots, x_s) \prod_{i=1}^{s} t(x_i) dx_i. \qquad /11/$$

В левой части /11/ делаем замену $y = gx$ /якобиан этого преобразования равен 1/

$$\sum_{s > 0} \frac{1}{s!} \int \rho(y_1, \dots, y_s) \prod_{i=1}^{s} t(g^{-1} y_i) dy_i. \qquad /12/$$

Равенство /8/ доказано. Обратно, /8/, /10-12/ влекут /7/.

Обобщение понятия симметрии теперь очевидно: аналитический оператор $T: L^1(R^\nu) \to L^1(R^\nu)$ назовем оператором симметрии состояния $\mathfrak{L}(t)$, если

$$\forall t \in L^1(R^\nu) \qquad \mathfrak{L}((Tt)) = \mathfrak{L}(t). \qquad /13/$$

Операторы симметрии состояния $\mathfrak{L}$ характеризуют его индивидуальные свойства. Вообще говоря, они могут не быть операторами симметрии данного уравнения Боголюбова и их в том случае невозможно найти без явного решения уравнения. Напротив, те из них, которые являются операторами симметрии уравнения, могут быть условиями /6/ выделены из множества операторов ковариантности. Достаточно широкое подмножество операторов ковариантности может быть найдено без явного решения уравнения Боголюбова. Конечно, возможна постановка задачи сразу на поиск операторов симметрии уравнения Боголюбова. Однако ниже мы покажем, что стратегия поиска этих операторов в два этапа оказывается более гибкой.

Операторы T_g - представление группы G, являются, очевидно, операторами ковариантности уравнения /2/. Условия /6/ для них сводятся к обычному требованию инвариантности гамильтониана системы [3]. Таким образом, они отражают динамическую симметрию решений уравнения Боголюбова. Нахождение более широкого класса операторов ковариантности представляет таким образом интереснейшую задачу, поскольку среди них могут оказаться операторы симметрии совершенно иной природы, отражающие специфические термодинамические свойства решений уравнения Боголюбова.

Получим уравнение для операторов ковариантности. Для этого найдем дифференциал функционала $\mathfrak{A}_T(u)$

$$\delta \mathcal{A}_T(u) = \int \mathcal{D}(x)\mathcal{A}(Tu)(T_1 \delta u)(x)\,dx =$$

$$= \int (T_1^* \mathcal{D}(\cdot)\mathcal{A}(Tu))(x)\delta u(x)\,dx, \qquad /14/$$

где T_1 - первая производная Фреше в точке $u(\cdot)$ отображения T /T_1 - линейный ограниченный в $L^1(R^\nu)$ оператор/, T_1^* - сопряженный к T_1 относительно естественной двойственности между $L^1(R^\nu)$ и $L^\infty(R^\nu)$. / T_1^* - линейный ограниченный в $L^\infty(R^\nu)$ оператор/. Оператор T_1^* однозначно определяется из тождества[6] $\forall a \in L^\infty(R^\nu)$ и $\forall \psi \in L^1(R^\nu)$

$$\int a(x)(T_1\psi)(x)\,dx = \int (T_1^* a)(x)\psi(x)\,dx.$$

Из /14/ и /2/ получаем выражение для функциональной производной $\mathcal{A}_T(u)$

$$\mathcal{D}(x)\mathcal{A}_T(u) = (T_1^* \mathcal{D}(\cdot)\mathcal{A}(Tu))(x) \equiv T_1^* \mathcal{D}(x)\mathcal{A}(Tu) =$$

$$= T_1^* z(x)\mathcal{A}(Tu + (1+Tu)f[x]). \qquad /15/$$

Здесь впервые вместо обозначения типа $(T_1^* a)(x)$ использовано обозначение $T_1^* a(x)$, которым будем пользоваться в дальнейшем там, где это не вызывает недоразумений.

