сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5-82-246

И.В.Амирханов, Е.П.Жидков

СУЩЕСТВОВАНИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО ЧАСТИЦЕПОДОБНОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ Ψ^4 - ВΨ^6 ТЕОРИИ

1982

Различные физические модели, используемые в теории элементарных частиц[I-7], приводят к исследованию нелинейных уравнений в частных производных, поиск точного решения которых - практически безнадежная задача. Однако в некоторых случаях, используя определенные упрощения как физического, так и математического характера, удается перейти от уравнений в частных производных к обыкновенным нелинейным дифференциальным уравнениям. Тогда вопрос о существовании частицеподобных решений сводится к разрешимости краевых задач для этих уравнений. Так, например, некоторые полевые модели[2-7] приводят к рассмотрению существования частицеподобных решений следующего нелинейного дифференциального уравнения:

$$\ddot{\Psi}(x) - Q_\ell(x)\Psi(x) = -\Psi(x) F(\Psi^2(x), x) , \qquad (I)$$

при граничных условиях

$$\Psi(0) = \Psi(+\infty) = 0 , \qquad (2)$$

где

$$\ddot{\Psi}(x) = \frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} , \quad Q_\ell(x) = \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} + \eta^2, \quad \eta^2 \neq 0, \quad \ell = 0,1,2,\ldots$$

$F(\Psi^2(x), x)$ - некоторая нелинейная функция.

Выбирая из физических соображений конкретный вид $F(\Psi^2(x),x)$, получаем различные модели [2-7].

Под частицеподобными решениями понимаются любые нетривиальные решения $\Psi(x)$ краевой задачи (I)-(2). Положительное (безузловое) частицеподобное решение - это нетривиальное частицеподобное решение, не обращающееся в нуль ни в одной точке, кроме $x = 0$ и $x = \infty$.

В частном случае, когда нелинейная функция выбирается в виде $F(\Psi^2(x),x) = \left(\frac{\Psi(x)}{x}\right)^{k-1}$, $k>0$, краевая задача (I)-(2) исследовалась многими авторами /8-II/.

Рассмотрение другой физической модели привело авторов /4,5,I3/ к исследованию краевой задачи (I)-(2), когда нелинейная функция выбирается в виде

$$F(\Psi^2(x),x) = B_1\left(\frac{\Psi(x)}{x}\right)^{P_1} - B_2\left(\frac{\Psi(x)}{x}\right)^{P_2}, \qquad (3)$$

где $B_1>0$, $B_2>0$, $P_1>0$, $P_2>0$.

В этом случае, проводя качественное исследование уравнения (I) при $\ell=0$ в фазовой плоскости и решая это уравнение численно на ЭВМ, авторы /4,5/ пришли к выводу, что задача (I)-(2) при определенных ограничениях на параметры B_1, B_2, P_1, P_2 и η^2 имеет частицеподобные решения.

В случае модели Фридберга-Ли-Сирлина /4/ $(P_1=2,\ P_2=4,\ B_1=4,\ B_2=3)$ в работах /I2-I3/ приведены достаточные условия существования частицеподобных решений задачи (I)-(2) при $\ell=0$.

В работах /I4-I5/ проведено исследование краевой задачи (I)-(2), когда функция $F(z,x)$ удовлетворяет следующим условиям:

$(I_{\text{а}})$ $F(z,x)$ – непрерывна по z и x при $0\le z<\infty$ и $0<x<\infty$.

$(I_{\text{б}})$ $F(z,x)>0$ для $z>0$, $x>0$.

$(I_{\text{в}})$ для фиксированного положительного x и $0\le z_1<z_2<\infty$ существует $\delta>0$ такое, что

$$z_2^{-\delta}F(z_2,x) > z_1^{-\delta}F(z_1,x).$$

$(I_{\text{г}})$ $\lim\limits_{x\to\infty} F(c^2,x)=0$ для всех конечных C.

$(I_{\text{д}})$ $\int_0^a x^{\frac{1}{2}-\varepsilon}F(c^2x,x)dx<\infty$ для всех конечных C, $0<a<\infty$ и некоторого $\varepsilon\ge 0$.

При этих ограничениях на $F(z,x)$ и для $\ell=0$, $\eta^2=1$ в работах /I5,I6/ доказано существование решений краевой задачи (I)-(2). Для любых натуральных значений ℓ и $\eta^2>0$ эта задача исследована в работе /I6/.

Однако результаты /I4-I6/, полученные при общих ограничениях $(I_{\text{а}})$-$(I_{\text{д}})$, накладываемых на $F(z,x)$, не всегда применимы для конкретных частных моделей. Так, например, когда $F(z,x)$ имеет вид (3),

не все условия $(I_{\text{а}})$-$(I_{\text{д}})$ выполняются и поэтому теоремы, доказанные в работах /I5-I6/, непосредственно не применимы.

В настоящей работе исследуем модель Фридберга-Ли-Сирлина /4/ при любых натуральных значениях ℓ. Для этого, делая замену переменного $x=\frac{1}{\eta}t$ и учитывая (3), исходную краевую задачу перепишем в виде

$$\ddot{\Psi}(t) - Q_\ell(t)\Psi(t) = -\Psi(t)\,F(\Psi^2(t),t), \qquad (4)$$

$$\Psi(0) = \Psi(+\infty) = 0, \qquad (5)$$

где

$$Q_\ell(t) = \frac{\ell(\ell+1)}{t^2}+1, \quad F(\Psi^2(t),t) = 4\frac{\Psi^2(t)}{t^2} - 3\eta^2\frac{\Psi^4(t)}{t^4}.$$

Далее исследуем существование решения краевой задачи (4)-(5).

