сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P5-82-381

И.В.Амирханов, Е.П.Жидков

СУЩЕСТВОВАНИЕ ЧАСТИЦЕПОДОБНОГО РЕШЕНИЯ С ЗАДАННЫМ ЧИСЛОМ УЗЛОВ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ($\Psi^4 - \text{B}\Psi^6$)-ТЕОРИИ

1982

В [I] было доказано существование положительного частицеподобного решения нелинейного дифференциального уравнения

$$\ddot{\Psi}(t) - Q_\ell(t)\Psi(t) = -\Psi(t)F(\Psi^2(t),t), \tag{I}$$

$$Q_\ell(t) = \frac{\ell(\ell+1)}{t^2} + 1, \quad F(\Psi^2(t),t) = 4\frac{\Psi^2(t)}{t^2} - 3\eta^2\frac{\Psi^4(t)}{t^4}, \quad 0<\eta^2<1,$$

при граничных условиях

$$\Psi(0) = \Psi(+\infty) = 0, \tag{2}$$

и это решение обладает следующими свойствами:

$$\Psi(t) < \sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{1}{\eta}\,t, \tag{3}$$

$$\int_0^\infty \left[\dot{\Psi}^2(t) + Q_\ell(t)\Psi^2(t)\right]dt = \int_0^\infty \Psi^2(t)F(\Psi^2(t),t)\,dt. \tag{4}$$

В данной работе для любых натуральных значений параметры ℓ и при $0<\eta^2<1$ доказана следующая

<u>Теорема I</u>. Существуют решения $\Psi(t) = \Psi_n(t)$ $(n=0,1,2,\ldots)$ задачи (I)-(2), имеющие точно n нулей в интервале $0<t<\infty$.

Доказательство теоремы I проведено с помощью вариационного подхода, развитого в работах Нехари [2] и в [3,4].

Доказательство разбито на несколько этапов.

В § I сформулирована соответствующая вариационная задача (см. (I,I)-(I,2)) в интервале $0\le t<\infty$. Затем решение этой вариационной задачи связывается с решением $y_j(t)$ вспомогательной вариационной задачи (см.(I.6)-(I.7)). В § 2 установлено три свойства функционала вспомогательной вариационной задачи. С помощью этих свойств доказано, что исходный функционал достигает минимума при некотором разбиении $(\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_n)$ интервала $(0,\infty)$. В § 3 установлена непрерывность первых производных $y_j(t)$ в точках $\bar{t}_j$ $(j=1,2,\dots,n)$ и завершается доказательство теоремы I.

§ I. Сформулируем соответствующую вариационную задачу. Ищется минимум функционала

$$\mathfrak{J}(y) = \int_0^\infty [\dot{y}^2(t) + Q_\ell(t) y^2(t)]\, dt \tag{I.I}$$

при нормировочном условии

$$K(y) = \int_0^\infty G(y^2(t),t)\, dt = n+1, \qquad n=1,2,\dots, \tag{I.2}$$

где

$$G(y^2(t),t) = \int_0^{y^2(t)} F(z,t)\, dz. \tag{I.3}$$

Вариационную задачу (I.I)-(I.2) будем рассматривать в классе функций $Y(0,\infty)$, определяемых условиями:

а) $y(t)$ непрерывны в промежутке $[0,\infty)$ и имеют в нем кусочно-непрерывные первые производные $\dot{y}(t)$;

б) $\mathfrak{J}(y) < \infty$;

в) $K(y) = n+1$;

г) $y(0) = y(\infty) = 0$;

д) $y(x)$ имеет ровно n нулей в интервале $(0,\infty)$.

Под решением вариационной задачи (I.I)-(I.2) будем понимать функцию $y(x) \in Y(0,\infty)$, доставляющую минимум функционалу (I.I).

В дальнейшем будет показано, что решение вариационной задачи (I.I)-(I.2) является и решением задачи (I)-(2).

Доказательство существования решения вариационной задачи (I.I)-(I.2) проведем в несколько этапов.

Рассмотрим некоторое разбиение интервала $(0,\infty)$ точками $t_1, t_2, \dots, t_n$, где $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1} = \infty$. Учитывая это разбиение, вариационную задачу (I.I)-(I.2) перепишем так:

$$\mathfrak{J}(t_1,\dots,t_n,y) = \sum_{j=0}^{n} \mathfrak{J}_j, \tag{I.4}$$

$$K(t_1,\dots,t_n,y) = n+1, \tag{I.5}$$

где

$$\mathfrak{J}_j(y_j) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} [\dot{y}_j^2(t) + Q_\ell(t) y_j^2(t)]\, dt, \tag{I.6}$$

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} G(y_j^2(t),t)\, dt = 1. \tag{I.7}$$

Далее для любого промежутка $t_j \le t \le t_{j+1}$ рассмотрим существование знакоопределенных решений задачи (I.6)-(I.7) в классе функций $Y_j(t_j, t_{j+1})$, определяемых следующими условиями:

а) $y_j(t)$ непрерывны в промежутке $[t_j, t_{j+1}]$ и имеют в нем кусочно-непрерывные первые производные $\dot{y}_j(t)$;

б) $y_j(t_j) = y_j(t_{j+1}) = 0$;

в) $\mathfrak{J}_j(y_j) < \infty$;

г) $\int_{t_j}^{t_{j+1}} G(y_j^2(t),t)\, dt = 1$.

