сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P5-82-242

А.Б.Швачка, А.Б.Яновски

МЕТОД УОЛКВИСТА-ЭСТАБРУКА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ.

Случай двух пространственных переменных

1982

В работе [1] изложен метод Уолквиста-Эстабрука [2,3], который может быть использован для исследования нелинейных эволюционных уравнений с двумя независимыми переменными x и t. Напомним вкратце, в чем состоит идея метода.

Любому эволюционному уравнению с независимыми переменными x и t сопоставляется набор 2-форм $\{a_i\}$, $i=1,2,\dots,N$, таких, что имеет место взаимно-однозначное соответствие между решениями уравнения и интегральными многообразиями системы форм $\{a_i\}$. Предполагается, что на соответствующем многообразии X система форм $\{a_i\}$ вполне интегрируема, т.е. идеал I, определяемый формами $\{a_i\}$, замкнут:

$$dI \subset I. \qquad /1/$$

Далее вводится структура продолжения, представляющая собой набор 1-форм ω^β, $\beta=1,2,\dots,M$ на $X\times Y$, $Y=\{(\zeta^1,\zeta^2,\dots,\zeta^M)\}$, таких, что

$$d\omega \subset \pi^* I + \omega, \qquad /2/$$

где π - проекция $X\times Y$ на X. В силу уравнения /2/ система $\{\pi^* a_i, \omega^\beta\}$ интегрируема на $X\times Y$ и проекция любого интегрального многообразия этой системы на X является интегральным многообразием для системы форм $\{a_i\}$. Если 1-формы ω^β образуют однопараметрическое семейство, $\omega^\beta=\omega^\beta(\lambda)$, то уравнения для переменных ζ, вытекающие из условия равенства нулю 1-форм ω^β, являются уравнениями типа условий нулевой кривизны /НК/ для исходного дифференциального уравнения.

Ниже изложена одна из возможностей обобщения этого метода на случай двух пространственных переменных. Следуя Морису [4,5], полагаем, что вторая пространственная переменная y входит в уравнение специальным образом, так что уравнение не содержит производных выше первой по переменной y. Сформулируем некоторые общие замечания. Пусть система 2-форм $\{a_i\}$ задает систему эволюционных уравнений с независимыми переменными x,t и пусть известна структура продолжения ω^β, $i=1,2,\dots,N$; $\beta=1,2,\dots,M$. Потребуем, чтобы [1]

$$\omega^\beta = d\zeta^\beta + (F_a^\beta dx + G_a^\beta dt)\zeta^a, \qquad /3/$$

где F_a^β, G_a^β -функции на $X\times Y$. Ввиду условия /2/

$$d\omega^\beta = f^{\beta i} a_i + \eta_\gamma^\beta \wedge \omega^\gamma, \qquad /4/$$

где f^{β_i}-функции на $X \times Y$, η^{β}_{γ} - 1-формы на $X \times Y$. Отметим, что формы a_i из идеала I по-разному используются при определении уравнений движения. Некоторые из них являются формами линеаризации[1] и служат для определения одних величин через другие, тогда как остальные более тесно связаны с уравнениями движения и их называют динамическими формами.

Пусть при добавлении новой пространственной переменной новые формы линеаризации не вводятся. Это как раз означает, что при таком рассмотрении нельзя получить уравнения, в которые входят производные выше первой по переменной y. Будем искать обобщение идеала I, полагая :

$$\bar{a}_i = \bar{a}_i \wedge dy, \qquad i = 1, 2, \dots, k \qquad /5/$$

для форм линеаризации и

$$\bar{a}_i = \bar{a}_i \wedge dy + \beta_i, \quad i = k+1, \dots, N \qquad /6/$$

для динамических форм, где β_i -набор из 3-форм, зависящих от переменной y. Для форм продолжения потребуем, чтобы

$$\bar{\omega}^{\beta} = \omega^{\beta} \wedge dy + H^{\beta}_{\gamma} \zeta^{\gamma} dx \wedge dt + (A^{\beta}_{\gamma} dx + B^{\beta}_{\gamma} dt) \wedge d\zeta^{\gamma}. \qquad /7/$$