В заключение этого раздела будут доказаны две вспомогательные леммы и сформулирована основная теорема.

Лемма I. При значениях параметра

$$\eta^2 \ge \frac{4}{3} \qquad (6)$$

задача (4)-(5) не имеет частицеподобных решений.

Доказательство. В самом деле, переписав уравнение (4) в виде

$$\ddot{\Psi}(t) = \Psi(t)\left\{\frac{\ell(\ell+1)}{t^2} + 1 - \frac{4}{3\eta^2} + \frac{4}{3\eta^2}\left(1-\frac{3\eta^2}{2}\frac{\Psi^2(t)}{t^2}\right)^2\right\},$$

замечаем, что при выполнении условия (6) выражение в фигурной скобке всегда положительно. Следовательно, знак второй производной $\ddot{\Psi}(t)$ совпадает со знаком самой функции $\Psi(t)$. Предположим, что в окрестности точки $t=0$ имеем $\Psi(t)>0$ для $t>0$. Тогда, при $t>0$, очевидно, получаем $\ddot{\Psi}(t)>0$, так что $\Psi(t)$ – положительная растущая функция. Значит, при выполнении условия (6) задача (4)-(5) частицеподобных решений не имеет.

Замечание. Нетрудно доказать более сильное утверждение /I2/, что задача (4)-(5) не имеет решений при $|\eta^2|>1$. Однако оно нам сейчас не потребуется.

Следствие из леммы I. Итак, если задача (4)-(5) допускает частицеподобные решения, то их следует искать при

$$\eta^2 < \frac{4}{3} . \qquad (7)$$

Далее предполагаем, что условие (7) выполняется.

Лемма 2. Если при некоторых значениях $t > 0$ для функции $\Psi(t)$ выполняется условие

$$\Psi(t) \geqslant \sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{1}{\eta}\cdot\sqrt{1+\sqrt{1-\frac{3\eta^2}{4}}}\;t , \qquad (8)$$

то она не может быть частицеподобным решением.

Доказательство. Условие (8) означает, что при некоторых значениях t решение $\Psi(t)$ попадает в заштрихованную область I (см. рис.I)

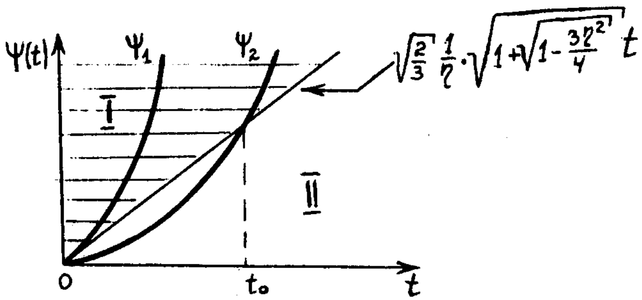

Рис.I

Решение $\Psi(t)$ может попасть в область I в окрестности точки $t=0$, если первая производная удовлетворяет условию

$$\dot\Psi(0) \geqslant \sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{\eta}\sqrt{1+\sqrt{1-\frac{3\eta^2}{4}}} \quad \text{(рис. I, кривая } \Psi_1\text{)},$$

или пересекая прямую $\Psi(t) = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{1}{\eta}\cdot\sqrt{1+\sqrt{1-\frac{3\eta^2}{4}}}\;t$

в некоторой точке $t = t_0$ (рис.I, кривая Ψ_2),

причем опять $\dot\Psi(t_0) \geqslant \sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{\eta}\cdot\sqrt{1+\sqrt{1-\frac{3\eta^2}{4}}}$.

Значит, каждый раз, когда попадаем в область I, производная

$$\dot\Psi \geqslant \sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{\eta}\cdot\sqrt{1+\sqrt{1-\frac{3\eta^2}{4}}} > 0 .$$

Переписав уравнение (4) в виде

$$\ddot\Psi(t) = \Psi(t)\, Q(\Psi(t), t) ,$$

где

$$Q(\Psi(t),t) = \frac{\ell(\ell+1)}{t^2} + 1 - F(\Psi^2(t), t) ,$$

замечаем, что при выполнении условия (8) имеем

$$Q(\Psi, t) > 0 ,$$

т.е. знак второй производной $\ddot\Psi(t)$ совпадает со знаком самой функции $\Psi(t)$. Так как и в первом и во втором случае $\Psi(t)>0$, $\dot\Psi(t)>0$ и $\ddot\Psi(t)>0$, то $\Psi(t)$-положительная растущая функция. Значит, при выполнении условия (8) функция $\Psi(t)$ не может быть частицеподобным решением.

Итак, если задача (4)-(5) допускает частицеподобные решения, то их следует искать в классе функций, удовлетворяющих условию

$$\Psi(t) < \sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{1}{\eta}\sqrt{1+\sqrt{1-\frac{3\eta^2}{4}}}\;t .$$

Теперь сформулируем и докажем основную теорему.

Теорема I. Существует положительное частицеподобное решение краевой задачи (4)-(5), удовлетворяющее неравенству

$$\Psi(t) < \sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{1}{\eta}\,t^{*}. \qquad (9)$$

Доказательство теоремы I проведено в §I-5 с помощью вариационного подхода.