Теорема 1. Для ковариантности уравнения Боголюбова /2/ при фиксированных (z, f) относительно преобразования /4/ необходимо и достаточно выполнение тождества

$$T_1^* z(x)\mathcal{A}(Tu + (1+Tu)f[x]) =$$

$$= z_1(x)\mathcal{A}(T(u + (1+u)f_T[x])). \qquad /16/$$

$\forall u \in L^1(R^*)$ и каждого решения $\mathcal{A}$ уравнения /2/.

Действительно, выразив $\mathcal{A}_T$ в правой части /5/ через $\mathcal{A}$ и подставив в левую часть $\mathcal{D}(x)\mathcal{A}_T(u)$ из /15/, приходим к /16/. Обратно, в силу /2/ и /15/ левая часть /16/ есть $\mathcal{D}(x)\mathcal{A}_T(u)$. Остается заменить в /16/ $\mathcal{A}$ на $\mathcal{A}_T$, чтобы получить /5/.

/16/ - основное уравнение для операторов ковариантности. Если множество решений уравнения Боголюбова при данных (z, f) неодномерно, то в /16/ следует подставить все линейно независимые решения $\mathcal{A}_a$. Для операторов ковариантности в этом случае получаем систему уравнений.

В любом случае уравнение /16/ имеет существенный недостаток - его вид определяется конкретными решениями уравнения Боголюбова и до нахождения этих решений уравнение /16/ фактически неопределено.

Выход их этого круга состоит в рассмотрении /16/ как тождества относительно $(z, f, \mathcal{A})$, меняющихся в некотором множестве $\mathcal{K}$, выбираемом из дополнительных соображений. Чем шире множество $\mathcal{K}$, тем сильнее ограничения, налагаемые уравнением /16/ на операторы T, следовательно, уже их класс, но тем легче из /16/ их найти. При выборе множества $\mathcal{K}$ необходимы компромиссы.

Обсудим возможные стратегии выбора множества $\mathcal{K}$. Если обозначить $H_{z,f}$ множество решений уравнений Боголюбова для данных (z, f), то минимальное множество $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{z,f} \equiv \{z\} \times \{f\} \times H_{z,f}$. В этой стратегии множество операторов ковариантности определяется полностью. Следующие три стратегии позволяют найти лишь его подмножества.

Все эти стратегии основаны на выборе $\mathcal{K}$ в виде $\mathcal{P} \times H$, где $\mathcal{P}$ - некоторое множество параметров (z, f), H - пространство аналитических на $L^1(R^\nu)$ функционалов. Так как все они определяются множеством $\mathcal{P}$, то мы их соответственно и будем обозначать

1/ $\mathcal{P}_1 = L^\infty(R^\nu) \times (L^1(R^\nu) \cap L^\infty(R^\nu))$,

2/ $\mathcal{P}_2 = L^\infty(R^\nu) \times \{f\}$,

3/ $\mathcal{P}_3 = \{z\} \times \{f\}$.

Операторы ковариантности в стратегии $\mathcal{P}_1$ учитывают общую структуру уравнения Боголюбова, в стратегии $\mathcal{P}_2$ - дополнительно свойства функции f, $\mathcal{P}_3$ - пары (z, f).

У множеств $\mathcal{K}_i = \mathcal{P}_i \times H$ /i =1,2,3/ аномально широкая область изменения $\mathcal{A}$. Это приводит к нивелированию многих свойств симметрии решений уравнения /2/. Тем не менее самая грубая стратегия $\mathcal{K}_3$ определяет все операторы T_g.

Более тонкие стратегии поиска операторов ковариантности могут быть основаны на том, что при фиксированной функции f

$$z(x) = z_\Lambda(x) \equiv z v(x)\chi_\Lambda(x),$$

где $z > 0$, $v(x) = \exp\{-\beta\Phi_1(x)\}$, χ_Λ - индикатор ограниченного измеримого множества $\Lambda \subset R^\nu$, известно решение $\mathcal{A}_\Lambda$ уравнения /2/[2]. Тем самым для $z_\Lambda(x)$ определено уравнение /16/

$$T_1^* z_\Lambda(x)\mathcal{A}_\Lambda(Tu + (1+Tu)f[x]) = z_T^\Lambda(x)\mathcal{A}_\Lambda(T(u+(1+u)f_T^\Lambda[x])). \qquad /17/$$

Это уравнение можно рассматривать как тождество по z_Λ, выбираемом из различных множеств.