Повторяя рассуждения, аналогичные тем, которые проведены в работе /I/, можно убедиться, что для любого промежутка $t_j \le t \le t_{j+1}$ существует в классе функций $Y_j(t_j, t_{j+1})$ знакоопределенное решение $y_j(t)$ вариационной задачи (I.6)-(I.7), причем функция $y_j(t)$ удовлетворяет условию

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} [\dot{y}_j^2(t) + Q_\ell(t) y_j^2(t)]\, dt = \int_{t_j}^{t_{j+1}} y_j^2(t) F(y_j^2(t),t)\, dt \tag{I.8}$$

и является решением следующей краевой задачи:

$$\ddot{y}_j(t) - Q_\ell(t) y_j(t) = -y_j(t) F(y_j^2(t),t), \tag{I.9}$$

$$y_j(t_j) = y_j(t_{j+1}) = 0. \tag{I.10}$$

Итак, в каждом промежутке $t_j \le t \le t_{j+1}$ существует нетривиальное безузловое решение уравнения (I) при граничных условиях (I.10), удовлетворяющее условию (I.8).

Каждому значению $J(y)=J(t_1,\dots,t_n,y)$ при фиксированном разбиении интервала $(0,\infty)$ соответствует кривая $y(t)$, составленная из $y_j(t)$ $(j=0,1,2,\dots,n)$. Поскольку уравнение (I) от смены знака $y(t)$ не зависит, можно построить кривую так, что $y_j(t)$ и $y_{j+1}(t)$ имеют разные знаки. Покажем, что функция $J(t_1,\dots,t_n,y)$ достигает минимума при некотором разбиении $(\bar t_1,\dots,\bar t_n)$ интервала $(0,\infty)$ при выполнении условия (I.8) в каждом промежутке $[t_j, t_{j+1}]$. Существование такого разбиения является следствием следующих трех свойств $J_j = J_j(t_j, t_{j+1}, y_j)$ /2,3/.

§ 2. Лемма I

I. Если $t_j \le \hat t_j < \hat t_{j+1} \le t_{j+1}$, то

$$J_j(t_j, t_{j+1}, y_j) \le J_j(\hat t_j, \hat t_{j+1}, \hat y_j);$$

2. $J_j(t_j, t_{j+1}, y_j) \to \infty$, если $(t_{j+1}-t_j)\to 0$;

3. $J_j(t_j, t_{j+1}, y_j)$ – непрерывная функция от t_j, t_{j+1}.

лемма доказывается так же, как в работе /1/.

Теперь будем минимизировать функционал $J(t_1,\dots,t_n,y)$ на интервале $(0,\infty)$ при соблюдении условия (I.8) на каждом промежутке $t_j \le t \le t_{j+1}$. Минимизация ведется путем вариации точек t_j $(j=1,2,\dots,n)$. Учитывая три свойства J_j, приведенные в лемме I, убедимся, что функция $J(t_1,\dots,t_n,y)$ достигает минимума на некотором разбиении $(\bar t_1, \bar t_2,\dots,\bar t_n)$ интервала $(0,\infty)$.

В самом деле, согласно свойству 2 леммы I величины t_j должны быть отделены друг от друга, т.е. $(t_{j+1}-t_j)\ge\varepsilon$, где ε – достаточно маленькое фиксированное число, кроме этого, $t_n \le T$, где T – достаточно большое фиксированное число. Поэтому переменные $t_1, t_2,\dots,t_n$ изменяются в замкнутой ограниченной области, причем из свойства 3 леммы I видно, что в этой области функционал $J(t_1,\dots,t_n,y)$ – непрерывная функция переменных $t_1, t_2,\dots,t_n$.

Тогда существует ограниченная последовательность точек

$$\{t_{1m}, t_{2m},\dots,t_{nm}\} \qquad (m=1,2,\dots),$$

минимизирующая функционал $J(t_{1m},\dots,t_{nm},y)$ на интервале $(0,\infty)$ при соблюдении условия (I.8) на каждом промежутке $t_j \le t \le t_{j+1}$. Из нее можно извлечь подпоследовательность

$$\{t_{1\bar m}, t_{2\bar m},\dots,t_{n\bar m}\} \qquad (\bar m=1,2,\dots),$$

которая сходится к $(\bar t_1, \bar t_2,\dots,\bar t_n)$. В силу непрерывной зависимости $J(t_2,\dots,t_n,y)$ от переменных t_j $(j=1,2,\dots,n)$ получаем

$$\lim_{t_j\to\bar t_j\ (j=1,2,\dots,n)} J(t_1,\dots,t_n,y) = J(\bar t_1,\dots,\bar t_n,y) = \inf J(\bar t_1,\dots,\bar t_n,y).$$