Пока не удалось получить удовлетворительных результатов для более общего случая, когда матрицы A и B зависят от переменных t, x, y и z. Далее будем считать, что A и B - постоянные матрицы. Потребуем, чтобы 2-формы $\bar{\omega}^{\beta}$ были связаны с формами $\bar{a}_i$ теми же соотношениями, что и ω^{β} с a_i. Тогда из /4/ получим:

$$\sum_{i=k+1}^{N} f^{\beta_i} \beta_i = (dG^{\beta}_{\alpha} A^{\alpha}_{\gamma} \zeta^{\gamma} - dF^{\beta}_{\alpha} B^{\alpha}_{\gamma} \zeta^{\gamma}) dx \wedge dt, \qquad /8/$$

$$H^{\beta}_{\gamma} = G^{\nu}_{\gamma} A^{\beta}_{\nu} - F^{\nu}_{\gamma} B^{\beta}_{\nu}. \qquad /9/$$

На интегральном многообразии для переменных ζ^i получим следующие уравнения в матричном виде:

$$\begin{aligned} \zeta_x &= -F\zeta - A\zeta_y, \\ \zeta_t &= -G\zeta - B\zeta_y, \\ A\zeta_t &= -B\zeta_x = -H\zeta. \end{aligned} \qquad /10/$$

Система /10/ является совместной, если

$$[A, B] = 0, \qquad [G, A] + [B, F] = 0. \qquad /11/$$

Следовательно, если найдены матрицы A и B, удовлетворяющие уравнениям /11/, то, используя их, можно найти 3-формы β_i из соотношения /8/. Тем самым мы сконструируем дифференциальное уравнение, задаваемое 3-формами $\{\bar{a}_i\}$, и соответствующую струк-

туру продолжения $\{\bar{\omega}^{\beta}\}$. Следует отметить большую неопределенность метода, связанную с произволом в выборе матриц A и B, а также с уже отмечавшейся в[1] неоднозначностью в определении структуры продолжения.

Для иллюстрации метода приведем пример из работ[4,5]. Рассмотрим уравнение

$$\frac{3}{4} u_{tt} + \frac{1}{4} u_{xxxx} + \frac{3}{2} (u u_x)_x = 0. \qquad /12/$$

Это уравнение описывает гравитационные волны на поверхности воды[6]. Легко показать, что оно может быть задано формами вида

$$\begin{aligned} a_1 &= du \wedge dt - p\, dx \wedge dt, \\ a_2 &= dp \wedge dt - r\, dx \wedge dt, \\ a_3 &= du \wedge dx - \frac{4}{3} dw \wedge dt, \\ a_4 &= dw \wedge dx + \frac{3}{2} up\, dx \wedge dt + \frac{1}{4} dr \wedge dt. \end{aligned} \qquad /13/$$

Структура продолжения имеет вид[4,5]:

$$\begin{aligned} \omega^1 &= d\zeta^1 - \zeta^2 dx + (\zeta^3 + \frac{1}{4} u\zeta^1)\, dt, \\ \omega^2 &= d\zeta^2 - (\zeta^3 - \frac{3u}{4} \zeta^1)\, dx - [\frac{1}{2} u\zeta^2 + (w - \lambda - \frac{1}{4} p)\zeta^1] dt, \qquad /14/ \\ \omega^3 &= d\zeta^3 + [\frac{3}{4} u\zeta^2 + (w - \lambda)\zeta^1] dx + \frac{1}{4} [r + \frac{9}{16} u^2 \zeta^1 - \\ &\quad - (w - \lambda + \frac{1}{4} p)\zeta^2 + \frac{1}{4} u\zeta^3] dt. \end{aligned}$$

Из /13/ видно, что единственной динамической формой является 2-форма a_4. Уравнения /8/ могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \beta_4 =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c} \frac{1}{4} du \wedge dx \wedge dt & 0 & 0 \\ (\frac{1}{4} dp - dw) \wedge dx \wedge dt & -\frac{1}{2} du \wedge dx \wedge dt & 0 \\ (\frac{1}{4} dr + u \frac{9}{8} du) \wedge dx \wedge dt & -\frac{1}{4} (dp + dw) \wedge dx \wedge dt & \frac{1}{4} du \wedge dx \wedge dt \end{array} \right) A -$$

$$
-\left(\begin{array}{c|c|c}
0 & 0 & 0 \\
\frac{3}{4}du\wedge dx\wedge dt & 0 & 0 \\
dw\wedge dx\wedge dt & \frac{3}{4}du\wedge dx\wedge dt & 0
\end{array}\right) B . \qquad /15/
$$

Эти уравнения хорошо иллюстрируют возникающую неопределенность в выборе матриц A и B.