§ I. Сформулируем вариационную задачу, соответствующую задаче (4)-(5). Ищется минимум функционала

$$J(y) = \int_0^\infty \left[\dot y^2(t) + Q_\ell(t)\,y^2(t)\right] dt \qquad (I.I)$$

при нормировочном условии

$$K(y) = \int_0^\infty G\,(y^2(t), t)\,dt = 1 , \qquad (I.2)$$

где

$$G(y^2(t),t)=\int_0^{y^2(t)} F(z,t)\,dz. \qquad (I.3)$$

Вариационную задачу (I.I)-(I.2) будем рассматривать в классе функций $Y(0,\infty)$, определяемых условиями:

а) $y(t)$ непрерывны в промежутке $[0,\infty)$ и имеют в нем кусочно-непрерывные первые производные $\dot y(t)$;

б) $y(t)>0$ при $0<t<\infty$;

в) $y(0)=y(\infty)=0$;

г) $J(y)<\infty$.

д) $K(y)=1$.

Под решением вариационной задачи (I.I)-(I.2) будем понимать функцию $y(t)\in Y(0,\infty)$, доставляющую минимум функционалу (I.I) при выполнении условия (I.2).

В дальнейшем будет показано, что решение вариационной задачи (I.I)-(I.2) существует и является решением задачи (4)-(5).

Теорема 2. Существует решение вариационной задачи (I.I)-(I.2), рассматриваемой на классе функций $Y(0,\infty)$. Это решение удовлетворяет условию (9).

Доказательство теоремы 2 является следствием утверждений, доказанных в следующих трех леммах (§§2-5).

§ 2. В этом параграфе установим некоторые оценки для функций $y(t)$ из класса $Y(0,\infty)$.

Лемма 3. В классе функций $Y(0,\infty)$, удовлетворяющих условию (9), существует последовательность $\{y_n(t)\}$, минимизирующая функционал (I.I), такая, что:

I. $\lim\limits_{n\to\infty} J(y_n)=\lambda$, $\lambda>0$. (2.I)

2. Для любого конечного T из последовательности $\{y_n(t)\}$ можно выбрать равномерно сходящуюся на отрезке $0\le t\le T$ последовательность $\{y_{n_m}(t)\}$, так что

$$\lim_{m\to\infty} y_{n_m}(t)=y(t), \qquad (2.2)$$

где $y(t)$ – непрерывная функция на $[0,T]$.

Доказательство разобьем на несколько этапов.

I. Докажем первое утверждение леммы I.
Введем обозначения

$$J_T(y)=\int_0^T\left[\dot y^2(t)+Q_\ell(t)\,y^2(t)\right]dt, \qquad (2.3)$$

$$K_T(y)=\int_0^T G(y^2(t),t)\,dt. \qquad (2.4)$$

Используя (2.3) и $y(0)=0$, при $0\le t\le T$ будем иметь

$$y^2(t)=\Big(\int_0^T \dot y(s)\,ds\Big)^2\le t\int_0^t \dot y^2(s)\,ds\le t\,J_T(y) \qquad (2.5)$$

и

$$y^2(t)=2\int_0^t \dot y(s)\,y(s)\,ds\le\int_0^t\left[\dot y^2(s)+y^2(s)\right]ds\le J_T(y). \qquad (2.6)$$

Учитывая условие (9) и неравенство (2.6) для $K_T(y)$, получаем оценку

$$K_T(y)\le \sigma_\ell\, J_T^2(y), \qquad (2.7)$$

где

$$\sigma_\ell=\begin{cases}\dfrac{4}{\ell(\ell+1)}, & \ell\ne 0\\ 16, & \ell=0.\end{cases}$$

Так как

$$\lim_{T\to\infty} J_T(y)=J(y)<\infty, \qquad (2.8)$$

то из (2.5) и (2.6) имеем

$$y^2(t)\le t\,J(y), \qquad (2.9)$$

$$y^2(t)\le J(y). \qquad (2.I0)$$

Переходя к пределу в (2.7) при $T\to\infty$ и учитывая (I.2), получим

$$1\le\sigma_\ell\, J^2(y). \qquad (2.II)$$

Из (2.II) следует, что точная нижняя грань функционала (I.I) при выполнении условия (I.2) и (9) является положительной.

$$\inf_{y \in Y(0,\infty)} J(y) = \lambda > 0.$$

Тогда существует такая последовательность функций $\{y_n\} \in Y(0,\infty)$, минимизирующая последовательность, что

$$\lim_{n\to\infty} J(y_n) = \lambda \ , \ \lambda > 0 \ .$$

Это и доказывает первое утверждение леммы I.

2. Докажем второе утверждение леммы I.

Из (2.I) следует, что числовая последовательность $\{J(y_n)\}$ ограничена, т.е. существует положительная постоянная C, не зависящая от n, такая, что

$$J(y_n) \le C^2 \ , \quad n = 1, 2, \dots \ . \tag{2.I2}$$

Из (2.I0) и (2.I2) имеем

$$y_n(t) \le C \ , \quad n = 1, 2, \dots , \tag{2.I3}$$

т.е. последовательность $\{y_n(t)\}$ равномерно ограничена. Кроме того, для $0 \le t_1 < t_2 < \infty$ имеем

$$|y_n(t_2) - y_n(t_1)|^2 = \left(\int_{t_1}^{t_2} \dot y_n(s)\,ds\right)^2 \le (t_2 - t_1)\int_{t_1}^{t_2} \dot y_n^2(s)\,ds \le \tag{2.I4}$$

$$\le (t_2 - t_1)\, J(y_n) \le C^2 (t_2 - t_1) .$$

Это устанавливает равностепенную непрерывность последовательности $\{y_n\}$.