4/ $\mathcal{P}_f = \{z_\Lambda = z v \chi_\Lambda :\ v \in L^\infty(R^\nu),\ \Lambda \in O(R\ )\}$, 5/ $\mathcal{P}_{f,v} = \{z_\Lambda = zv\chi_\Lambda$: v - фиксировано, $z \in R^1_+, \Lambda \in 0\}$,

6/ $\mathcal{P}_{f,z} = \{z_\Lambda = zv\chi_\Lambda$: z, f - фиксированы $\Lambda \in P(R^\nu)\}$,

где $O(R^\nu)$ - система ограниченных измеримых множеств в R^ν.

Операторы T, найденные в стратегиях $K_4 - K_6$, описывают свойства ковариантности уравнения Боголюбова для конечных систем. Но в каждом из этих стратегий множество z_Λ выбрано так, что возможен предельный переход к бесконечным системам.

Выберем в $L^\infty(R^\nu)$ * - слабую топологию, а в $L^1(R^\nu)$ - нормированную, и введем в $\mathcal{P}_1$ топологию произведения. Пусть возрастающая последовательность Λ_n такова, что $\Lambda_n = R^\nu$. Если для некоторого T последовательность пар $(z_T^{\Lambda_n}, f_T^{\Lambda_n})$ сходится в $\mathcal{P}_1$ (z_T, f_T), то в /17/ можно сделать предельный переход по схеме термодинамического предельного перехода, рассмотренного в[2], и убедиться, что такой оператор удовлетворяет уравнению /16/. Можно надеяться, что таким образом определится достаточно богатое множество операторов ковариантности. Заметим теперь, что в стратегиях $K_4 - K_6$ невозможно с самого начала искать операторы симметрии уравнения, так как их для конечных систем может не быть вообще.

Мы не будем исследовать стратегии $K_4 - K_6$, а ограничимся более простыми $K_1 - K_3$. Но даже и в этих достаточно простых случаях возникают существенные математические трудности. В стратегии K_3 удается лишь свести задачу к одному нелинейному дифференциальному уравнению для T. Полное исследование этого уравнения еще предстоит выполнить.

В стратегии K_2 задача решается полностью для решетчатых систем и некоторые детали остаются неясными для непрерывных систем. В K_3 получено решение и для непрерывных систем, но это решение тривиально.

Чтобы сконцентрировать информацию об операторах T, необходимо избавиться от всех произвольных параметров в /16/ и получить уравнение, содержащее только фиксированные /в каждой стратегии свои/ параметры и операторы T. Наименьшее число параметров уравнения /16/ содержится в стратегии K_3, с нее мы и начнем.

В этой стратегии (z, f) - фиксированы, и нужно из /16/ исключить произвольный функционал $\mathcal{A}$.

Введем обозначения

$$P^* = T_1^* z(\cdot), \qquad P = z(\cdot) T_1, \tag{18}$$

$$F(x, y) = (1 + Tu(y)) f(x-y). \tag{19}$$

$$F_T(x, y) = T(u + (1+u)\mathcal{L}_T[x])(y) - Tu(y). \tag{20}$$

Все введенные здесь объекты зависят еще и от $u(\cdot)$, мы не отметили это в обозначениях, так как на данном этапе это явно использоваться не будет. Так как $Tu(y)$ конечна для почти всех y, то $F(x,y)$ как функция x принадлежит $L^\infty(R^\nu)$ для почти всех y.

<u>Лемма 2.</u> В стратегии K_3 уравнение /16/ эквивалентно системе

$$(P^*1)(x) = z_T(x), \tag{21}$$

$$P^* \prod_{i=1}^{n} F(x, x_i) = z_T(x) \prod_{i=1}^{n} F_T(x, x_i). \tag{22}$$

Равенства относительно x и x_i понимаются почти всюду по мере Лебега в R^ν.