Следовательно, $\min J$, действительно, достигается при некотором разбиении $(\bar t_1,\bar t_2,\dots,\bar t_n)$ интервала $[0,\infty)$. Функция $y_j(t)$ на каждом из интервалов $[\bar t_j, \bar t_{j+1}]$ удовлетворяет уравнению (I) и условию $y(\bar t_j)=y(\bar t_{j+1})=0$. Считаем без ограничения общности, что $y_j(t)$ меняет знак при прохождении через точки $\bar t_j$. Покажем теперь, что функция $y(t)$, составленная из $y_j(t)$ $(j=1,2,\dots,n)$, есть решение уравнения (I) на всем интервале $[0,\infty)$. Для этого достаточно установить равенство

$$\lim_{t\to\bar t_j-0} \dot y_j(t) = \lim_{t\to\bar t_j+0} \dot y_j(t), \quad j=1,2,\dots,n. \tag{2.I}$$

§ 3. Функция $y(t)$, составленная из $y_j(t)$ $(j=1,2,\dots,n)$, не будет решением вариационной задачи (I.I)-(I.2) на всем интервале $[0,\infty)$, если не будет выполняться условие (2.I).

Это утверждение доказывается точно так же, как в работе /4/.

Так как функция $y_j(t)$ на каждом промежутке $t_j \le t \le t_{j+1}$ является решением уравнения (I) и на концах промежутка выполняется условие (I.IO) и (2.I), то функция $y(t)$, составленная из $y_j(t)$ $(j=1,2,\dots,n)$, является решением краевой задачи (I)-(2) и тем самым завершается доказательство теоремы I.

В заключение отметим, что вопрос об однозначной разрешимости вариационной задачи (I.I)-(I.2) остается открытым. Другой вопрос, который остается без ответа, имеет ли задача (I)-(2) дополнительные решения с n нулями в $[0,\infty)$, который в то же время не является решением вариационной задачи (I.I)-(I.2).

Литература

I. Амирханов И.В., Жидков Е.П. ОИЯИ, P5-82-246, Дубна, I982.

2. Nehari Z. Proc. Royal Irish Acad., 1963, A62, p.117;
   Trans. Amer. Math. Soc. 1960, 95, p. 101;
   Acta Math. 1961, 105, p.141.

3. Ryder G.H. Pacific J. Math., 1967, 22, p. 477.

4. Амирханов И.В., Жидков Е.П. ОИЯИ, P5-I2925, Дубна, I979; ОИЯИ, P5-80-585, Дубна, I980.

Рукопись поступила в издательский отдел
26 мая I982 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Амирханов И.В., Жидков Е.П. Существование частицеподобного решения с заданным числом узлов нелинейного дифференциального уравнения $(\psi^4 - B\psi^6)$ - теории P5-82-381

Проведено исследование нелинейного уравнения

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) - \left(\frac{\ell(\ell+1)}{x^2}+1\right)\psi(x) = -\psi(x)\left[4\frac{\psi^2(x)}{x^2} - 3\eta^2\frac{\psi^4(x)}{x^4}\right],\quad 0<\eta^2<1, \qquad /1/$$

при граничных условиях

$$\psi(0)=\psi(\infty)=0. \qquad /2/$$

Уравнение /1/ при значениях параметра $\ell=0$ ранее исследовалось многими авторами.

В настоящей работе рассматриваются любые натуральные значения параметра ℓ. С помощью вариационного подхода доказано существование решений $\phi(x)=\phi_n(x)$ /$n=0,1,2,\ldots$/ краевой задачи /1/-/2/, имеющих точно n нулей в интервале $0\leq x<\infty$.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Amirkhanov I.V., Zhidkov E.P. Existence of Solution Having Given Number of Nodes of Nonlinear Differential Equation $\psi^4 - B\psi^6$ of Theory P5-82-381

The investigation of nonlinear equation

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) - \left(\frac{\ell(\ell+1)}{x^2}+1\right)\psi(x) = -\psi(x)\left[4\frac{\psi^2(x)}{x^2} - 3\eta^2\frac{\psi^4(x)}{x^4}\right],\quad 0<\eta^2<1, \qquad (1)$$

for boundary conditions

$$\psi(0)=\psi(\infty)=0. \qquad (2)$$

is performed. Equation (1) for zero value of 1 parameter was intestigated by many authors before. Arbitrary integer value of 1 is considered. By means of variational approach the existence of solutions $\phi(x)=\phi_n(x)$ ($n=0,1,2,\ldots$) of the boundary value problem (1)-(2) which has exactly n modes at the interval $0\leq x<\infty$ has been proved.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

Перевод О.С.Виноградовой.