Из последовательности $\{y_n(t)\}$, рассматриваемой на любом конечном отрезке $0 \le t \le T$, согласно теореме Арцела можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность $\{y_{n_m}(t)\}$, которая сходится к непрерывной функции $y(t)$ на $[0,T]$, что и доказывает второе утверждение леммы I.

В следующих двух параграфах исследуется вопрос о непрерывности предельной функции $y(t)$ и ее производной на бесконечном интервале $(0,\infty)$.

§ 3. Следуя Нехари/9/, рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение

$$\ddot u_n(t) - Q_\ell(t)\, u_n(t) = -\alpha_n y_n(t)\, F(y_n^2(t), t) \qquad n = 1, 2, \dots \tag{3.I}$$

при граничных условиях

$$u_n(0) = u_n(\infty) = 0, \tag{3.2}$$

где α_n - некоторая положительная постоянная, которая будет выбрана ниже, а $y_n(t)$ - ранее выбранная равномерно сходящаяся подпоследовательность $\{y_{n_m}(t)\}$ (для краткости индекс m опущен).

<u>Лемма 4.</u> Если функции $y_n(t)$ удовлетворяют условию (9), то существует единственное решение $u_n(t)$ задачи (3.I)-(3.2). Это решение обладает следующими свойствами:

$$\lim_{t\to 0} u_n(t)\,\dot u_n(t) = 0 , \quad \lim_{t\to\infty} u_n(t)\,\dot u_n(t) = 0. \tag{3.3}$$

<u>Доказательство.</u> Очевидно, что однородное уравнение

$$\ddot \Phi(t) - Q_\ell(t)\, \Phi(t) = 0, \tag{3.4}$$

соответствующее уравнению (3.I), при граничных условиях $\Phi(0) = \Phi(\infty) = 0$ имеет только тривиальное решение.

Решение краевой задачи (3.I)-(3.2) представим в виде интеграла

$$u_n(t) = \alpha_n \int_0^\infty \mathcal{D}(t,s)\, y_n(s)\, F(y^2(s), s)\, ds , \tag{3.5}$$

где

$$\mathcal{D}(t,s) = \frac{1}{N} \begin{cases} \Phi_1(s)\,\Phi_2(t) , & 0 \le s \le t , \\ \Phi_1(t)\,\Phi_2(s) , & t \le s < \infty . \end{cases} \tag{3.6}$$

Здесь $\Phi_1(t)$ и $\Phi_2(t)$ - соответственно регулярное и нерегулярное в точке $t = 0$ линейно-независимые решения уравнения (3.4), причем $[\dot\Phi_1 \Phi_2 - \Phi_1 \dot\Phi_2] = N$. Для функций Φ_1 и Φ_2 при $0 \le t < \infty$ имеют место оценки

$$\Phi_1(t) \le \beta_{1\ell} \left(\frac{t}{1+t}\right)^{\ell+1} e^{t} , \tag{3.7}$$

$$\Phi_2(t) \le \beta_{2\ell} \left(\frac{t}{1+t}\right)^{-\ell} e^{-t} ,$$

где

$\beta_{1\ell}$, $\beta_{2\ell}$ – положительные постоянные и $N = 2\beta_{1\ell}\beta_{2\ell}$.

Найдем поведение функции $u_n(t)$ при $t \to 0$ и $t \to \infty$. Для этого соотношение (3.5) перепишем в виде

$$u_n(t) = \frac{\alpha_n}{N}\left[\Phi_2(t)\Psi_1(t) + \Phi_1(t)\Psi_2(t)\right], \tag{3.8}$$

где

$$\Psi_1(t) = \int_0^t \Phi_1(s)\, y_n(s)\, F(y_n^2(s), s)\, ds, \tag{3.9}$$

$$\Psi_2(t) = \int_t^\infty \Phi_2(s)\, y_n(s)\, F(y_n^2(s), s)\, ds. \tag{3.10}$$

Используя неравенства (2.10) и (3.7), получаем следующие оценки для Ψ_1 и Ψ_2:

а) при $t \to 0$

$$\Psi_1(t) \le \beta_{1\ell}\, \sigma_\ell\, \mathfrak{J}^{3/2}(y_n)\left(\frac{t}{1+t}\right)^{\ell+1} e^t, \tag{3.11}$$

$$\Psi_2(t) \le \beta_{2\ell}\, \sigma_\ell\, \mathfrak{J}^{3/2}(y_n)\left(\frac{t}{1+t}\right)^{-\ell} e^{-t};$$

б) при $t \to \infty$

$$\Psi_1(t) \le \Psi_1(t_0) + \beta_{1\ell}\, \sigma_\ell\, \mathfrak{J}^{3/2}(y_n)\left(\frac{t}{1+t}\right)^{\ell} M_1(t, t_0), \tag{3.12}$$

$$\Psi_2(t) \le \beta_{2\ell}\, \sigma_\ell\, \mathfrak{J}^{3/2}(y_n)\left(\frac{t}{1+t}\right)^{-\ell} e^{-t}\frac{1}{t^2},$$

где

$$M_1(t, t_0) = \int_{t_0}^t e^s \frac{s}{1+s}\cdot\frac{1}{s^2}\, ds, \quad 0 < t_0 < t.$$