Можно показать, что если

$$
A = 3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad /16/
$$

то уравнения /11/ удовлетворяются. Из /15/ следует, что 3-форму β_4 можно записать в виде $\frac{3}{4}du\wedge dx\wedge dt$.
Набор 3-форм

$$
\begin{aligned}
\bar{\alpha}_1 &= du\wedge dt\wedge dy - p\, dx\wedge dt\wedge dy, \\
\bar{\alpha}_2 &= dp\wedge dt\wedge dy - r\, dx\wedge dt\wedge dy, \\
\bar{\alpha}_3 &= du\wedge dx\wedge dy - \frac{4}{3}dw\wedge dt\wedge dy, \\
\bar{\alpha}_4 &= dw\wedge dx\wedge dy + \frac{3}{4}up\, dx\wedge dt\wedge dy + \frac{1}{4}dr\wedge dt\wedge dy + \\
&\quad + \frac{3}{4}du\wedge dx\wedge dt
\end{aligned} \qquad /17/
$$

задает уравнение Кадомцева-Петвиашвили [7].

Переменные ζ^1 на интегральном многообразии удовлетворяют следующим уравнениям:

$$
\begin{aligned}
&\zeta^1_x = \zeta^2, && \zeta^1_y = -\zeta^3 - \frac{1}{4}u\zeta^1, \\
&\zeta^2_x = \zeta^3 - \frac{3}{4}u\zeta^1, && \zeta^2_y = \frac{1}{2}u\zeta^2 + (w-\lambda-\frac{1}{4}p)\zeta^1 - \zeta^1_y, \\
&\zeta^3_x = -\frac{3}{4}u\zeta^2 - (w-\lambda)\zeta^1 - 3\zeta^1_y, && \zeta^3_t = -\frac{1}{4}(r+\frac{9}{16})\zeta^1 + (w-\lambda+\frac{1}{4}p)\zeta^2 - \\
& && \qquad - \frac{1}{4}u\zeta^3 - \zeta^2_y .
\end{aligned}
$$

Исключая из этих уравнений переменные ζ^2 и ζ^3, получим:

$$
\begin{aligned}
&3\zeta^1_y + \zeta^1_{xxx} + \frac{3}{2}u\zeta^1_x + \frac{3}{2}u\zeta^1_x + (\frac{3}{4}u_x + w)\zeta^1 = \lambda\zeta^1, \\
&\zeta^1_t + \zeta^1_{xx} + u\zeta^1 = 0 .
\end{aligned} \qquad /19/
$$

Система /19/ представляет собой систему уравнений линейной задачи рассеяния для уравнения Кадомцева-Петвиашвили:

$$
\frac{3}{4}(u_{tt} + u_{xy}) + \frac{1}{4}(u_{xxx} + 6uu_x)_x = 0 . \qquad /20/
$$

В заключение отметим, что метод Уолквиста-Этабрука может оказаться полезным при исследовании нелинейных эволюционных уравнений. Однако он не лишен недостатков; как и метод Лакса, этот метод требует довольно громоздких вычислений и интуиции при поиске структуры продолжения.

Авторы выражают глубокую благодарность профессору В.Г.Маханькову и О.К.Пашаеву за стимулирующие дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Швачка А.Б., Яновски А.Б. ОИЯИ, Р5-82-239, Дубна, 1982.
2. Estabrook F., Wahlquist H. J.Math.Phys., 1975, 16, p.1.
3. Wahlquist H., Estabrook F. J.Math.Phys., 1976, 17, p.1293.
4. Morris H.C. J.Math.Phys., 1976, 17, p. 1870.
5. Morris H.C. J.Math.Phys., 1977, 18, p. 285.
6. Ursell F. Proc.Camb.Philos. Soc., 1953, 49, p. 658.
7. Кадомцев Б.Б., Петвиашвили В.И. ДАН СССР, 1970, 192, с. 753.

Рукопись поступила в издательский отдел
31 марта 1982 года.