Фиксируем $u(x)$, и, пользуясь аналитичностью $\mathcal{A} \in H$, разложим обе части уравнения /16/ в ряд Тейлора в точке Tu:

$$P^* \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \mathcal{A}(x_1, \dots, x_n) \prod_{i=1}^{n} F(x, x_i) dx_i = z_T(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \mathcal{A}(x_1, \dots, x_n) \prod_{i=1}^{n} F_T(x, x_i) dx_i, \tag{23}$$

где

$$\mathcal{A}(x_1, \dots, x_n) = \mathfrak{D}(x_1, \dots, x_n) \mathcal{A}(Tu).$$

Оператор P^* в левой части /23/ можно переставлять с операцией Σ. Действительно, P^*, как сопряженный к ограниченному в $L^1(R^\nu)$ оператору P, где * - слабо непрерывен в $L^\infty(R^\nu)$[6], а ряд слева в /23/ определяет функцию из $L^\infty(R^\nu)$ и * - слабо сходится.

В силу произвольности $\mathcal{A}$, функции $\mathcal{A}(x_1, \dots, x_n)$ -произвольны. Полагая их все, кроме одной, равными нулю, получаем систему $(n \geq 0)$, эквивалентную уравнению /16/

$$P^* \int \mathcal{A}(x_1, \dots, x_n) \prod_{i=1}^{n} F(x, x_i) dx_i = z_T(x) \int \mathcal{A}(x_1, \dots, x_n) \prod_{i=1}^{n} F_T(x, x_i) dx_i. \tag{24}$$

В каждом равенстве /24/ при $n \geq 1$ оператор P^* можно переставить с операцией интегрирования. Рассмотрим для простоты случай $n = 1$. Умножая левую часть /24/ на $\psi \in L^1(R^\nu)$ и интегрируя, получаем

$$\int\psi(x)P^*(\int\mathcal{Q}(x,x_1)dx = \int P\psi(x)(\int\mathcal{Q}(x_1)F(x,x_1)dx_1)\,dx =$$

$$= \int\mathcal{Q}(x_1)(\int(P\psi)(x)F(x,x_1)dx)dx_1 = \int\mathcal{Q}(x_1)(\int\psi(x)P^*F(x,x_1)\,dx)dx_1 = \qquad /25/$$

$$= \int\psi(x)(\int\mathcal{Q}(x_1)P^*F(x,x_1)dx_1)dx .$$

В цепочке равенств /25/ мы дважды воспользовались связью между операторами P^* и P /см. /15//, а также теоремой Фубини.

Из /25/ в силу произвольности $\psi\in L^1(R^\nu)$ следует высказанное утверждение

$$P^*\int\mathcal{Q}\ (x_1)F(x,x_1)dx_1 = \int\mathcal{Q}(x_1)P^*F(x,x_1)dx_1 .$$

Внося оператор P^* под знак интеграла в /24/ и пользуясь произвольностью $\mathcal{Q}(x_1,\dots,x_n)$, получаем при $n\geq 1$ систему /22/. Доказательство окончено.

Система /27/, /22/ - определяющая для операторов T в стратегии K_1–K_3. В стратегии K_3 она не содержит больше параметров и ее анализ в таком случае наиболее труден. В этой стратегии уравнение /21/ играет роль некоторого условия нормировки для оператора T

$$(P^*1)(x) = (T_1^*z)(x) = z_T(x). \qquad /26/$$

В /26/ зарегистрировано, что зависящий от $u(\cdot)$ оператор T_1^* "постоянен" на данном векторе $z(\cdot)$. После нахождения T_1^* это уравнение определит z_T.

Бесконечная система /22/ имеет достаточно простую алгебраическую структуру, что позволяет ее существенно упростить.