Учитывая оценки (3.11) и (3.12), из равенства (3.8) получаем оценки для $u_n(t)$:

а) при $t \to 0$

$$u_n(t) \le \alpha_n\, \sigma_\ell\, \mathfrak{J}^{3/2}(y_n)\, t, \tag{3.13}$$

б) при $t \to \infty$

$$u_n(t) \le \alpha_n\, \sigma_\ell\, \mathfrak{J}^{3/2}(y_n)\, M(t, t_0) + \alpha_n \Psi_1(t_0)\frac{1}{2\beta_{1\ell}}\left(\frac{t}{1+t}\right)^{-\ell} e^{-t}, \tag{3.14}$$

где

$$M(t, t_0) = e^{-t} M_1(t, t_0) + \frac{t}{1+t}\,\frac{1}{t^2}.$$

Нетрудно убедиться, что

$$\lim_{t \to \infty} M(t, t_0) \to 0. \tag{3.15}$$

Покажем, что выполняются предельные соотношения (3.3). Для этого найдем поведение производных $\dot{u}_n(t)$ при $t \to 0$ и $t \to \infty$. Дифференцируя равенство (3.8) по t, получаем

$$\dot{u}_n(t) = \frac{\alpha_n}{N}\left[\dot{\Phi}_2\Psi_1(t) + \dot{\Phi}_1(t)\Psi_2(t)\right]. \tag{3.16}$$

Используя оценки (3.11) и (3.12), из (3.16) получаем оценки для $\dot{u}_n(t)$:

а) при $t \to 0$

$$\dot{u}_n(t) \le \alpha_n\, \sigma_\ell\, \mathfrak{J}^{3/2}(y_n)\, M_2; \tag{3.17}$$

б) при $t \to \infty$

$$\dot{u}_n(t) \le \alpha\, \sigma_\ell\, \mathfrak{J}^{3/2}(y_n)\, M_3, \tag{3.18}$$

где

$$M_2 = 2\ell + \frac{\beta_{1(\ell-1)}}{\beta_{1\ell}}(1+t) + \frac{\beta_{2(\ell-1)}}{\beta_{2\ell}}\, t\left(\frac{t}{1+t}\right),$$

$$M_3 = e^{-t} M_1(t, t_0)\left(\frac{\beta_{2(\ell-1)}}{\beta_{2\ell}}\,\frac{t}{1+t} + \frac{\ell}{t}\right) + \frac{\beta_{1(\ell-1)}}{\beta_{1\ell}}\,\frac{1}{t^2} + \frac{\ell}{t^2(1+t)}.$$

Из (3.I3)-(3.I8) следуют предельные соотношения (3.3). Функция (3.5) является единственным решением краевой задачи (3.I)-(3.2). Лемма 4 доказана полностью.

В заключение этого раздела отметим, что при выполнении неравенства

$$\alpha_n \sigma_\ell \, \mathcal{J}^{3/2}(y_n) \le \sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{1}{\eta} \qquad (3.I9)$$

последовательность $\{u_n\}$ решений краевой задачи (3.I)-(3.2) также удовлетворяет условию(9).

§ 4. В этом параграфе установим некоторые свойства решений краевой задачи (3.I)-(3.2).

<u>Лемма 5</u>. Если функции $\{y_n(t)\}$ удовлетворяют условию (9), то имеют место следующие утверждения:

I. Можно так выбрать α_n в уравнениях (3.I), что решения $\{u_n(t)\}$ краевой задачи (3.I)-(3.2) принадлежат классу функций $Y(0,\infty)$.

2. Из последовательности $\{u_n(t)\}$ можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность $\{u_{n_m}(t)\}$, причем предельная функция $u(t)=\lim\limits_{m\to\infty} u_{n_m}(t)$ является непрерывной при $0 \le t < \infty$.

3. Пределы последовательностей $\{u_{n_m}(t)\}$ и $\{y_{n_m}(t)\}$ совпадают, т.е.

$$u(t) = \lim_{m\to\infty} u_{n_m}(t) = \lim_{m\to\infty} y_{n_m}(t) = y(t) \qquad (4.I)$$

при $0 \le t < \infty$.

4. Производная $\dot u(t)$ предельной функции $u(t)$ непрерывна при $0 \le t < \infty$, причем

$$\lim_{n_m\to\infty} \dot u_{n_m}(t) = \dot u(t). \qquad (4.2)$$

Доказательство леммы проведем в несколько этапов.

I. Укажем способ выбора α_n , $u_n(t) \in Y(0,\infty)$.
Покажем, что функции $u_n(t)$ удовлетворяют условиям а) - г), определяющим класс функции $Y(0,\infty)$.

В самом деле:

а) так как функция $u_n(t)$ является решением уравнения второго порядка (3.I), то она непрерывна на $[0,\infty)$ и имеет непрерывную производную $\dot u_n(t)$ на $(0,\infty)$;

б) так как $\alpha_n > 0$, $y_n(t)$ и $\mathcal{D}(t,s)$ - положительные функции при $0<t<\infty$, $y_n(t)$ удовлетворяет условию (9), то из (3.5) следует, что и $u_n(t)$ - положительная функция при $0<t<\infty$.

в) так как $u_n(t)$ - решение краевой задачи (3.I)-(3.2), то, очевидно, $u_n(0) = u_n(\infty) = 0$;

г) покажем, что интеграл $\mathcal{J}(u_n)$ (см.(I.I)) существует. Умножая уравнение (3.I) на $u_n(t)$, интегрируя обе части по t от 0 до T и учитывая (2.3) и (3.3), получим

$$\mathcal{J}_T(u_n) = \alpha_n \int_0^T u_n(s) y_n(s) F(y^2(s),s)\,ds + u_n(T)\dot u_n(T), \qquad (4.3)$$

или

$$\mathcal{J}_T(u_n) \le \alpha_n \mathcal{J}_T^{\frac{1}{2}}(u_n)\sigma_\ell \, \mathcal{J}_T^{3/2}(y_n) + u_n(T)\dot u_n(T). \qquad (4.4)$$

Переходя к пределу в (4.3) при $T\to\infty$ и учитывая (3.3), имеем

$$\mathcal{J}^{\frac{1}{2}}(u_n) \le \alpha_n \sigma_\ell \, \mathcal{J}^{\frac{3}{2}}(y_n) \quad ,$$

т.е. $\mathcal{J}(u_n) < \infty$.

Так как при выполнении условия (3.I9) последовательность $\{u_n(t)\}$ также удовлетворяет условию (9), то неравенство (2.7) справедливо для функции $u_n(t)$:

$$K_T(u_n) \le \sigma_\ell \, \mathcal{J}_T^2(u_n). \qquad (4.5)$$

Переходя в (4.5) к пределу при $T\to\infty$, получим

$$K(u_n) < \infty . \qquad (4.6)$$

Теперь убедимся, что постоянные α_n можно подобрать так, чтобы $K(u_n)=1$. Учитывая (3.5), условие нормировки (I.2) перепишем в виде

$$\alpha_n \int_0^\infty \frac{\psi_n^4}{t^2} A_n(t)\,dt = 1 \ , \qquad (4.7)$$

где

$$\Psi_n = \int_0^\infty \mathcal{D}(t,s)\, y_n(s) F(y_n^2(s),s)\, ds,$$

$$A_n(t) = \left[2 - \gamma^2 \frac{u_n^2}{t^2}\right],$$

причем при выполнении условия (3.I9) справедливо

$$\frac{4}{3} \le A_n(t) \le 2.$$

Тогда из (4.7) видно, что всегда можно подобрать α_n так, чтобы выполнялось условие $K(U_n) = 1$.

Итак, доказано, что $U_n(t) \in Y(0,\infty)$.

Покажем теперь, что последовательность $\{\alpha_n\}$, подобранная из условия нормировки $K(U_n)=1$, является ограниченной и существует $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$.

Из (4.3) при $T\to\infty$ имеем

$$\mathcal{J}(U_n) = \alpha_n \int_0^\infty U_n(s)\, y_n(s) F(y_n^2(s),s)\, ds. \qquad (4.8)$$

Так как функции $y_n(t)$ и $U_n(t)$ удовлетворяют условию (9), то функция $G(z,t)$ (см. (I.3)) является выпуклой по переменной z и мы имеем

$$G(U_n^2,t) \ge G(y_n^2,t) + (U_n^2 - y_n^2) F(y_n^2,t). \qquad (4.9)$$

Интегрируя обе части (4.9) по t от 0 до ∞ и используя (I.2), получим

$$\int_0^\infty U_n^2(s) F(y_n^2(s),s)\, ds \le \int_0^\infty y_n^2(s) F(y_n^2(s),s)\, ds. \qquad (4.10)$$

Применяя неравенство Гельдера к интегралу, стоящему в правой части (4.8), и учитывая (4.I0), имеем

$$\mathcal{J}(U_n) \le \alpha_n \int_0^\infty y_n^2(s) F(y_n^2(s),s)\, ds. \qquad (4.11)$$

Умножая уравнение (3.I) на $y_n(t)$, интегрируя обе части по t от 0 до ∞ и используя (3.3), получим

$$\mathcal{J}(U_n) + \mathcal{J}(y_n) - \mathcal{J}(U_n - y_n) = 2\alpha_n \int_0^\infty y_n^2(s) F(y_n^2(s),s)\, ds. \qquad (4.12)$$

Из (4.II) и (4.I2) получаем неравенства

$$\mathcal{J}(U_n) \le \mathcal{J}(y_n). \qquad (4.13)$$

Так как последовательность функций $\{U_n(t)\}$ также является допустимой для вариационной задачи (I.I)-(I.2), то нижний предел

$$\varliminf_{n\to\infty} \mathcal{J}(U_n) \ge \lambda. \qquad (4.14)$$

Тогда из (2.I), (4.I3) и (4.I4) получим

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{J}(U_n) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{J}(y_n) = \lambda. \qquad (4.15)$$

Учитывая (I.2), (2.I2) и (4.I3), из (4.I2) не трудно получить, что последовательность $\{\alpha_n\}$ ограничена, т.е.

$$\alpha_n \le c^2, \quad n = 1,2,3,\dots \qquad (4.16)$$

Отсюда следует, что из последовательности $\{\alpha_n\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность α_{n_m}, т.е.

$$\lim_{m\to\infty} \alpha_{n_m} = \alpha.$$

2. Докажем утверждение пункта 2° леммы 5.