Рассмотрим всю эту систему при фиксированной функции $u(\cdot)$. Не будем пока обращать внимания на то, что F и F_T зависят от T. Так как P^* - линейный ограниченный /* - слабо непрерывный/ оператор, то система /21/ и /22/ просто определяет его на * - слабо замкнутой алгебре $\mathfrak{F}\subset L^\infty(R^\nu)$, порожденной 1 и функциями $F(x,x_i)$. Значения этого оператора лежат в линейном пространстве $E_z^T = z_T(\cdot)\,\mathfrak{F}_T$, где $\mathfrak{F}_T\subset L^\infty(R^\nu)$, * - слабо замкнутая алгебра, порожденная 1 и функциями $F_T(x,x_i)$ / x_i играют роль индексов/. Кроме того, на алгебре $\mathfrak{F}$ P^* обладает достаточно простыми свойствами.

Носители функций из E_z^T, очевидно, содержатся в Λ_z^T = $\operatorname{supp} z_T(x)$, поэтому система /22/ эквивалентна следующей:

$$P^*F(x,x_i) = z_T(x)F_T(x,x_i), \qquad /27/$$

$$z_T(x)P^*\prod_{i=1}^{n}F(x,x_i)\prod_{i=m+1}^{n}F(x,x_i) = (z_T(x)\prod_{i=1}^{m}F_T(x,x_i))z_T(x)\prod_{i=m+1}^{n}F_T(x,x_i) = \qquad /28/$$

$$= P^*\prod_{i=1}^{m}F(x,x_i)\,P^*\prod_{i=m+1}^{n}F(x,x_i) \qquad n\geq 2,\ 1\leq m\leq n .$$

В силу линейности и непрерывности P^* система /28/ эквивалентна одному уравнению

$$z_T(x)P^*(bc)(x) = (P^*b)(x)(P^*c)(x) \qquad \forall\, c,b\in\mathfrak{F}. \qquad /29/$$

Итак, мы доказали лемму.

Лемма 3. В стратегии K_3 при фиксированной функции $u\in L^1(R^\nu)$ бесконечная система /21/, /22/ эквивалентна системе трех уравнений /21/, /27/, /29/.

Уравнению /29/ можно придать иной вид. Предположим для простоты, что $1/z_T(x)$ существенно ограничена на Λ_z^T /иначе Λ_z^T можно было бы несколько сузить, а затем предельным переходом расширять/. Введем оператор

$$P_z^* = z_T^{-1}(\cdot)P^* = z_T^{-1}(\cdot)\,T_1^*z(\cdot). \qquad /30/$$

По построению $P_z^*:\mathfrak{F}\to\mathfrak{F}_T$ - линейный непрерывный оператор. Для него уравнение /30/ переходит в соотношение

$$(P_z^*\,bc)(x) = (P_z^*\,b)(x)(P_z^*c)(x) \qquad b,c\in\mathfrak{F}, \qquad /31/$$

которое показывает, что P_z^* есть непрерывный эндоморфизм подалгебры $\mathfrak{F}\subset L^\infty(R^\nu)$ в алгебру $L^\infty(R^\nu)\supset\mathfrak{F}_T$.

При фиксированной функции $u(\cdot)$ образующими алгебры $\mathfrak{F}$ являются просто сдвиги функции f. Усложняют ситуацию только ограничения на них, возникающие из условия

$$1+Tu(y) = 0. \qquad /32/$$

Общий вид непрерывных /по норме/ автоморфизмов алгебры $L^\infty(R^\nu)$ известен

$$(P_z^*\,a)(x) = \chi(x), \qquad /33/$$

где χ - индикатор некоторого измеримого множества Λ, g: $\Lambda\to R^\nu$ - измеримое отображение такое, что мера $\mu_g(B)\equiv\mu(g^{-1}B)$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега μ.

Есть все основания надеяться на то, что, по крайней мере, в рассматриваемом случае это будет и общий вид непрерывного эндоморфизма.

В этом случае уравнение /31/ определяет общий вид оператора T_1^*:

$$(T_1^*\,za)(x) = z_T(x)\chi_u(x)a(g_u x) \qquad /34/$$

на линейном пространстве $E_z = z(\cdot)\mathcal{F}$, $a \in \mathcal{F}$, g_u - аналитическое отображение $L^1(R^\nu)$ во множество векторнозначных функций: $g_u: \Lambda_u \to R^\nu$, $\Lambda_u \subset R^\nu$. Условие /34/ тем сильнее, чем шире подпространство E_z. Уравнение /34/ отображает алгебраические свойства системы /28/.