Учитывая (4.I6), оценки (3.I3) и (3.I4), перепишем в следующем виде:

а) при $t\to 0$

$$U_n(t) \le c^5 \sigma_\ell t, \qquad (4.17)$$

б) при $t\to\infty$

$$U_n(t) \le c^5 \sigma_\ell M(t,t_0) + c^2 \Psi_1(t_0) \frac{1}{2\beta_{1\ell}} \left(\frac{t}{1+t}\right)^{-\ell} e^{-t}. \qquad (4.18)$$

Правая часть неравенств (4.I7) и (4.I8) не зависит от индекса n. Из (2.I3) и (4.I3) следует

$$U_n(t) \le c, \quad n = 1,2,3,\dots, \qquad (4.19)$$

т.е. последовательность $\{U_n(t)\}$ равномерно ограничена.

Кроме того, для $0 \le t_1 < t_2 < \infty$ имеем (см.(2.I4))

$$|U_n(t_2) - U_n(t_1)|^2 \le c^2 (t_2 - t_1). \qquad (4.20)$$

Это устанавливает равностепенную непрерывность последовательности $\{u_n\}$.

Тогда, учитывая (4.I7)-(4.20), убеждаемся, что последовательность функций $\{u_n(t)\}$ удовлетворяет всем условиям теоремы о компактности класса функций на бесконечном интервале /I7/. Следовательно, из $\{u_n\}$ можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность $\{u_{n_m}(t)\}$:

$$\lim_{m\to\infty} u_{n_m}(t) = u(t), \tag{4.21}$$

причем $u(t)$ является непрерывной функцией при $0 \le t < \infty$. Доказан пункт 2^0 леммы 5.

3. Докажем утверждение пункта 3^0 леммы 5.
Так как формулы (4.II) и (4.I2) справедливы и для подпоследовательности $\{u_{n_m}(t)\}$ и $\{y_{n_m}(t)\}$, то из (4.II) и (4.I2) имеем

$$\lim_{m\to\infty} \mathcal{J}(u_{n_m} - y_{n_m}) = 0. \tag{4.22}$$

Тогда из (2.I0) и (4.22) получим

$$\lim_{m\to\infty} |u_{n_m}(t) - y_{n_m}(t)| = 0, \tag{4.23}$$

откуда с учетом (4.2I) вытекает соотношение (4.I), что и требовалось доказать.

4. Докажем утверждение пункта 4^0 леммы 5.
Для этого равенство (3.5) перепишем в виде

$$\left| y_{n_m} - \alpha_{n_m} \int_0^\infty \mathcal{D}(t,s)\, y_{n_m} F(y_{n_m}^2, s)\, ds \right| = \left| y_{n_m}(t) - u_{n_m}(t) \right|$$

и перейдем к пределу при $m\to\infty$. Учитывая (4.I) и (4.23), получим

$$y(t) = \alpha \int_0^\infty \mathcal{D}(t,s)\, y(s)\, F(y^2(s), s)\, ds. \tag{4.24}$$

Дифференцируя (4.24) по t, заменяя $y(t)$ на $u(t)$, будем иметь

$$\dot{u}(t) = \frac{\alpha}{N}\Big[\dot{\phi}_2(t)\int_0^t \phi_1(s) u(s) F(u^2(s), s)\, ds + \dot{\phi}_1(t)\int_t^\infty \phi_2(s) u(s) F(u^2(s), s)\, ds\Big]. \tag{4.25}$$

Отсюда следует, что $\dot{u}(t)$ непрерывна при $0 < t < \infty$.

Теперь перепишем (3.I6) в виде

$$\dot{u}_{n_m}(t) = \frac{\alpha_{n_m}}{N}\Big[\dot{\phi}_2(t)\int_0^t \phi_1(s) y_{n_m}(s) F(y_{n_m}^2(s), s)\, ds + \dot{\phi}_1(t)\int_t^\infty \phi_2(s) y_{n_m}(s) F(y_{n_m}^2(s), s)\, ds\Big]. \tag{4.26}$$

Сравнивая (4.25) и (4.26), получим

$$\lim_{m\to\infty} \dot{u}_{n_m}(t) = \dot{u}(t), \tag{4.27}$$

что и доказывает (4.2).

Лемма 5 доказана полностью.

Некоторые следствия из леммы 5.

Из (4.I), (4.2) и (4.25) следует

$$\lim_{m\to\infty} \mathcal{J}(u_{n_m}) = \mathcal{J}(u) = \lambda. \tag{4.28}$$

Так как $1 = K(y) \le \int y^2(s) F(y^2(s), s)\, ds$, то из (4.8), учитывая (4.I) и (4.28), получим

$$\alpha \le \lambda. \tag{4.29}$$

Перепишем (I.2) в виде

$$1 = K(y) = \int_0^\infty G(y^2(t), t)\, dt = \int_0^\infty y^2(t)\Big[2\frac{y^2(t)}{t^2} - \eta^2 \frac{y^4(t)}{t^4}\Big] dt$$

$$= \frac{1}{\eta^2}\int_0^\infty y^2(t)\Big[1 - \Big(1 - \eta^2 \frac{y^2}{t^2}\Big)^2\Big] dt < \frac{1}{\eta^2}\int_0^\infty y^2\, dt \le \frac{\mathcal{J}(y)}{\eta^2}.$$

Отсюда имеем

$$\eta^2 < \lambda. \tag{4.30}$$

Неравенство (3.I9) перепишем в виде

$$\alpha\, \sigma_\ell\, \lambda^{3/2} < \sqrt{\frac{2}{3}}\, \frac{1}{\eta},$$

или

$$\sigma_\ell^2 \alpha^2 \lambda^3 \eta^2 < \frac{2}{3}. \tag{4.31}$$

Из (4.29), (4.30) и (4.3I) получим ограничение на параметр η^2, а именно:

$$\eta^2 < \left(\frac{2}{3\sigma_\ell^2}\right)^{\frac{1}{2}} . \tag{4.32}$$

Таким образом, из лемм 3,4,5 следует, что для значений параметра η^2, удовлетворяющих условию (4.32), предельная функция $y(t)$ удовлетворяет условию (9) и будет решением рассматриваемой вариационной задачи (I.I)-(I.2).