Итак, бесконечная система /21/, /22/ эквивалентна следующей системе трех уравнений:

$$(T_1^* z)(x) = z_T(x), \tag*{/35/}$$

$$(1 + Tu(y))(T_1^* z f[y])(x) = z_T(x)\,(T(u + (1+u) f_T[x])(y) - Tu(y)), \tag*{/36/}$$

$$(T_1^* za)(x) = z_T(x)\chi_u(x) a(g_u x). \tag*{/37/}$$

Собственно уравнением является /36/ /в развернутом виде записанное уравнение /27//. Это нелинейное дифференциальное уравнение весьма экзотического вида. Его следовало бы назвать основным уравнением для операторов ковариантности в стратегии K_3, /37/ задает вид оператора T_1^*, /35/ - условие нормировки. Изучение этой системы мы отложим на будущее.

Эта же система /35/-/37/ справедлива и в стратегии K_2, теперь z произвольно, что существенно упрощает исследование.

В уравнении /35/ правая часть не зависит от $u(\cdot)$ при $\forall z \in L^\infty(R^\nu)$. Следовательно, T^*, а с ним и T от $u(\cdot)$ не зависят. Это сразу определяет общий вид оператора T:

$$t(x) = (Tu)(x) = t_0(x) + (T_1 u)(x),$$

T_1 - линейный ограниченный оператор.

Уравнения /36/ и /37/ упрощаются

$$(1 + t_0(y) + T_1 u(y))(T_1^* z f[y])(x) = z_T(x)(T_1(1+u) f_1[x])(y), \tag*{/38/}$$

$$(T_1^* za)(x) = z_T(x)\chi(x) a(gx). \tag*{/39/}$$

Здесь $a \in \mathcal{F}_0$, $\mathcal{F}_0$ - слабо замкнутая алгебра, порожденная 1 и сдвигами f, кроме тех, для которых выполнено условие

$$1 + t_0(y) + T_1 u(y) = 0, \qquad u \in L^1(R^\nu). \tag*{/40/}$$

Начиная с этого момента, для простоты мы будем рассматривать решетчатые системы. В этом случае $x \in Z^\nu$, соответственно $t(x) \in L^1(Z^\nu)$, $\mathcal{F}_0 \in L^\infty(Z^\nu)$. Пользуясь теоремой Стоуна-Вейерштрасса, легко описать строение подалгебр в $L^\infty(Z^\nu)$. Каждая такая подалгебра характеризуется набором подмножеств "слипшихся" точек, которые функции из подалгебры не разделяют /точки, входящие в различные точки множества, разделяются/. Общий вид эндоморфизма подалгебр $L^\infty(Z^\nu)$ дается формулой /33/.

Пусть O - множество запрещенных сдвигов, определяемое условием /40/, $O \supset O_T = \{y: Tu(y) = 0 \quad u \in L^1(Z^\nu)\}$, χ^0_T - индикатор O_T.

Лемма 4. $\forall a \in L^\infty(Z^\nu) \quad (T_1^* a\chi^0_T)(x) = 0$.

Действительно, в силу определения O_T и оператора T_1^* имеем

$$\langle a\chi^0_T, T_1 u\rangle = \langle T_1^* a\chi^0_T, u\rangle = 0, \qquad u \in L^1(Z^\nu).$$

Здесь

$$\langle a, u\rangle = \sum_{x \in Z^\nu} a(x) u(x). \tag*{/41/}$$

Лемма доказана.