Теорема 2 доказана полностью.

§ 5. Покажем, наконец, что из существования решения вариационной задачи (I.I)-(I.2) следует существование решения краевой задачи (4)-(5).

Дифференцируя (4.24) дважды по t, получим

$$\ddot{y}(t) - Q_\ell(t)y(t) = -\alpha\, y(t)\left[4\frac{y^2(t)}{t^2} - 3\eta^2\frac{y^4(t)}{t^4}\right], \tag{5.I}$$

причем $y(t)$ удовлетворяет граничным условиям

$$y(0) = y(\infty) = 0 . \tag{5.2}$$

Уравнение (5.I) отличается от уравнения (4) наличием множителя α. Посредством линейной замены

$$y(t) = \frac{\Psi(t)}{\sqrt{\alpha}}$$

уравнение (5.I) приводится к виду (4), т.е.

$$\ddot{\Psi}(t) - Q_\ell(t)\Psi(t) = -\Psi(t)\left[4\frac{\Psi^2(t)}{t^2} - 3\hat{\eta}^2\frac{\Psi^4(t)}{t^4}\right], \tag{5.3}$$

$$\Psi(0) = \Psi(\infty) = 0 , \tag{5.4}$$

где

$$\hat{\eta}^2 = \frac{\eta^2}{\alpha} . \tag{5.5}$$

Учитывая (5.5), неравенство (4.30) перепишем в виде

$$\hat{\eta}^2 = \frac{\eta^2}{\alpha} < \frac{\lambda}{\alpha} . \tag{5.6}$$

Так как из (4.29) имеем $1 \leq \frac{\lambda}{\alpha}$, то для всех

$$\hat{\eta}^2 < 1 \tag{5.7}$$

неравенство (5.6) выполняется.

Таким образом, из существования решения вариационной задачи (I.I)-(I.2) следует существование решения краевой задачи (I)-(2). Параметр $\hat{\eta}^2$ удовлетворяет условию (5.7) и решения $\Psi(t)$ удовлетворяют интегральному соотношению (см. 4.8)

$$\int\left[\dot{\Psi}^2(t) + Q_\ell(t)\Psi^2(t)\right]dt = \int \Psi^2(t)\left[4\frac{\Psi^2(t)}{t^2} - 3\hat{\eta}^2\frac{\Psi^4(t)}{t^4}\right]dt . \tag{5.8}$$

Теорема I доказана полностью.

В заключение отметим, что все рассуждения можно провести для моделей, когда нелинейную функцию $F(\Psi^2(t), t)$ выбирают в виде (3).

Авторы выражают благодарность Г.И.Макаренко за многочисленные полезные обсуждения.

Литература

I. Faddeev L.D., Korepin V.E. Phys. Reports., 1978, 42, p.1.
Makhankov V.G. Phys. Reports., 1978, 35, p.1.

2. Finkelstein R.J. et al. Phys. Rev., 1951, 83, p.326.
3. Гласко В.Б. и др. ЖЭТФ, I958, 35, с.452.
4. Friedberg R. et al. Nucl. Phys., 1976, B115, p.1.
5. Anderson D.L.T., J.Math Phys., 1971, 12, p.945.
Катышев Ю.В., Маханьков В.Г. ОИЯИ, Р2-I0547, Дубна, I977.
6. Заставенко Л.Г. ПММ, I965, 29, с.430.
7. Амирханов И.В., Жидков Е.П. Совместный научный сборник ОИЯИ (Дубна) и ЦИФИ (Будапешт, Венгрия), вып. 3, KFKI, I979-82, с.I65.
8. Жидков Е.П., Шириков В.П. ОИЯИ, Р-I3I9, Дубна, I963; ЖФМ и МФ, I964, 4, с.804.

9. Nehari Z. Proc. Royal Irich. Acad., 1963, A62, p.117.

10. Амирханов И.В. и др. ОИЯИ, Р5-11705, Дубна, 1978;
ОИЯИ, Р5-11866, Дубна, 1978.

11. Амирханов И.В., Макаренко Г.И. ОИЯИ, Р5-11865, Дубна, 1978.

12. Жидков Е.П., Жидков П.Е. ОИЯИ, Р5-11599, Дубна, 1978;
ОИЯИ, Р5-11600, Дубна, 1978.

13. Berger M.S. J. Funct. Anal.,1972, 9, p.249.
Strauss W.A. Commun. Math. Phys., 1977, 55, p.149.

14. Ryder G.H. Pacific J. Math., 1967, 22, p.477.

15. Nehari Z. Trans. Amer. Math. Soc., 1960, 95, p.101;
Acta Math. 1961, 105, p.141.

16. Амирханов И.В., Жидков Е.П. ОИЯИ, Р5-80-479, Дубна, 1980;
ОИЯИ, Р5-80-585, Дубна, 1980.

17. Функциональный анализ (под ред. С.Г.Крейна). "Наука", М., 1972.

Рукопись поступила в издательский отдел
2 апреля 1982 года.