Тривиально доказывается, что подалгебра $\mathcal{F}_0$ разделяет точки из $Z^\nu \setminus 0$ и, следовательно, содержит функции вида $a\overline{\chi^0_T}$, где $\overline{\chi^0_T} = 1 - \chi^0_T$. Вместе с леммой 4 это определяет оператор T_1^*

$$(T_1^* z)(x) = (T_1 z\chi^0_T)(x) + (T_1^* z\overline{\chi^0_T})(x) = \phi_0(x) z(gx), \tag*{/42/}$$

где

$$\phi_0(x) = (T_1^* \chi^0_T)(x)\chi(x), \qquad g: Z^\nu \to Z^\nu \setminus O.$$

Через двойственность /41/ определяется оператор T_1

$$(T_1 \psi)(y) = \sum_{r \in g^{-1} y} \phi_0(r)\psi(r). \tag*{/43/}$$

Здесь $g^{-1} y$ - полный прообраз y, $\Sigma = 0$, если $g^{-1} y = \emptyset$ - пустое множество.

Уравнение /38/ в силу произвольности $u(\cdot)$ эквивалентно системе двух уравнений

$$(1 + t_0(y))\, T_1^*(z f[y])(x) = T_1^* z(x)(T_1 f_T[x])(y), \tag*{/44/}$$

$$(T_1^* z f[y])(x)\, T_1 u(y) = T_1^* z(x)\, T_1(u f_T[x])(y). \tag*{/45/}$$

Подставляя в /44/ T_1^* и T_1, получаем

$$\phi_0(x) z(gx) f(gx - y) \sum_{r \in g^{-1} y} \phi_0(r) u(r) =$$

$$= \phi_0(gx) z(gx) \sum_{r \in g^{-1} y} \phi_0(r) u(r) f_1(r - x).$$

Выберем $u(\cdot)$ равной индикатору χ_r одной из точек $r \in \Lambda$. Это снимает суммирование по r и мы получаем выражения для f_T:

$$f_T(r - x) = f(gr - gx) \qquad r, x \in \Lambda. \tag*{/46/}$$

Из /46/ видно, что, вообще говоря, f_T не является функцией разности $r-x$. Но в принципе достаточно требовать, чтобы $f_T(r, x)$ была симметрической функцией. Требование зависимости от разности аргументов сужает класс допустимых g.

Из /44/ теперь имеем

$$1 + t_0(y) = \sum_{r\in g^{-1}y} \phi_0(r) \qquad /47/$$

и, окончательно, вид оператора T:

$$(Tu)(x) = t_0(x) + \sum_{r\in g^{-1}y} \phi_0(r)u(r). \qquad /48/$$

В сущности, это есть суперпозиция преобразования изменения внешнего поля [7] и преобразования координат, вообще говоря, более общего, чем элементы группы движений.

В стратегии $\mathcal{K}_1$ этот результат сохраняется даже для непрерывных систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н.Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. ГИТТЛ, М., 1946.
2. Назин Г.И. ДАН СССР, т. 245, №6, с. 1352-1356.
3. Синай Я.Г. Теория фазовых переходов. "Наука", М., 1980.
4. Рюэль Д. Статистическая механика, "Мир", М., 1971.
5. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. "Мир", М., 1977, т.1.
6. Данфорд Н., Шварц Д. Линейные операторы. И-Д., М., 1962.
7. Назин Г.И. Труды II-го международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 25-29 августа, 1981. ОИЯИ, Д17-81-758, Дубна, 1981, с. 158-164.

Рукопись поступила в издательский отдел
28 мая 1982 года.

Назин Г.И. Ковариантность уравнения Боголюбова для производящего функционала равновесных классических систем — Р5-82-395

Замена независимой функциональной переменной в уравнении Боголюбова для производящего функционала рассматривается как оператор, действующий в пространстве абсолютно интегрируемых функций. Подкласс таких операторов, не меняющих формул уравнения Боголюбова, выделяется некоторой системой уравнений. Для решетчатых систем этот подкласс конструктивно описан.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Nazin G.I. The Covariance of the Bogolubov Equation for the Generating Functional for Equilibrium Classical Systems — P5-82-395

The change of the independent functional variable in the Bogolubov equation for the generating functional is described in terms of operators acting in the space of absolutely integrable functions. The subclass of such operators which do not change the form of the Bogolubov equations is characterized by a system of equations. For lattice systems, this subclass is constructively described.

The investigation has been performed at the Laboratory of the Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

Перевод О.С.Виноградовой.